УДК 532.516

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. акад. Лаврентьева, 15, 630090 Новосибирск

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск

E-mail: sennitskii@yandex.ru

Поставлена и решена задача о течении в поле силы тяжести вязкой жидкости, граничащей с твердыми стенками. Граница одной из стенок проницаема для жидкости. На жидкость оказываются периодические по времени воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве. Постановка задачи включает в себя уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердых границах жидкости (на границах стенок). Обнаружен, в частности, гидромеханический эффект, состоящий в том, что жидкость ведет себя парадоксально – на фоне колебаний совершает стационарное движение в направлении, противоположном направлению ускорения свободного падения.

Ключевые слова: вязкая жидкость; поле силы тяжести; периодические по времени воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве.

Введение

На протяжении ряда лет успешно ведутся исследования динамики гидромеханических систем при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях (см., например, [1 – 4] и представленную там литературу). В частности, теоретически и экспериментально обнаружено явление преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в колеблющейся жидкости [1, 5 – 7]; найдено, что вибрационные воздействия могут приводить к гидромеханическому эффекту – аналогу «маятника Капицы» [8], – состоящему в том, что в присутствии поля силы тяжести находящееся в жидкости твердое тело совершает «перевернутые» колебания [9]. В настоящей работе рассматривается новая задача о течении в поле силы тяжести вязкой несжимаемой жидкости, подвергающейся периодическим по времени воздействиям, характеризующимся отсутствием выделенного направления в пространстве. Установлено, в частности, что жидкость (на фоне колебаний) может совершать стационарное движение в направлении, противоположном направлению ускорения свободного падения, то есть «снизу вверх».

Постановка задачи

Имеются вязкая несжимаемая жидкость и вертикальные твердые стенки Ξ_A , Ξ_S . Граница стенки Ξ_S проницаема для жидкости. Стенка Ξ_A совершает заданные периодические поступательные колебания вдоль осей X, Y , стенка Ξ_S – вдоль оси Y инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Стенка Ξ_A ограничена плоскостью $X = A$, стенка Ξ_S – плоскостью $X = S$ ($S > A$ – постоянная). Жидкость заполняет промежуток между стенками — область Ω: $A < X < S$ $(-\infty < Y < \infty, -\infty < Z < \infty)$. Требуется определить плоское периодическое по времени t движение жидкости.

Пусть $x = X/S; y = Y/S; z = Z/S; T$ — период колебаний стенок Ξ_A , Ξ_S; $\tau = t/T$; $A = \widetilde{A}\sin 2\pi\tau$ ($\widetilde{A} > 0$ – постоянная); $a = A/S$; $\varepsilon = \widetilde{A}/S$; $\mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$; $\mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$; $(dA/dt)\mathbf{e}_x + U_A\mathbf{e}_y$ — скорость стенки Ξ_A ; $u_A = TU_A/S = \widetilde{u}_A \sin(2\pi\tau + \varphi)$ ($\widetilde{u}_A \geq 0, \varphi$ — параметры); $U_S\mathbf{e}_y$ — скорость стенки Ξ_S; $u_S = TU_S/S = \widetilde{u}_S \sin(2\pi\tau + \psi)$ ($\widetilde{u}_S \geq 0, \psi$ — параметры); $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ — ускорение свободного падения ($g > 0$ — постоянная); $\kappa = gT^2/\widetilde{A}$; $\rho, \nu, \mathbf{V}$ — соответственно плотность , кинематический коэффициент вязкости и скорость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/S = v_x(x,\tau)\mathbf{e}_x + v_y(x,\tau)\mathbf{e}_y$; P — давление в жидкости; $p = T^2P/(\rho S^2) = p(x,\tau)$; $Re = S^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса.

Постановка задачи включает в себя уравнение Навье—Стокса, уравнение неразрывности и условия, которые должны выполняться на границах стенок Ξ_A , Ξ_S:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v} - \varepsilon\kappa\mathbf{e}_y \qquad \text{в } \Omega; \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{в } \Omega; \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = \frac{da}{d\tau}\mathbf{e}_x + u_A\mathbf{e}_y \qquad \text{при } x = a; \tag{3}$$

$$\mathbf{v} = \frac{da}{d\tau}\mathbf{e}_x + u_S\mathbf{e}_y \qquad \text{при } x = 1. \tag{4}$$

Решение задачи

Из (2)—(4) следует

$$v_x = 2\pi\varepsilon\cos 2\pi\tau \qquad \text{в } \Omega. \tag{5}$$

Согласно (1), (3)—(5) имеем

$$p = 4\pi^2\varepsilon(\sin 2\pi\tau)x + p' \qquad \text{в } \Omega \tag{6}$$

(p' — функция τ);

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} + 2\pi\varepsilon(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \varepsilon\kappa \qquad \text{в } \Omega; \tag{7}$$

$$v_y = u_A \qquad \text{при } x = a; \tag{8}$$

$$v_y = u_S \qquad \text{при } x = 1. \tag{9}$$

Будем рассматривать задачу (7)—(9) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Применим метод разложения по степеням малого параметра (см. [10]). Предположим, что

$$v_y \sim v_0 + \varepsilon v_1 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Используя (7)—(10), в ε^N – приближении $(N=0,1)$ получим

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau}+2N\pi(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x}=\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_N}{\partial x^2}-N\kappa \qquad \text{в } \bar{\Omega}; \tag{11}$$

$$v_N=(1-N)u_A-N(\sin 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x} \qquad \text{при } x=0; \tag{12}$$

$$v_N=(1-N)u_S \qquad \text{при } x=1, \tag{13}$$

где $\bar{\Omega}$ – область $0<x<1$.

Пусть $N=0$. Задача (11)—(13) имеет решение

$$v_0=\text{Imag}\left[\frac{\widetilde{u}_A e^{i\varphi}\,\text{sh}\,q(1-x)+\widetilde{u}_S e^{i\psi}\,\text{sh}\,qx}{\text{sh}\,q}e^{2\pi i\tau}\right] \qquad \text{для } 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{14}$$

Здесь $q=(1+i)\sqrt{\pi Re}$.

Пусть $N=1$. Из (11)—(13) следует

$$2\pi\left\langle(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\rangle=\frac{1}{Re}\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}-\kappa \qquad \text{в } \bar{\Omega}; \tag{15}$$

$$\bar{v}=-\left\langle(\sin 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\rangle \qquad \text{при } x=0; \tag{16}$$

$$\bar{v}=0 \qquad \text{при } x=1, \tag{17}$$

где $\langle...\rangle=\int_\tau^{\tau+1}...\,d\tau'$; $\bar{v}=\langle v_1\rangle$. Задача (11)—(13) имеет решение

$$v_1=\bar{v}+\text{Real}\left(\widetilde{v}e^{4\pi i\tau}\right) \qquad \text{для } 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{18}$$

($\widetilde{v}$ — функция x).

Используя (14)—(17), найдем

$$\bar{v}=-\,\frac{1}{2}\,\kappa\;Re\;x(1-x)\;+$$

$$+\;\frac{1}{2}\text{Real}\left\{\frac{q}{\text{sh}\,q}[\widetilde{u}_A e^{i\varphi}(\text{ch}\,q(1-x)-x)+\widetilde{u}_S e^{i\psi}((\text{ch}\,q)x-\text{ch}\,qx)]\right\} \qquad \text{для } 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{19}$$

Формулами

$$v_y=v_0+\varepsilon v_1 \tag{20}$$

и (5), (6), (14), (18), (19) определяется приближенное решение задачи (1)—(4). Это решение свидетельствует о наличии ряда необычных, качественно различных (происходящих на фоне колебаний) стационарных течений жидкости. В частности, для малых по сравнению с единицей значений $\eta=1-x:0<\eta\leqslant\eta^*$ ($\eta^*\ll 1$ — постоянная), при

$$\widetilde{u}_S=0;$$

$$\mathrm{Real}\left(\chi e^{i\varphi}\right) > 0; \tag{21}$$

$$\widetilde{u}_A > \frac{\kappa Re}{\mathrm{Real}\left(\chi e^{i\varphi}\right)}$$

$(\chi = q \;/ \operatorname{sh} q)$ выполняется соотношение

$$\bar{v} > 0.$$

Данное соотношение означает, что жидкость занимающая слой

$$1 - \eta^* \leqslant x < 1$$

ведет себя парадоксально — на фоне колебаний совершает стационарное движение в направлении, противоположном направлению ускорения свободного падения (то есть «снизу вверх»). Отметим, что условие (21) для любого значения $Re > 0$ выполняется, например, при $\varphi = \pi/4 - \arg\chi$.

Остановимся на вопросе о среднем по времени течении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях Re.

Пусть

$$\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi \neq 0.$$

Используя(5), (14), (18) – (20), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \frac{1}{2}\varepsilon\left(\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi\right)(1 - x)\,\mathbf{e}_y \qquad \text{при } Re \to 0. \tag{22}$$

Согласно (22) (на фоне колебаний) имеет место следующее. При $\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi < 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «сверху вниз» (однако, данное движение существенным образом отличается от движения, происходящего в отсутствие колебаний стенок); при $\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi > 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «снизу вверх».

Пусть

$$\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi = 0. \tag{23}$$

Используя (5), (14), (18)—(20), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \frac{\pi}{6}\,\varepsilon\,(F + Gx)\,(1 - x)\,Re\;\mathbf{e}_y \qquad \text{при } Re \to 0. \tag{24}$$

Здесь

$$F = -2\widetilde{u}_A \sin\varphi - \widetilde{u}_S \sin\psi; \quad G = 3\left(\widetilde{u}_A \sin\varphi - \widetilde{u}_S \sin\psi - \frac{\kappa}{\pi}\right).$$

Согласно (24) (на фоне колебаний) имеет место следующее. При $F \leqslant 0,\ G < 0$ и $F < 0,\ G \leqslant 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «сверху вниз»; при $F \geqslant 0,\ G > 0$ и $F > 0,\ G \geqslant 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «снизу вверх»; при $F > 0,\ G < 0,\ -F/G < 1$ жидкость, занимающая слой $0 < x < -F/G$, движется «снизу вверх», а жидкость, занимающая слой $-F/G < x < 1$, — «сверху вниз»; при $F > 0,\ G < 0,\ -F/G \geqslant 1$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «снизу вверх»; при $F < 0,\ G > 0,\ -F/G < 1$ жидкость, занимающая слой $0 < x < -F/G$, движется «сверху вниз», а жидкость, занимающая слой $-F/G < x < 1$, —

«снизу вверх»; при $F < 0,\ G > 0,\ -F/G \geqslant 1$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «сверху вниз»; при

$$F = 0, \quad G = 0 \tag{25}$$

жидкость в области $\bar{\Omega}$ пребывает в состоянии «левитации» — находясь в поле силы тяжести, (на фоне колебаний) покоится. Отметим, что условия (23), (25) для любого значения $\kappa > 0$ выполняются, например, при $\widetilde{u}_A = \kappa\ /\ (3\pi)\,,\ \widetilde{u}_S = 2\kappa\ /\ (3\pi)\,,\ \varphi = \pi/2,\ \psi = 3\pi/2.$

Заключение

Результаты настоящей работы свидетельствуют о том, что в присутствии поля силы тяжести оказываемые на жидкость периодические по времени воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве, способны приводить к эффектам многообразно проявляющегося необычного, парадоксального поведения жидкости. Причиной обнаруженных эффектов является согласованность (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения (см. [4, 11, 12]).

Представленное в настоящей работе, в частности, может служить теоретической основой для проведения направленных экспериментальных исследований движения жидкости при периодических по времени воздействиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117 – 119.

2. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.

3. Lyubimov D. V., Baydin A. Y., Lyubimova T. P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // Microgravity Science and Technology. 2013. V. 25. P. 121 – 126. DOI 10.1007/s12217-012-9336-3 .

4. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 126 – 133. DOI 10.33048/SIBJIM.2021.24.201 .

5. Сенницкий В. Л. О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1988. № 6. С. 107 – 113.

6. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 1. С. 100 – 101.

7. Сенницкий В. Л. О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, № 1. С. 82 – 86.

8. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44, вып. 1. С. 7 – 20.

9. Сенницкий В. Л. О колебательном движении неоднородного твердого шара в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 27 – 35.

10. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

11. Сенницкий В. Л. Движение включений в колеблющейся жидкости // Сибирский физический журнал. 1995. № 4. С. 18 – 26.

12. Сенницкий В. Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 1. С. 57 – 62.

ON PECULIARITIES OF A LIQUID FLOW IN A GRAVITY FIELD

V. L. Sennitskii

Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of SB RAS
Novosibirsk State University

Key words: viscous liquid; gravity field; periodical in time influences having no predominant direction in space.

Сенницкий Владимир Леонидович
E-mail: sennitskii@yandex.ru