S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 77–88 (2020) УДК 517.956.32
DOI 10.33048/semi.2020.17.007 MSC 35M10

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О.С.ЗИКИРОВ, Д.К.ХОЛИКОВ

Abstract. In this paper we consider solvability of non–local problems for loaded pseudoparabolic equation of third order, with combine problems with integral conditions and problems with Steklov V.A. conditions with variable coefficients. The existence and uniqueness of classical solution of considered problem is proved by Riemann's method.

Keywords: loaded equation, Riemann function, non–local condition, pseudoparabolic equation.

1. Введение

В плоскости независимых переменных (x,t) рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

$$Mu \equiv Lu + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x,t)dx = f(x,t), \tag{0.1}$$

здесь $Lu \equiv u_{xxt} + d(x,t)u_t + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u$ — псевдопараболический оператор, α, β и γ — заданные постоянные, причем $\alpha < \beta$, $f(x,t)$ — заданная функция.

Нагруженными приятно называть уравнение [1, 2], содержащее некоторую операцию от следа искомой функции. В настоящее время, в связи с развитием теории нелокальных задач для уравнений в частных производных нагруженными стали называть и уравнения, содержащие функционал от самого искомого решения [3].

Zikirov, O.S., Kholikov, D.K., Solvability of some non–local problems for the loaded pseudoparabolic equation.

Работа поддержана узбекско–российским проектом MRU-OT-1/2017.

Поступила 4 апреля 2019 г., опубликована 10 февраля 2020 г.

Уравнение (0.1) часто называют нагруженным уравнением псевдопараболического типа [3], благодаря наличию интегрального слагаемого в правой части.

Нагруженное уравнение (0.1) в случае $\gamma = 0$ называют в литературе обобщенным уравнением Аллера [3]. Такого вида уравнения возникают в теории фильтрации жидкостей в пористых средах [4], не установившегося движения грунтовых вод со свободной поверхностью [5], в теории влагопереноса в почве [6], и многих других дисциплинах, связанных с математическим моделированием.

Отметим, что в работах [7–13, 19, 20] исследованы различные начально–краевые и нелокальные задачи для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Смешанные задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных рассмотрены в работах [14, 15], но при этом, в основном исследовались уравнения второго порядка, как в одномерных [14], так и многомерных [15] областях.

Данная работа представляет собой исследование разрешимости краевых задач с интегральными условиями и задачи с нелокальными условиями В.А.Стеклова с переменными коэффициентами для нагруженного уравнения вида (0.1).

2. Постановка задач

В области $D = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка

$$Mu \equiv Lu + \int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx = f(x,t), \tag{1}$$

где L — псевдопараболический оператор, а $k(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции.

Нелокальная задача 1. *Требуется найти в области D регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и следующим нелокальным условиям

$$u(0,t) = \lambda(t)u(l,t) + \int\limits_0^t h(t,\tau)u(l,\tau)d\tau, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

здесь $\varphi(x)$, $\mu_2(t)$, $\lambda(t)$ и $h(t,\tau)$ — заданные функции, непрерывны на $[0,l]$ и $[0,T]$, $0 \le \tau \le t$, соответственно. Кроме того, удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi(0) = \lambda(0)\varphi(l), \qquad \varphi^{'}(0) = \mu_2(0).$$

Нелокальная задача 2. *Найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), и следующим нелокальным условиям*

$$u_x(0,t) = \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(l,t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u_x(l,t) = \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

здесь $\varphi(x)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ – заданные функции, причем

$$\varphi^{'}(0) = \alpha_1(0)\varphi(0) + \alpha_2(0)\varphi(l), \quad \varphi^{'}(l) = \beta_1(0)\varphi(0) + \beta_2(0)\varphi(l).$$

Отметим что, нелокальное условие (3) предложено впервые в работе А.И.Кожанова [18], физически оно выражает расход влаги в почвенном слое от 0 до l.

Нелокальная условия (5) и (6) являются условия В.А.Стеклова первого класса [16], которые естественным образом возникают при решении многих прикладных задач (см. например [16, 17]).

Здесь и ниже под регулярным в области D решением уравнения (1) подразумевается функция $u(x,t)$, непрерывная в D вместе со своими частными производными, входящими в уравнение, и обращающая его в тождество.

3. Разрешимость нелокальной задачи 1

Обозначим через $C^{k,l}(D)$ класс функций $u(x,t)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u/\partial x^m \partial t^n$ для всех $m = 0,1,2,...,k;\ \ n = 0,1,2,...,l$; где $C^{k,0}(D) = C^{0,k}(D) = C^k(D)$ и $C^{0,0}(D) = C(D)$.

Смешанную задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{2,1}(D)\bigcap C^{1,0}(\overline{D})$ и в этом случае будем требовать выполнение следующих условий:

Условие 1. *Пусть коэффициенты уравнения (1) для всех* $(x,t) \in D$ *удовлетворяют условиям*

$$a(x,t) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{2,0}(D); \quad b(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{1,0}(\overline{D}), \quad c(x,t) \in C(\overline{D});$$

$d(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D)$. *Кроме того,* $d(x,t) < 0$ *для любой* $(x,t) \in \overline{D}$.

Условие 2. *Пусть заданные функции* $\varphi(x)$, $\lambda(t)$, $h(\tau,t)$, $k(x,t)$, *и* $f(x,t)$ *удовлетворяют условиям* $\varphi_0(x) \in C^1[0,l] \cap C^2(0,l)$; $\lambda(t)$, $h(\tau,t) \in C[0,T]$; $\mu_2(t) \in C^1[0,T]$; $f(x,t)$, $k(x,t) \in C(\overline{D})$.

Имеет место следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи 1.

Теорема 1. *Если выполнены Условие 1 и Условие 2. Тогда нелокальной задачи 1 разрешима и притом единственном образом.*

Доказательство. Справедливость сформулированной выше теоремы докажем методом Римана [7].

1^0. Введем оператор L^*, сопряженный с оператором L :

$$L^*v \equiv -v_{xtx} - (dv)_t + (av)_{xx} - (bv)_x + cv.$$

Очевидно, что оператор L^* определен на функциях $v(x,t)$, имеющих следующую гладкость: $v(x,t) \in C^{1,0}(\overline{D})$, $v(x,t) \in C^{0,0}(\overline{D})$ и $v(x,t) \in C^{2,1}(D)$.

Определим аналог функции Римана $v = v(x,t;\xi,\tau)$ следующими требованиями:

$$L^*v = 0, \quad \forall (x,t) \in D \tag{7}$$

$$v(\xi,t;\xi,\tau) = 0, \qquad v_x(\xi,t;\xi,\tau) = exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t} a(\xi,\tau_1)d\tau_1\right\}, \tag{8}$$

$$v(x,\tau;\xi,\tau) = \omega(x,\tau), \tag{9}$$

где $\omega(x,\tau)$ — решение задачи Коши:

$$v_{xx}(x,\tau;\xi,\tau)+(dv)(x,\tau;\xi,\tau)=0,$$
$$v(\xi,\tau;\xi,\tau)=0, \quad v_x(\xi,\tau;\xi,\tau)=1, \tag{10}$$

а (ξ,τ) — произвольная фиксированная точка из области $\overline{D}$.

2^0. Для доказательство разрешимости нелокальной задачи 1 исследуем вспомогательную задачу Гурса для уравнения (1). *Требуется найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в области D регулярным решением уравнения (1) и удовлетворяющую начальному условию (2) и граничным условиям*

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u_x(0,t)=\mu_2(t), \quad 0\le t\le T, \tag{11}$$

где $\mu_1(t)$ — пока неизвестная функция, и при этом будем предполагать, что $\mu_1(0)=\varphi(0)$.

Известно (см. например [20]), что если функции

$$\varphi(x)\in C^1[0,l]\cap C^2(0,l), \quad \mu_i(t)\in C^1[0,T], \ i=1,2,$$

то решение задачи Гурса (1), (2), (11) существует и единственно.

Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$vLu-uL^*v=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}+v\int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx, \tag{12}$$

здесь

$$P=vu_{xt}+uv_{xt}+avu_x-(av)_xu+bvu; \quad Q=-v_xu_x+duv.$$

Предположим, что P, Q непрерывны в области $\overline{D}$, а P_x, Q_t непрерывны и ограничены в D. Проинтегрируем тождество (12) по области $D_0=\{(x_1,t_1): x_0<x_1<x, \ t_0<t_1<t\}$, имеем

$$\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{x_0}^x(vLu-uL^*v)dx_1dt_1=\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{x_0}^x\left\{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}+v\int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx\right\}dx_1dt_1, \tag{13}$$

С учетом определения функции Римана $v=v(x,t;\xi,\tau)$ из формулы (13) легко получим интегральное представление

$$u(x,t)=v_x(x_0,t;x,t)u(x_0,t)+\int\limits_{x_0}^x[v_x(\xi,t_0;x,t)-d(\xi,t_0)v(\xi,t_0;x,t)]u(\xi,t_0)]d\xi-$$
$$-\int\limits_{t_0}^t[v(x_0,\tau;x,t)u_{xt}(x_0,\tau)+a(x_0,\tau)v(x_0,\tau;x,t)u_x(x_0,\tau)]d\tau-$$
$$-\int\limits_{t_0}^t[v_{xt}(x_0,\tau;x,t)-(av)_x(x_0,\tau;x,t)+(bv)(x_0,\tau;x,t)]u(x_0,\tau)d\tau-$$
$$-\int\limits_{x_0}^x dx_1\int\limits_{t_0}^t v(\xi,\tau;x,t)\left\{f(\xi,\tau)+\int\limits_0^l k(x,\tau)u(x,\tau)dx\right\}d\tau d\xi, \tag{14}$$

где (x_0,t_0) — произвольная фиксированная точка из $\overline{D}_0$.

Формулу (14) можно рассматривать как представление общего решения уравнения (1), если считать, что $u(x_0,t)$, $u_x(x_0,t)$ и $u(x,t_0)$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Используя представление (14) при $x_0 = t_0 = 0$, и учитывая условия (2) и (11) получим

$$u(x,t) = v_x(0,t;x,t)\mu_1(t) - v(0,t;x,t)\mu_2(t) + v(0,0;x,t)\varphi'(0)+$$

$$+\int\limits_0^x [v_x(\xi,0;x,t)\varphi'(\xi) - d(\xi,0)v(\xi,0;x,t)\varphi(\xi)]d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t [v_{xt}(0,\tau;x,t) - (av)_x(0,\tau;x,t) + (bv)(0,\tau;x,t)]\mu_1(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t [v_t(0,\tau;x,t) + a(0,\tau)v(0,\tau;x,t)]\mu_2(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^x\int\limits_0^t v(\xi,\tau;x,t)\left\{f(\xi,\tau) + \int\limits_0^l k(x,\tau)u(x,\tau)dx\right\}d\tau d\xi, \tag{15}$$

Формула (15) устанавливает взаимно–однозначное соответствие между регулярным решением $u(x,t)$ уравнения (1) и значениями

$$f(x,t) \in C(\overline{D}), \quad \varphi(x) \in C^1[0,l] \cap C^2(0,l), \quad \mu_1(t),\ \mu_2(t) \in C^1[0,T].$$

3^0. В уравнение (1) введем обозначение

$$\mu(t) = \int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx, \qquad \mu(0) = \int\limits_0^l k(x,0)\varphi(x)dx, \tag{16}$$

где $\mu(t)$ — пока неизвестная функция.

Учитывая (16) представление (15) перепишем в виде

$$u(x,t) = v_x(0,t;x,t)\mu_1(t) - v(0,t;x,t)\mu_2(t) - \int\limits_0^t k_1(\tau;x,t)\mu_1(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t k_2(\tau;x,t)\mu_2(\tau)d\tau - \int\limits_0^x\int\limits_0^t v(\xi,\tau;x,t)\mu(\tau)d\tau d\xi + g(x,t), \tag{17}$$

здесь

$$k_1(\tau;x,t) = v_{xt}(0,\tau;x,t) - (av)_x(0,\tau;x,t) + (bv)(0,\tau;x,t);$$

$$k_2(\tau;x,t) = v_t(0,\tau;x,t) + a(0,\tau)v(0,\tau;x,t);$$

$$g(x,t) = \int\limits_0^x [v_x(\xi,0;x,t)\varphi'(\xi) - d(\xi,0)v(\xi,0;x,t)\varphi(\xi)]d\xi+$$

$$+v(0,0;x,t)\varphi'(0) - \int\limits_0^x\int\limits_0^t v(\xi,\tau;x,t)f(\xi,\tau)d\tau d\xi.$$

Сначала умножим (17) на $k(x,t)$, полученное при этом выражение интегрируем по x в пределах от 0 до l, получим

$$\int_0^l k(x,t)u(x,t)dx = \mu_1(t)\int_0^l k(x,t)v_x(0,t;x,t)dx - \mu_2(t)\int_0^l k(x,t)v(0,t;x,t)dx-$$

$$-\int_0^t \mu_1(\tau)\left(\int_0^l k(x,t)k_1(\tau;x,t)dx\right)d\tau + \int_0^t \mu_2(\tau)\left(\int_0^l k(x,t)k_2(\tau;x,t)dx\right)d\tau-$$

$$-\int_0^t \mu(\tau)\left(\int_0^l k(x,t)dx\int_0^x v(\xi,\tau;x,t)d\xi\right)d\tau + \int_0^l k(x,t)g(x,t)dx, \qquad (18)$$

В силу (16) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $\mu(t)$:

$$\mu(t) + \int_0^t K(\tau,t)\mu(\tau)d\tau = \gamma(t), \qquad (19)$$

здесь

$$K(\tau,t) = \int_0^l k(x,t)\left(\int_0^x v(\xi,\tau;x,t)d\xi\right)dx;$$

$$\gamma(t) = \mu_1(t)\int_0^l k(x,t)v_x(0,t;x,t)dx - \mu_2(t)\int_0^l k(x,t)v(0,t;x,t)dx-$$

$$-\int_0^t \mu_1(\tau)\left(\int_0^l k(x,t)k_1(\tau;x,t)dx\right)d\tau + \int_0^t \mu_2(\tau)\left(\int_0^l k(x,t)k_2(\tau;x,t)dx\right)d\tau+$$

$$+\int_0^l k(x,t)g(x,t)dx. \qquad (20)$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

Находя из интегрального уравнения (19) функцию $\mu(t) \in C[0,T]$:

$$\mu(t) = \gamma(t) + \int_0^t R(\tau,t)\gamma(\tau)d\tau, \qquad (21)$$

где $R(\tau,t)$ – резольвента ядра $K(\tau,t)$.

Учитывая (20) из решения (21) интегрального уравнения (19), имеем

$$\mu(t) = \mu_1(t)\int_0^l k(x,t)v_x(0,t;x,t)dx - \mu_2(t)\int_0^l k(x,t)v(0,t;x,t)dx-$$

$$-\int_0^t K_1(\tau,t)\mu_1(\tau)d\tau + \int_0^t K_2(\tau,t)\mu_2(\tau)d\tau + \gamma_1(t),$$

здесь

$$K_1(\tau,t)=\int\limits_0^l k(x,t)k_1(\tau;x,t)dx+R(\tau,t)\int\limits_0^l k(x,t)v_x(0,t;x,t)dx-$$

$$-\int\limits_\tau^t R(s,t)\left(\int\limits_0^l k(x,s)k_1(s;x,\tau)dx\right)ds;$$

$$K_2(\tau,t)=\int\limits_0^l k(x,t)k_2(\tau;x,t)dx-R(\tau,t)\int\limits_0^l k(x,t)v(0,t;x,t)dx-$$

$$-\int\limits_\tau^t R(s,t)\left(\int\limits_0^l k(x,s)k_2(s;x,\tau)dx\right)ds;$$

$$\gamma_1(t)=\int\limits_0^l k(x,t)\gamma(x,t)dx+\int\limits_0^t R(\tau,t)\left(\int\limits_0^l k(x,\tau)\gamma(x,\tau)dx\right)d\tau.$$

Найденное значение $\mu(t)$ подставляем в (17), получим

$$u(x,t)=v_x(0,t;x,t)\mu_1(t)-v(0,t;x,t)\mu_2(t)-\int\limits_0^t k_1(\tau;x,t)\mu_1(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t k_2(\tau;x,t)\mu_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^t K_3(\xi,\tau;x,t)\mu_1(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^t K_4(\xi,\tau;x,t)\mu_2(\tau)d\tau+g_2(x,t), \tag{22}$$

где

$$K_3(\xi,\tau;x,t)=v(\xi,\tau;x,t)\int\limits_0^l k(x,\tau)v_x(0,\tau;x,\tau)dx-\int\limits_\tau^t v(\xi,s;x,t)K_1(s,\tau)ds;$$

$$K_4(\xi,\tau;x,t)=v(\xi,\tau;x,t)\int\limits_0^l k(x,\tau)v(0,\tau;x,\tau)dx-\int\limits_\tau^t v(\xi,s;x,t)K_2(s,\tau)ds;$$

$$g_2(x,t)=g(x,t)+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^t v(\xi,\tau;x,t)\gamma_1(\tau)d\tau.$$

Представление (22) перепишем в виде

$$u(x,t)=v_x(0,t;x,t)\mu_1(t)-\int\limits_0^t p(\tau;x,t)\mu_1(\tau)d\tau+g_2(x,t), \tag{23}$$

где $p(\tau;x,t)=k_1(\tau;x,t)-\int\limits_0^x K_1(\xi,\tau;x,t)d\xi;$ а $g_2(x,t)$ — выражается через известными функциями.

В силу нелокальных условий (3) находим неизвестные функции $\mu_1(t)$ удовлетворяющие условиям

$$\mu_1(t) = \lambda(t)u(l,t) + \int\limits_0^t h(\tau,t)u(l,\tau)d\tau, \tag{24}$$

При $x = l$ из формулу (23) имеем

$$u(l,t) = v_x(0,t;l,t)\mu_1(t) - \int\limits_0^t p(\tau;l,t)\mu_1(\tau)d\tau + g_2(l,t). \tag{25}$$

Умножим последнее выражение на $h(\tau,t)$, и проинтегрируем по τ от 0 до t, получим

$$\int\limits_0^t h(\tau,t)u(l,\tau)d\tau = \int\limits_0^t \left\{ h(\tau,t)v_x(0,\tau;l,\tau) - \int\limits_\tau^t h(s,t)p(s;l,\tau)ds \right\} \mu_1(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t h(\tau,t)g_2(l,\tau)d\tau.$$

Умножим выражение (25) на $\lambda(t)$, учитывая последнее равенство, в силу условия (24) имеем

$$[1 - \lambda(t)v_x(0,t;l,t)]\mu_1(t) = \lambda(t)g_2(l,t) + \int\limits_0^t h(\tau,t)g_2(l,\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left\{ -\lambda(t)p(\tau;l,t) + h(\tau,t)v_x(0,\tau;l,\tau) - \int\limits_\tau^t h(s,t)p(s;l,\tau)ds \right\} \mu_1(\tau)d\tau. \tag{26}$$

Таким образом, вопрос о разрешимости нелокальной задачи 1 сведен к разрешимости интегральных уравнений (19) и (26). Система интегральных уравнений (19) и (26) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая имеет единственное решение $\mu(t)$ и $\mu_1(t)$ в классе $C^1[0,T]$. □

4. Разрешимость нелокальной задачи 2

В этом разделе изучим вопрос о сведении нелокальной задачи 2 к системе интегральных уравнений. Нелокальную задачу 2 исследуем в классе функций $C^{2,1}(D) \cap C^{1,0}(\overline{D})$ и потребуем выполнение Условия 1 и следующего условия:

Условие 3. *Пусть заданные функции* $f(x,t)$, $k(x,t)$, $\varphi(x)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ *удовлетворяют условиям* $f(x,t)$, $k(x,t) \in C(\overline{D})$, $\varphi(x) \in C^1[0,l] \cap C^2(0,l)$; $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t) \in C^1[0,T]$ *и* $\alpha_2(t) \neq 0, \beta_2(t) \neq 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены Условие 1 и Условие 3, то нелокальная задача 2 имеет единственное регулярное в области D решение.*

Доказательство. Для этого из (22) при $x = l$ находим

$$u(l,t) = v_x(0,t;l,t)\mu_1(t) - v(0,t;l,t)\mu_2(t) -$$
$$-\int_0^t \{k_1(\tau;l,t) - \int_0^l K_3(\xi,\tau;l,t)d\xi\}\mu_1(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t \{k_2(\tau;l,t) - \int_0^l K_4(\xi,\tau;l,t)d\xi\}\mu_2(\tau)d\tau + g_2(l,t), \tag{27}$$

Умножим (27) на $\alpha_2(t)$ и в силу условии (5), находим соотношения между функциями $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$:

$$[\alpha_2(t) + \alpha_2(t)v_x(0,t;l,t)]\mu_1(t) - [1 + \alpha_2(t)v(0,t;l,t)]\mu_2(t) =$$
$$= \int_0^t \alpha_2(t)\left\{k_1(\tau;l,t) - \int_0^l K_3(\xi,\tau;l,t)d\xi\right\}\mu_1(\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^t \alpha_2(t)\left\{k_2(\tau;l,t) - \int_0^l K_4(\xi,\tau;l,t)d\xi\right\}\mu_2(\tau)d\tau - \alpha_2(t)g_2(l,t), \tag{28}$$

или

$$A_{11}(t)\mu_1(t) + A_{12}(t)\mu_2(t) = \int_0^t K_{11}(\tau,t)\mu_1(\tau)d\tau + \int_0^t K_{12}(\tau,t)\mu_2(\tau)d\tau + \gamma_1(t), \tag{29}$$

здесь

$$A_{11}(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)v_x(0,t;l,t); \quad A_{12}(t) = -1 - \alpha_2(t)v(0,t;l,t)$$

;

$$K_{11}(\tau,t) = \alpha_2(t)\left\{k_1(\tau;l,t) - \int_0^l K_3(\xi,\tau;l,t)d\xi\right\};$$

$$K_{12}(\tau,t) = -\alpha_2(t)\left\{k_2(\tau;l,t) - \int_0^l K_4(\xi,\tau;l,t)d\xi\right\}.$$

Теперь дифференцируем (22) по x, при $x = l$ получим равенство

$$u_x(l,t) = v_{xx}(0,t;l,t)\mu_1(t) - v_x(0,t;l,t)\mu_2(t) -$$
$$-\int_0^t \left\{k_{1x}(\tau;l,t) + K_3(l,\tau;l,t) - \int_0^l K_{3x}(\xi,\tau;l,t)d\xi\right\}\mu_1(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t \left\{k_{2x}(\tau;l,t) - K_4(l,\tau;l,t) - \int_0^l K_{4x}(\xi,\tau;l,t)d\xi\right\}\mu_2(\tau)d\tau + g_{2x}(l,t), \tag{30}$$

Умножим обе части (27) почленно на $\beta_2(t)$ и сложив полученное равенство с выражением (30) в силу условие (6) получим

$$A_{21}(t)\mu_1(t) + A_{22}(t)\mu_2(t) = \int_0^t K_{21}(\tau,t)\mu_1(\tau)d\tau + \int_0^t K_{22}(\tau,t)\mu_2(\tau)d\tau + \gamma_2(t), \tag{31}$$

где

$$A_{21}(t) = v_{xx}(0,t;l,t) - \beta_2(t)v_x(0,t;l,t) - \beta_1(t);$$

$$A_{22}(t) = -v_x(0,t;l,t) + \beta_2(t)v(0,t;l,t);$$

$$K_{21}(\tau,t) = k_{1x}(\tau;l,t) + K_3(l,\tau;l,t) - \beta_2(t)k_1(\tau;l,t) -$$

$$-\int_0^l \Big\{K_{3x}(\xi,\tau;l,t) - \beta_2(t)K_3(\xi,\tau;l,t)\Big\}d\xi;$$

$$K_{22}(\tau,t) = -k_{2x}(\tau;l,t) + K_4(l,\tau;l,t) - \beta_2(t)k_2(\tau;l,t) +$$

$$+\int_0^l \Big\{K_{4x}(\xi,\tau;l,t) - \beta_2(t)K_4(\xi,\tau;l,t)\Big\}d\xi; \quad \gamma_2(t) = \beta_2(t)g_2(l,t) - g_{2x}(l,t).$$

Таким образом, вопрос о разрешимости нелокальной задачи 2 редуцирован к вопросу разрешимости системы интегральных уравнений (29), (31).

Систему интегральных уравнений (29), (31) перепишем в виде

$$A(t)\mu(t) = \int_0^t K(\tau,t)\mu(\tau)d\tau + g(t), \tag{32}$$

здесь

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix} \qquad K(\tau,t) = \begin{pmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$\mu(t) = (\mu_1(t),\ \mu_2(t))^{-1}$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t))^{-1}$.

В силу леммы, доказанной в работе [7], убедимся, что $det|A(t)| \neq 0$, $0 \le t \le T$. Поэтому система интегральных уравнений (32) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Находим из системы интегральных уравнений $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t) \in C^1[0,T]$ и подставив в представление (22), получим решение нелокальной задачи 2. $\square$

В заключение отметим, что при нарушении условие на коэффициент $d(x,t)$ уравнения (1), как показывает ниже пример, что нелокальная задача 1 может оказаться некорректно поставленной.

Пример 1. Функция $u(x,t) = t\cos 2kx$ $(k \in Z)$ в области $D = \{(x,t):\ 0 < x < \pi,\ 0 < t < T\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_{xxt} + (2k)^2 u_t = \int_0^\pi u(x,t)dx,$$

и следующим граничным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad u(0,t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)u(\pi,t) + \int_0^t u(\pi,\tau)d\tau.$$

Приведенный пример показывает, что нарушение условие $d(x,t) < 0$ может привести к нарушению единственности решения нелокальной задачи 1.

Аналогичный результат имеет место и для нелокальной задачи 2.

References

[1] M.T.Jenaliev, *The theory of boundary value problems for loaded differential equations*, Almaty, 1995 (In Russian).

[2] A.M. Nahushev, *Equations of Mathematical Biology*, Vysshaya shkola, Moscow, 1995 (In Russian). Zbl 0991.35500

[3] V.I. Zhegalov, A.N.Mironov, *Differential equations with highest partial derivatives*, Kazansk. Matem. Ob-vo, Kazan', 2001. (In Russian). Zbl 1038.35500

[4] G.N. Barenblatt, Yu. P. Zheltov, I. N. Kochina, *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata)*, PMM, J. Appl. Math. Mech., **24** (1961), 1286–1303. Zbl 0104.21702

[5] E.S. Dzektser, *Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media*, Dokl. AN USSR, **220**:3 (1975), 540–543. Zbl 0331.76056

[6] A.F. Chudnovsky, *Teplofizika pochv*, Nauka, Moscow, (1976) (in Russian).

[7] M.Kh. Shkhanukov, *On some boundary value problems for an equation of third order arising from simulation of filtration of a fluid in porous media*, Differ. Uravn., **18** (1982), 689–699. Zbl 0559.76088

[8] A.P. Soldatov, M.Kh. Shkhanukov, *Boundary value problems with general nonlocal Samarskij condition for pseudoparabolic equations of higher order*, Dokl. AN USSR, **297**:3 (1987), 547–552. Zbl 0701.35092

[9] O.M. Dzhokhadze, *The Influence of the younger members on the correctness of characteristic problems for hyperbolic equations of third order*, Mat. notes., **74**:4 (2003), 517–528. Zbl 1082.35094

[10] A.I. Kozhanov, N.S. Popov, *On the solvability of some problems with offset for pseudoparobolic equation*, J. Math. Sci., New York, **186**:3 (2012), 438-452. Zbl 1249.35187

[11] A.A. Kerefov, Y.V. Plotnikova *Nonlocal problems for a third-order equation*, Vladikavkaz Math. J., **7**:1 (2005), 51–60. Zbl 1299.35087

[12] A. Bouziani, N. Merazga, *Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral conditions*, Elect. J. Differ. Equ., **2006**:115 (2006), 1–18. Zbl 1112.35115

[13] D.-Q. Dai, Y. Huang, *Nonlocal boundary problems for a third-order one-dimensional nonlinear pseudoparabolic equation*, Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, **66**:1 (2007), 179–191. Zbl 1105.35056

[14] L.S. Pulkina,*Nonlocal problem with two integral conditions for hyperbolic equation on plane*, Neklasicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki, Novosibirsk, (2007), 232-236, (in Russian).

[15] A.I. Kozhanov, L.S. Pulkina, *On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations*, Differ. Equ., **42**:(9) (2006), 1233–1246. Zbl 1141.35408

[16] V.A. Steklov, *Osnovnie zadachi matematicheskoy fiziki*, Nauka, Moscow, 1983, (in Russian). Zbl 0547.35004

[17] A. M. Nakhushev, *Problems with shift for partial differential equations*, Nauka, Moscow, 2006 (in Russian). Zbl 1135.35002

[18] A.I. Kozhanov, *On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation*, Differ. Equ., **40**:6 (2004), 815–826. Zbl 1076.35044

[19] O.S. Zikirov, D.K. Kholikov, *Nonlocal problems for loaded pseudoparabolic equation* Neklasicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki, Novosibirsk, (2010), 102-109, (in Russian).

[20] O.S. Zikirov, D.K. Kholikov, *On some problem for a loaded pseudoparabolic equation of the third order*, Mat. Zamet. SVFU, **23**:2 (2016), 19–30. Zbl 1399.35254

[21] D.K.Kholikov, *On On one loaded partial-differential equation of the third order*, Neklasicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki, Novosibirsk, (2012), 292-299, (in Russian).

Obidjan Salijanovich Zikirov, Dilshod Kamolovich Kholikov
National University of Uzbekistan,
4, Universitetskaya str.,
Tashkent, 100174, Uzbekistan
E-mail address: zikirov@yandex.ru, xoliqov23@mail.ru