S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1319–1331 (2021) УДК 517.518.112
DOI 10.33048/semi.2021.18.101 MSC 28A75

Special issue: International S.B. Stechkin's Workshop-Conference
on Function Theory (Russia, Altai Republic, August 9–19, 2021)

ЗАДАЧА О МЕРЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ ОТРЕЗКОВ НА ПЛОСКОСТИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА МНОЖЕСТВО ИХ КОНЦОВ

А.Е. ЛИПИН

Abstract. Some time ago M.A. Patrakeev asked the following question. Let A and B be zero-measure subsets of the unit segment. Let φ be bijection between A and B. Denote by $S(A,B,\varphi)$ the union of all segments in the plane with the endpoints $(a,0)$ and $(\varphi(a),1)$ for some $a\in A$. The question is what the measure of the set $S(A,B,\varphi)$. We answer this question.

Keywords: measure, plane.

1. Введение

В 2019 году на семинаре отдела топологии Института математики и механики УрО РАН М.А. Патракеев задал следующий вопрос.

В единичном отрезке выбираются равномощные множества A и B меры нуль. Между A и B устанавливается произвольная биекция φ. Далее для каждого $a\in A$ на плоскости проводится отрезок с концами $(a,0)$ и $(\varphi(a),1)$. Объединение всех таких отрезков обозначается $S(A,B,\varphi)$. Какую меру может иметь множество $S(A,B,\varphi)$?

Lipin, A.E., The problem on the measure of the union of line segments in the plane with restrictions on the set of their ends.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Поступила 7 ноября 2021 г., опубликована 23 ноября 2021 г.

Вопрос косвенным образом происходит из классической задачи Какея об иголке [1], подробнее об этом см. раздел 2.

Основная цель работы состоит в доказательстве следующих двух утверждений.

Теорема 1. *Существуют множества* $A, B \subseteq [0,1]$ *меры нуль и биекция* $\varphi : A \leftrightarrow B$ *такие, что множество* $S(A,B,\varphi)$ *содержит открытый единичный квадрат* $]0,1[\times]0,1[$.

Теорема 2. *Для любых чисел* $0 \le m_* \le m^* \le 1$ *существуют множества* $A, B \subseteq [0,1]$ *меры нуль и биекция* $\varphi : A \leftrightarrow B$ *такие, что* $\mu_* S(A,B,\varphi) = m_*$ *и* $\mu^* S(A,B,\varphi) = m^*$.

Здесь μ_* и μ^* обозначаются внутренняя и внешняя меры Лебега на плоскости соответственно.

Кратко обрисуем схему зависимостей между разделами статьи. В разделе 3 мы введем обозначения общего характера, а в разделе 4 договоримся о терминологии, которая используется в разделах 5-7. Разделы 5, 6 и 7 посвящены доказательству ключевых лемм 1, 5 и 7 соответственно, при этом доказательство леммы 5 опирается на лемму 1. Наконец, в разделе 8 мы выведем из лемм 5 и 7 заявленные теоремы.

2. Исторические сведения

Задача об иголке, сформулированная С. Какея в 1917 году, состоит в определении минимальной площади плоской фигуры, в которой единичный отрезок ("иголку") можно развернуть на 180 градусов, вернув при этом в исходное положение.

Изначально речь шла только о выпуклых фигурах, и в этой формулировке проблему решил в 1920 году Д. Пал: искомый минимум равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а пример, на котором он достигается — правильный треугольник высоты 1 [2]. Без условия выпуклости задача была решена в 1928 году А. Безиковичем: выяснилось, что площадь такой фигуры может быть сколь угодно мала [3].

Ключевую роль в доказательстве Безиковича играет построенное им компактное множество нулевой меры, содержащее единичный отрезок в любом направлении. Множества с такими свойствами (обычно за исключением свойства иметь меру нуль) теперь называют множествами Безиковича.

Вариации и обобщения задачи об иголке исследуются по сей день. Интересен вопрос Какея при дополнительных условиях на плоскую фигуру. В частности, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ иголку можно развернуть:

- внутри фигуры площади меньше ε, и при этом находящейся в круге радиуса $2+\varepsilon$ (Х. Дж. Ван Альфен, 1941 [4]);
- внутри односвязной фигуры площади меньше $\frac{\pi}{108}+\varepsilon$, содержащейся в круге радиуса 1 (Ф. Каннингем, 1971 [5]).

В 1971 году Р. Дэвис доказал, что всякое множество Безиковича на плоскости имеет хаусдорфову размерность 2 [6]. До сих пор неизвестно, верно ли естественное обобщение этого факта, то есть гипотеза, что для всякого натурального n любое множество Безиковича в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет хаусдорфову размерность n. Эта гипотеза известна как гипотеза Какея. В 1995 году Т. Вольфф показал [7], что для всех $n > 1$ размерность множества Безиковича в $\mathbb{R}^n$ не меньше, чем $\frac{n}{2}+1$. В 2002 году Н. Кац и Т. Тао доказали [8] оценку $(2-\sqrt{2})(n-4)+3$, которая лучше при $n \geq 5$. Наконец, уже в 2019 году Кац и Дж. Зал доказали [9] существование $\varepsilon > 0$ такого, что любое множество Безиковича в $\mathbb{R}^3$ имеет хаусдорфову размерность не менее $\frac{5}{2}+\varepsilon$.

Остается нерешенным вопрос о существовании в $\mathbb{R}^n$ компактного множества нулевой меры, которое для каждого k-мерного подпространства содержит параллельный этому подпространству k-мерный единичный диск. В 1997 году Дж. Бургейн доказал [10], что при $2^{k-1}+k > n$ такого множества не существует. Примеры таких множеств при $k > 1$ неизвестны.

Конструкция множества Безиковича неожиданным образом нашла применение в гармоническом анализе: в 1971 году Ч.Л. Фефферман, используя ее, доказал, что в пространстве размерности более 1 усеченные интегралы Фурье, взятые по шарам с центром в начале координат с радиусами, стремящимися к бесконечности, могут не сходиться по норме L^p при $p \neq 2$ (тогда как в одномерном случае такие интегралы сходятся) [11].

Следует упомянуть еще один пример множества, парадоксального в смысле меры и иногда упоминаемого вместе с множеством Безиковича. Подмножество N единичного квадрата называется множеством Никодима, если площадь N равна 1 и для каждой точки $x \in N$ существует прямая l такая, что $N \cap l = \{x\}$. Существование множества с этим свойством было доказано в 1927 году О. Никодимом. Удивительное следствие: на плоскости существует такое семейство открытых лучей, что мера его объединения равна нулю, но множество начал лучей этого семейства имеет полную меру [12][С. 67].

Множество $S(A, B, \varphi) \subseteq [0,1] \times [0,1]$, которое мы строим в этой работе, тоже представляется автору парадоксальным: оно мало в том смысле, что покрывается семейством отрезков с обозначенным во втором абзаце введения ограничением, но в смысле меры его можно сделать любым, и даже полностью заполняющим открытый единичный квадрат.

3. Основные обозначения

- $:=$ — равно по определению;
- ω — множество целых неотрицательных чисел;
- $[x, y]$ — отрезок с концами x и y. При этом может идти речь об отрезке как на прямой, так и на плоскости;
- $]a, b[$ — интервал с концами a и b. Обозначение используется во избежание путаницы с упорядоченной парой (a, b);
- $(a_i : i \in I)$ — определенное на I отображение, которое каждому $i \in I$ ставит в соответствие a_i. Обозначаемые так отображения мы будем называть *индексированностями*;
- $2^{<\omega}$ — множество всех конечных слов над алфавитом $\{0,1\}$;
- 2^{ω} — множество последовательностей над алфавитом $\{0,1\}$;
- пустое слово отождествляется с пустым множеством $\emptyset$;
- для всякого слова $u \in 2^{<\omega}$ и любого символа $c \in \{0,1\}$ слово, которое получается приписыванием к слову u справа символа c, обозначается uc;
- $u \preceq v$ — слово u есть начало слова $v \in 2^{<\omega}$ или последовательности $v \in 2^{\omega}$;
- $|u|$ — длина слова u;

- μ — мера Лебега на плоскости;
- μ_*, μ^* — внутренняя и внешняя мера Лебега на плоскости соответственно;
- $\mathrm{len}(I)$ — длина промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$;
- $|A|$, $\#A$ — мощность множества A;
- $\mathfrak{c}$ — кардинал континуум. Отождествляется с множеством меньших ординалов;
- Если f — функция, определенная на множестве A, то $f[A]$ обозначается множество $\{f(a) : a \in A\}$.

4. Деревья и ε-канторовы множества

Следующее определение можно найти, например, в [13][с. 114].

Определение 1. *Частично упорядоченное множество $(T, \leq)$ называется деревом, если содержит наименьший элемент и для всякого $x \in T$ множество $\{y \in T : y < x\}$ вполне упорядочено отношением $\leq$.*

Как правило мы будем вместо записи $(T, \leq)$ использовать формально некорректное обозначение T, подразумевая, что порядок на T фиксирован либо неважен.

К деревьям в нашем смысле применяется почти та же терминология, что и к направленным деревьям в теории графов. В частности:

Определение 2. *Пусть T — дерево.*

- *Максимальные по включению цепи в дереве называются его ветвями.*
- *Элементы множества T называются вершинами дерева T.*
- *Вершина y называется сыном вершины x, если $x < y$ и не существует вершины z, для которой было бы верно $x < z < y$.*
- *Вершина, не имеющая сыновей, называется листом.*
- *Вершина, имеющая более одного сына, называется ветвлением.*
- *Если вершина x такова, что никакая вершина $y \geq x$ не является ветвлением, то говорят, что x — атом.*
- *Множество $E \subseteq T$ называется плотным в T, если для всякого $x \in T$ существует $y \in E$ такое, что $y \geq x$.*

В этой работе будут возникать только деревья, порядковый тип ветвей которых не превосходит ω. Для нас деревья интересны прежде всего как удобное множество индексов для схем множеств.

Определение 3. *Пусть T — дерево. Индексированность $(H_x : x \in T)$ называется схемой множеств, если для всяких вершин $x, y \in T$:*

- *если $x \leq y$, то $H_x \supseteq H_y$;*
- *если же x и y несравнимы в смысле порядка $\leq$, то $H_x \cap H_y = \emptyset$.*

Если к тому же $(T, \leq) = (2^{<\omega}, \preceq)$, то схема множеств $(H_x : x \in T)$ называется канторовой.

Определение канторовой схемы также можно найти в [14][с. 31].

Остаток раздела посвящен определению ε-канторова множества. Мы делаем это настолько подробно лишь потому, что нам необходимо зафиксировать обозначения. Читатель, желающий сначала получить неформальное объяснение, может составить полное представление о понятии ε-канторова множества из предпоследнего предложения этого раздела.

Определение 4. *Пусть* $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon < 1$. *Обозначим* $l_\varepsilon(I)$ *и* $r_\varepsilon(I)$ *точки, делящие отрезок* I *на три части в отношении* $\frac{1-\varepsilon}{2} : \varepsilon : \frac{1-\varepsilon}{2}$, *то есть* $l_\varepsilon(I) := \frac{a+b}{2} - \frac{\varepsilon}{2}(b-a)$ *и* $r_\varepsilon(I) := \frac{a+b}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(b-a)$. *Промежутки, на которые отрезок* I *делится точками* $l_\varepsilon(I)$ *и* $r_\varepsilon(I)$, *обозначим следующим образом:*

- $L_\varepsilon(I) := [a, l_\varepsilon(I)]$;
- $M_\varepsilon(I) :=]l_\varepsilon(I), r_\varepsilon(I)[$;
- $R_\varepsilon(I) := [r_\varepsilon(I), b]$.

Определение 5. *Пусть* I — *отрезок в* $\mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon < 1$. *Для всякого* $u \in 2^{<\omega}$ *определим отрезок* $(I,u)_\varepsilon$ *с помощью индукции по* u.

База индукции: $(I, \emptyset)_\varepsilon := I$.

Шаг индукции: $(I, u0)_\varepsilon := L_\varepsilon((I,u)_\varepsilon)$ *и* $(I, u1)_\varepsilon := R_\varepsilon((I,u)_\varepsilon)$.

Отметим, что при любых отрезке I и $0 < \varepsilon < 1$ индексированность $((I,u)_\varepsilon : u \in 2^{<\omega})$ есть канторова схема множеств.

Определение 6. *Пусть* I — *отрезок в* $\mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon < 1$.

Положим $K_\varepsilon(I) := \bigsqcup_{s \in 2^\omega} \bigcap_{u \preceq s} (I,u)_\varepsilon$.

Множество $K_\varepsilon(I)$ *назовем* ε*-канторовым множеством, построенным на отрезке* I.

В частности, $\frac{1}{3}$-канторово множество, построенное на отрезке $[0,1]$, есть обычное канторово множество [14].

Легко видеть, что каковы бы ни были число $\varepsilon > 0$ и отрезок $I \subseteq \mathbb{R}$, мера множества $K_\varepsilon(I)$ равна нулю.

5. Лемма о пересечении ε-канторовых множеств

Здесь наша цель состоит в доказательстве следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть:*

- $0 < \varepsilon \leq 3 - 2\sqrt{2}$;
- I, J — *пересекающиеся отрезки вещественной прямой;*
- $\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \frac{\mathrm{len}(J)}{\mathrm{len}(I)} \leq 1$;
- *для всяких слов* $u, v \in 2^{<\omega}$ *если* $|u| = |v|$, *то* $|(I,u)_\varepsilon \cap (J,v)_\varepsilon| \neq 1$.

Тогда $|K_\varepsilon(I) \cap K_\varepsilon(J)| = \mathfrak{c}$.

Основным инструментом в доказательстве станет следующий род деревьев.

Определение 7. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$; I, J — *пересекающиеся отрезки вещественной прямой.*

Положим $T_\varepsilon(I,J) := \{(u,v) \in 2^{<\omega} \times 2^{<\omega} : |u| = |v|, (I,u)_\varepsilon \cap (J,v)_\varepsilon \neq \emptyset\}$.

На множестве $T_\varepsilon(I,J)$ *зафиксируем следующий порядок:* *для всяких* $(u,v), (u',v') \in T_\varepsilon(I,J)$ *будем полагать, что* $(u,v) \leq (u',v')$, *если и только если* $u \preceq u'$ *и* $v \preceq v'$.

В верности следующего утверждения легко убедиться.

Предложение 1. *Если* L — *бесконечная ветвь в дереве* $T_\varepsilon(I,J)$, *то* $\bigcap_{(u,v) \in L} ((I,u)_\varepsilon \cap (J,v)_\varepsilon)$ *есть одноточечное подмножество в* $K_\varepsilon(I) \cap K_\varepsilon(J)$. *При этом для разных ветвей эти подмножества разные.*

Следовательно, для доказательства леммы 1 достаточно показать, что при обозначенных в ней условиях дерево $T_\varepsilon(I, J)$ имеет континуум бесконечных ветвей. Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что дерево $T_\varepsilon(I, J)$ не имеет листьев, а множество ветвлений в нем плотно. Этим мы и займемся.

Лемма 2. *Пусть:*

- $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{3}$*;*
- I, J *— пересекающиеся отрезки вещественной прямой;*
- $\varepsilon \leq \frac{\mathrm{len}(J)}{\mathrm{len}(I)} \leq 1$.

Тогда дерево $T_\varepsilon(I, J)$ *не имеет листьев.*

Доказательство. От противного: некоторая вершина $(u, v) \in T_\varepsilon(I, J)$ оказалась листом. По определению дерева $T_\varepsilon(I, J)$ это означает, что:

- отрезки $(I, u)_\varepsilon$ и $(J, v)_\varepsilon$ пересекаются;
- никакой из отрезков $(I, u0)_\varepsilon$, $(I, u1)_\varepsilon$ не пересекает никакой из отрезков $(J, v0)_\varepsilon$, $(J, v1)_\varepsilon$.

Так как $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$, то для всякого отрезка $I' \subseteq \mathbb{R}$ верно $\mathrm{len}(M_\varepsilon(I')) \leq \mathrm{len}(L_\varepsilon(I')) = \mathrm{len}(R_\varepsilon(I'))$. Тогда, так как $|u| = |v|$ и $\mathrm{len}(J) \leq \mathrm{len}(I)$, то $\mathrm{len}(M_\varepsilon(J, v)) \leq \mathrm{len}(J, v0)_\varepsilon = \mathrm{len}(J, v1)_\varepsilon \leq \mathrm{len}(I, u0)_\varepsilon$.

Это значит, что отрезки $(J, v0)_\varepsilon$ и $(J, v1)_\varepsilon$ не могут лежать по разные стороны от какого-либо из $(I, u0)_\varepsilon$, $(I, u1)_\varepsilon$, а следовательно, отрезок $(J, v)_\varepsilon$ содержится в каком-то из трех открытых промежутков, на которые отрезки $(I, u0)_\varepsilon$ и $(I, u1)_\varepsilon$ разбивают вещественную прямую. При этом содержаться в $M_\varepsilon(I, u)_\varepsilon$ он не может, поскольку $\mathrm{len}(J, v)_\varepsilon \geq \varepsilon \cdot \mathrm{len}(I, u)_\varepsilon = \mathrm{len}(M_\varepsilon(I, u)_\varepsilon)$.

Получается, отрезок $(J, v)_\varepsilon$ лежит в дополнении к $(I, u)_\varepsilon$ — а мы предполагали, что они пересекаются. Противоречие. $\square$

Теперь от доказательства леммы 1 нас отделяет лишь пара довольно технических утверждений.

Будем говорить, что отрезок I *лежит левее* отрезка J, если $\max(I) < \min(J)$. Соответственно, отрезок I *лежит правее* отрезка J, если $\max(J) < \min(I)$.

Лемма 3. *Пусть:*

- $0 < \varepsilon < 1$*;*
- I, J *— пересекающиеся отрезки вещественной прямой;*
- $\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \frac{\mathrm{len}(J)}{\mathrm{len}(I)} \leq 1$*;*
- *вершина* (u, v) *в дереве* $T_\varepsilon(I, J)$ *имеет не более одного сына.*

Тогда либо $(J, v0)_\varepsilon$ *лежит левее* $(I, u)_\varepsilon$*, либо* $(J, v1)_\varepsilon$ *лежит правее* $(I, u)_\varepsilon$.

Доказательство. От противного.

Заметим, что если бы отрезок $(J, v0)_\varepsilon$ лежал правее $(I, u)_\varepsilon$, отрезки $(J, v)_\varepsilon$ и $(I, u)_\varepsilon$ не пересекались бы вовсе. Значит, отрезки $(J, v0)_\varepsilon$ и $(I, u)_\varepsilon$ пересекаются. Тогда либо $(J, v0)_\varepsilon$ содержится в $M_\varepsilon(I, u)_\varepsilon$, либо пересекает какой-то из отрезков $(I, u0)_\varepsilon$, $(I, u1)_\varepsilon$. Покажем, что первый случай невозможен.

Поскольку $|u| = |v|$, то $\frac{\mathrm{len}(J,v)_\varepsilon}{\mathrm{len}(I,u)_\varepsilon} = \frac{\mathrm{len}(J)}{\mathrm{len}(I)}$. Тогда $\frac{\mathrm{len}(J,v0)_\varepsilon}{\mathrm{len}(M_\varepsilon(I,u)_\varepsilon)} = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \cdot \frac{\mathrm{len}(J,v)_\varepsilon}{\mathrm{len}(I,u)_\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \cdot \frac{\mathrm{len}(J)}{\mathrm{len}(I)} \geq 1$, то есть отрезок $(J, v0)_\varepsilon$ не короче, чем интервал $M_\varepsilon(I, u)_\varepsilon$, и не может в нем содержаться.

Аналогично показывается, что отрезок $(J, v1)_\varepsilon$ пересекает какой-то из отрезков $(I, u0)_\varepsilon$, $(I, u1)_\varepsilon$.

Это значит, что вершина (u, v) в дереве $T_\varepsilon(I, J)$ имеет не менее двух сыновей: сына вида $(uc_0, v0)$ и сына вида $(uc_1, v1)$, где $c_0, c_1 \in \{0, 1\}$. Противоречие. □

Лемма 4. *Пусть:*

- $0 < \varepsilon \leq 3 - 2\sqrt{2}$*;*
- I, J *— пересекающиеся отрезки вещественной прямой;*
- $\frac{\text{len}(J)}{\text{len}(I)} \leq 1$*;*
- (u, v) *— атом в дереве* $T_\varepsilon(I, J)$*.*

Тогда:

- *если* $(J, v0)_\varepsilon$ *лежит левее* $(I, u)_\varepsilon$*, то* $(u0, v1) \in T_\varepsilon(I, J)$ *и отрезок* $(J, v10)_\varepsilon$ *лежит левее* $(I, u)_\varepsilon$*;*
- *если* $(J, v1)_\varepsilon$ *лежит правее* $(I, u)_\varepsilon$*, то* $(u1, v0) \in T_\varepsilon(I, J)$ *и отрезок* $(J, v01)_\varepsilon$ *лежит правее* $(I, u)_\varepsilon$*.*

Доказательство. Пусть $(J, v0)_\varepsilon$ лежит левее $(I, u)_\varepsilon$.

Поскольку отрезок $(I, u0)_\varepsilon$ не короче интервала $M_\varepsilon(J, v)_\varepsilon$, а отрезки $(I, u)_\varepsilon$ и $(J, v)_\varepsilon$ пересекаются, то пересекаются также и отрезки $(I, u0)_\varepsilon$ и $(J, v1)_\varepsilon$.

Таким образом, дерево $T_\varepsilon(I, J)$ содержит вершину $(u0, v1)$. Будучи сыном атома, эта вершина сама является атомом. Тогда по лемме 3 либо $(J, v10)_\varepsilon$ лежит левее $(I, u0)_\varepsilon$, либо $(J, v11)_\varepsilon$ лежит правее $(I, u0)_\varepsilon$. В первом случае доказательство завершено. Предположим, имеет место второй.

Получается, что отрезок $(I, u0)_\varepsilon$ лежит между $(J, v0)_\varepsilon$ и $(J, v11)_\varepsilon$, то есть содержится в объединении промежутков $M_\varepsilon(J, v)_\varepsilon$, $(J, v10)_\varepsilon$ и $M_\varepsilon(J, v1)_\varepsilon$. Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\text{len}(M_\varepsilon(J, v)_\varepsilon) + \text{len}(J, v10)_\varepsilon + \text{len}(M_\varepsilon(J, v1)_\varepsilon) > \text{len}(I, u0)_\varepsilon.$$

Или, что то же самое:

$$\left(\varepsilon + \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^2 + \varepsilon\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\text{len}\,(J, v)_\varepsilon > \frac{1-\varepsilon}{2}\text{len}\,(I, u)_\varepsilon\,.$$

Так как $\frac{\text{len}(J,v)_\varepsilon}{\text{len}(I,u)_\varepsilon} = \frac{\text{len}(J)}{\text{len}(I)} \leq 1$, то

$$\varepsilon + \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^2 + \varepsilon\frac{1-\varepsilon}{2} > \frac{1-\varepsilon}{2}.$$

Что после упрощения превращается в неравенство $\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1 < 0$. Решив его, получаем $3 - 2\sqrt{2} < \varepsilon < 3 + 2\sqrt{2}$, что противоречит посылке леммы.

Второй пункт разбирается аналогично. □

Отметим, что условия лемм 2, 3 и 4 более слабые, чем условие леммы 1.

Доказательство леммы 1. Достаточно доказать, что множество ветвлений дерева $T_\varepsilon(I, J)$ плотно — или, что то же самое, что дерево $T_\varepsilon(I, J)$ не содержит атомов. Предположим обратное: (u, v) есть атом в $T_\varepsilon(I, J)$. Мы покажем, что $|(I, u)_\varepsilon \cap (J, v)_\varepsilon| = 1$, что и будет противоречием.

Для каждого $c \in \{0, 1\}$ обозначим c^n строку длины n, все символы которой равны c.

По лемме 3 либо $(J,v0)_\varepsilon$ лежит левее $(I,u)_\varepsilon$, либо $(J,v1)_\varepsilon$ лежит правее $(I,u)_\varepsilon$. Без ограничения общности предположим первое. С помощью индукции по $n \in \omega$ докажем, что все отрезки вида $(J,v1^n0)_\varepsilon$ лежат левее $(I,u)_\varepsilon$. База индукции у нас уже есть, а шаг индукции это в точности лемма 4.

Обозначим a единственную точку множества $\bigcap_{n\in\omega}(J,v1^n)_\varepsilon$ и заметим, что $(J,v)_\varepsilon = \bigsqcup_{n\in\omega}(J,v1^n0)_\varepsilon \sqcup \{a\}$. Мы показали, что отрезки вида $(J,v1^n0)_\varepsilon$ не пересекаются с $(I,u)_\varepsilon$, при этом по условию $(J,v)_\varepsilon \cap (I,u)_\varepsilon \neq \emptyset$. Остается заключить, что $(J,v)_\varepsilon \cap (I,u)_\varepsilon = \{a\}$, то есть пересечение одноточечно. Противоречие. $\square$

6. Множество с замечательным свойством

Определение 8. *Пусть $A \subseteq [0,1]$. Для всякой точки $p \in]0,1[\times]0,1[$ положим $s(A,p) := \#\{(a,b) \in A\times A : p \in [(a,0),(b,1)]\}$.*
Обозначим $Q(A) := \{p \in]0,1[\times]0,1[: s(A,p) = \mathfrak{c}\}$.

Определение 9. *Будем говорить, что множество $W \subseteq [0,1]$ обладает замечательным свойством, если мера W равна нулю и $Q(W) =]0,1[\times]0,1[$.*

Цель этого раздела состоит в доказательстве следующего утверждения.

Лемма 5. *Множество с замечательным свойством существует.*

Доказательство большей частью сводится к следующей лемме.

Лемма 6. *Пусть $0 < \varepsilon \le 3 - 2\sqrt{2}$. Тогда разность множеств $[0,1]\times[\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1 - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}] \setminus Q(K_\varepsilon[0,1])$ покрывается счетным числом не горизонтальных отрезков.*

Доказательство. В силу симметрии достаточно вместо отрезка $[\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}]$ рассмотреть его половину $[\frac{1}{2}, 1-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}]$. Итак, пусть $x \in [0,1]$, $y \in [\frac{1}{2}, 1-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}]$ и $p = (x,y)$.

Обозначим g гомотетию с центром в точке p, переводящую прямую $\mathbb{R}\times\{0\}$ в прямую $\mathbb{R}\times\{1\}$. Заметим, что для всяких $a,b \in \mathbb{R}$ условия $p \in [(a,0),(b,1)]$ и $(b,1) = g(a,0)$ эквивалентны. Введем функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так, что для всякого $a \in \mathbb{R}$ имеет место $(f(a),1) = g(a,0)$. Легко видеть, что f тоже гомотетия, только на $\mathbb{R}$.

Обозначим $I := [0,1]$, $J := f[I]$. Легко видеть, что $f[K_\varepsilon(I)] = K_\varepsilon(J)$.

Если теперь окажется, что $|K_\varepsilon(I) \cap K_\varepsilon(J)| = \mathfrak{c}$, то по выше сказанному из этого будет следовать, что $s(K_\varepsilon(I), p) = \mathfrak{c}$, что нам и нужно. Равенство $|K_\varepsilon(I) \cap K_\varepsilon(J)| = \mathfrak{c}$, в свою очередь, будет иметь место, если мы окажемся в условиях леммы 1. Проверим, попадаем ли мы в эти условия.

Неравенство $0 < \varepsilon \le 3 - 2\sqrt{2}$ нам дано. То, что $I \cap J \neq \emptyset$, очевидно. Проверим третье условие. Легко видеть, что коэффициент гомотетии f равен $\frac{y-1}{y}$. Тогда $\frac{\mathrm{len}(J)}{\mathrm{len}(I)} = \left|\frac{y-1}{y}\right| = \frac{1-y}{y}$ и учитывая, что $\frac{1}{2} \le y \le 1 - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$, легко убедиться, что соотношение $\frac{\mathrm{len}(J)}{\mathrm{len}(I)}$ попадает в нужный промежуток. Остается проверить только четвертое условие: имеет ли место для всяких равнодлинных слов $u, v \in 2^{<\omega}$ утверждение $|(I,u)_\varepsilon \cap (J,v)_\varepsilon| \neq 1$?

Так как число всевозможных пар элементов $2^{<\omega}$ счетно, то достаточно для каждой пары $u,v \in 2^{<\omega}$ показать, что множество тех точек $p \in [0,1]\times[\frac{1}{2}, 1-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}]$, для которых $|(I,u)_\varepsilon \cap (J,v)_\varepsilon| = 1$, покрывается счетным числом отрезков. Без ограничения общности будем рассматривать случай, когда правый конец отрезка $(I,u)_\varepsilon$ совпал с левым концом отрезка $(J,v)_\varepsilon$.

Заметим, что расположение правого конца b отрезка $(I,u)_\varepsilon$ от точки p не зависит, а левый конец отрезка $(J,v)_\varepsilon$ есть образ при гомотетии f некоторой точки $a \in [0,1]$, общей для всех p. Нас интересует, когда $f(a) = b$. Центр гомотетии f равен x, коэффициент $\frac{y-1}{y}$. Тогда $f(a) = x + \frac{y-1}{y}(a-x)$. Получаем уравнение $b = x + \frac{y-1}{y}(a-x)$, эквивалентное $x + (a-b)y = a$. Множество таких точек (x,y) в интересующей нас полосе $[\frac{1}{2}, 1 - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}]$ является отрезком, и этот отрезок не горизонтален. □

Следствие 1. *Для всякого счетного множества* $C \subseteq]0,1[$ *такого, что точка* 0 *предельна для* C, *дополнение множества* $Q(\bigcup_{\varepsilon \in C} K_\varepsilon[0,1])$ *в* $]0,1[\times]0,1[$ *покрывается счетным числом не горизонтальных отрезков.*

Следующее утверждение легко проверяется по определению Q.

Предложение 2. *Пусть* $A \subseteq [0,1]$, $a \in]0,1[$ *и* $B = \{ax : x \in A\}$. *Тогда* $Q(B) = \{(ax,y) : (x,y) \in Q(A)\}$.

Доказательство леммы 5. Обозначим $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\frac{1}{n}}[0,1]$. По следствию 1 можно выбрать счетный набор не горизонтальных отрезков $[p_n, q_n] \subseteq]0,1[\times]0,1[$, покрывающий дополнение $Q(A)$ в $]0,1[\times]0,1[$.

Для всякого $a \in]0,1[$ и любой точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ положим $h_a(x,y) = (ax,y)$. Для каждого отрезка $[p_n,q_n]$ выберем такой коэффициент $a_n \in]0,1[$, что при отображении h_{a_n} все точки прообраза $[p_n,q_n]$, быть может, кроме счетного их числа, лежат в $Q(A)$. Положим $B := A \cup \bigcup_{n\in\omega} h_{a_n}[A]$. Так как каждое из множеств A и $h_{a_n}[A]$ имеет меру нуль, то и мера множества B равна нулю, при этом дополнение множества $Q(B)$ в $]0,1[\times]0,1[$ счетное.

Наконец, для каждой точки $r_n, n \in \omega$ дополнения $Q(B)$ в $]0,1[\times]0,1[$ выберем подходящую пару ε-канторовых множеств $K_n, L_n \subseteq [0,1]$ такую, что множество $K_n \times \{0\}$ переводится в $L_n \times \{1\}$ некоторой гомотетией плоскости с центром в точке r_n, и возьмем $W := B \cup \bigcup_{n\in\omega} K_n \cup \bigcup_{n\in\omega} L_n$. Легко видеть, что множество W обладает замечательным свойством. □

Отметим, что построенное нами множество с замечательным свойством является счетным объединением ε-канторовых множеств.

7. Лемма о внутренней мере объединения прямых

Здесь наша цель состоит в доказательстве следующего утверждения.

Лемма 7. *Объединение менее, чем континуума прямых в плоскости имеет внутреннюю меру нуль.*

Ключевым для доказательства является следующее понятие.

Определение 10. *Дизъюнктное семейство* $\mathcal{S}$ *подмножеств плоскости будем называть свободным, если никакая прямая не пересекает более двух элементов* $\mathcal{S}$. *Множество* $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *будем называть свободным, если свободно семейство* $\{\{p\} : p \in X\}$.

Следующие два утверждения почти очевидны, но их взаимодействие порождает любопытные результаты.

Предложение 3. *Пусть* X — *конечное свободное множество. Тогда каждой точке* $p \in X$ *можно назначить замкнутую окрестность* $\overline{O(p)}$ *таким образом, что все* $\overline{O(p)}$ *различны и семейство* $\{\overline{O(p)} : p \in X\}$ *свободное.*

Доказательство. Случай, когда $|X| \leq 3$, тривиален. Пусть $|X| > 3$.

Обозначим $\mathcal{H} := \{E \subseteq X : |E| = 3\}$. Так как никакие три точки множества X не лежат на одной прямой, то для каждой тройки $E \in \mathcal{H}$ точкам $p \in E$ можно назначить замкнутые окрестности $\overline{O_E(p)}$ такие, что каждое семейство $\{\overline{O_E(p)} : p \in E\}$ свободно и все $\overline{O_E(p)}$ различны. Положим $\overline{O(p)} := \bigcap_{p \in E \in \mathcal{H}} \overline{O_E(p)}$. Легко видеть, что окрестности $\overline{O(p)}$ искомые. □

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{S}$ — конечное дизъюнктное семейство, никакой элемент которого не покрывается конечным числом прямых. Тогда существует свободное множество $Y \subseteq \bigsqcup \mathcal{S}$ такое, что для каждого $X \in \mathcal{S}$ верно $|X \cap Y| = 2$.*

Доказательство. Заметим, что для всякого конечного свободного множества $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ и любого элемента $X \in \mathcal{S}$ найдется точка $p \in X \setminus Z$ такая, что множество $Z \cup \{p\}$ тоже свободно: иначе множество X покрывалось бы семейством прямых, проходящих через пары точек множества Z, а это семейство конечно. Таким образом, искомое множество Y легко строится по индукции: берем пустое множество и в любом порядке присоединяем к нему по две точки из каждого $X \in \mathcal{S}$, сохраняя свойство свободности. □

Следующие определение и предложение несколько упростят наши дальнейшие рассуждения.

Определение 11. *Для всякого множества $X \subseteq \mathbb{R}^2$ обозначим X^+ множество всех таких точек $p \in X$, что для любой окрестности $O(p) \ni p$ множество $X \cap O(p)$ не покрывается счетным числом прямых.*

Предложение 5. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^2$.*

(1) *Если множество X замкнуто, то X^+ тоже замкнуто;*
(2) *$(X^+)^+ = X^+$;*
(3) *Если множество X не покрывается счетным числом прямых, то $X^+ \neq \emptyset$.*

Доказательство. (1) Пусть точка p предельна для X^+. Так как $X^+ \subseteq X$ и X замкнуто, то $p \in X$. Возьмем произвольную окрестность $O(p)$ точки p. Множество $O(p)$ является окрестностью и для какой-то точки $q \in X^+$, и тогда множество $X \cap O(p)$ не покрывается счетным числом прямых.

(2) Всякой точке $p \in X \setminus X^+$ сопоставим какую-нибудь ее окрестность $O(p)$, для которой оказалось, что множество $X \cap O(p)$ покрывается счетным числом прямых. Положим $U := \bigcup_{p \in X \setminus X^+} O(p)$. Так как пространство $\mathbb{R}^2$ наследственно линделёфово [15][с. 290], то найдется счетное множество $C \subseteq X \setminus X^+$ такое, что $U = \bigcup_{p \in C} O(p)$. Тогда множество $X \cap U$ покрывается счетным числом прямых. Следовательно, множество $X \setminus X^+ \subseteq X \cap U$ тоже покрывается счетным числом прямых.

Тогда для всякого множества $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ если Y не покрывается счетным числом прямых, то и $Y \setminus (X \setminus X^+)$ не покрывается счетным числом прямых. Отсюда с очевидностью следует равенство $(X^+)^+ = X^+$.

(3) Очевидно следует из наследственной линделёфовости плоскости. □

Подготовительная работа на этом закончена.

Лемма 8. *Пусть F — замкнутое подмножество плоскости, не покрывающееся счетным числом прямых. Тогда существует континуальное свободное множество $G \subseteq F$.*

Доказательство. Мы построим канторову схему $(H_u : u \in 2^{<\omega})$ замкнутых подмножеств F^+ так, что никакое множество H_u не будет покрываться счетным числом прямых, и для каждого $n \in \omega$ семейство $\{H_u : |u| = n\}$ окажется свободным.

Возьмем $H_\emptyset := F^+$ и далее будем действовать индукцией по $|u|$.

Пусть для некоторого $n \in \omega$ уже определены все множества H_u при $|u| = n$. Применив к семейству $\{H_u : |u| = n\}$ предложение 4, получим свободное множество $Y = \{p_{u0}, p_{u1} : |u| = n\}$ такое, что $p_{u0}, p_{u1} \in H_u$ и $p_{u0} \neq p_{u1}$. Согласно предложению 3 точкам $p \in Y$ можно назначить попарно различные замкнутые окрестности $\overline{O(p)}$ таким образом, что семейство $\{\overline{O(p)} : p \in Y\}$ свободно. Для каждого слова u длины $n+1$ положим $H_u := F^+ \cap \overline{O(p_u)}$. Легко видеть, что все условия выполнены.

Теперь каждой последовательности $s \in 2^\omega$ сопоставим произвольную точку p_s множества $\bigcap_{u \preceq s} H_u$. Покажем, что множество $G := \{p_s : s \in 2^\omega\}$ искомое. То, что G континуально и содержится в F, очевидно. Убедимся, что множество G свободно.

Возьмем любые три различные точки $p, q, r \in G$. Существует номер $n \in \omega$, для которого эти точки попали в три попарно различных множества H_u, H_v, H_w при $|u| = |v| = |w| = n$. Тогда, поскольку семейство $\{H_{u'} : |u'| = n\}$ свободно, точки p, q и r не могут лежать на одной прямой. $\square$

Доказательство леммы 7. Пусть множество $X \subseteq \mathbb{R}^2$ имеет ненулевую внутреннюю меру. Это значит, что существует замкнутое множество $F \subseteq X$ положительной меры. Такое множество F не может покрываться счетным числом прямых. По лемме 8 найдется континуальное свободное множество $G \subseteq F$. Поскольку каждая прямая пересекает множество G не более, чем по двум точкам, то множество G не может быть покрыто менее, чем континуальным семейством прямых. $\square$

8. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Обозначим W произвольное множество с замечательным свойством. Упорядочим квадрат $]0,1[\times]0,1[$ в произвольную последовательность порядкового типа континуум $(p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c})$. Далее мы будем действовать трансфинитной индукцией по $\alpha \in \mathfrak{c}$, на каждом шагу выбирая точки $a_\alpha, b_\alpha \in W$.

Шаг индукции. По определению замечательного свойства через точку p_α проходит континуум разных отрезков с концами вида $(a, 0), (b, 1)$ при $a, b \in W$. Среди этих пар (a, b) выберем любую такую (a_α, b_α), что никогда ранее точки a_α и b_α не были выбраны.

Теперь положим $A := \{a_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$, $B := \{b_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ и $\varphi(a_\alpha) := b_\alpha$. Нетрудно видеть, что $S(A, B, \varphi) \supseteq]0,1[\times]0,1[$. $\square$

С учетом теоремы 1, доказательство теоремы 2 по существу сводится к следующей лемме.

Лемма 9. *Существуют множества $A, B \subseteq [0,1]$ меры нуль и биекция $\varphi : A \leftrightarrow B$ такие, что $\mu_* S(A,B,\varphi) = 0$ и $\mu^* S(A,B,\varphi) = 1$.*

Доказательство. Обозначим W произвольное множество с замечательным свойством. Пусть $\{F_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ — семейство всех замкнутых подмножеств открытого единичного квадрата $]0,1[\times]0,1[$, имеющих положительную меру. Далее по трансфинитной индукции по $\alpha \in \mathfrak{c}$ мы выберем точки $a_\alpha, b_\alpha \in W$ и $p_\alpha, q_\alpha \in F_\alpha$ так, что:

- все a_α различны и все b_α различны;
- $p_\alpha \in [(a_\alpha, 0), (b_\alpha, 1)]$;
- ни для какого $\beta \in \mathfrak{c}$ отрезок $[(a_\alpha, 0), (b_\alpha, 1)]$ не проходит через точку q_β.

Шаг индукции. Итак, пусть $\alpha \in \mathfrak{c}$ и для всех $\beta < \alpha$ точки $a_\beta, b_\beta, p_\beta, q_\beta$ уже определены. В качестве p_α возьмем любую не выбранную ранее точку множества F_α. По определению замечательного свойства через точку p_α проходит континуум разных отрезков вида $[(a,0),(b,1)]$ при $a, b \in W$. Найдется среди них и такой, что точки a, b никогда ранее не выбирались и ни для какого $\beta < \alpha$ точка q_β не принадлежит $[(a,0),(b,1)]$. Положим $a_\alpha := a, b_\alpha := b$. Наконец, по лемме 7 множество F_α не покрыто семейством $\{[(a_\beta,0),(b_\beta,1)] : \beta < \alpha\}$, что и дает нам возможность выбрать точку q_α с соблюдением всех заявленных условий.

Теперь положим $A := \{a_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$, $B := \{b_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ и $\varphi(a_\alpha) := b_\alpha$. Покажем, что тройка (A, B, φ) искомая. Положим $X := \{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$, $Y := \{q_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$. По построению $X \subseteq S(A,B,\varphi)$ и $Y \cap S(A,B,\varphi) = \emptyset$. При этом множества X и Y оба пересекают все замкнутые подмножества единичного квадрата, имеющие положительную меру, и отсюда ни множество $S(A,B,\varphi)$, ни его дополнение в $[0,1] \times [0,1]$ не содержат ни одного замкнутого множества положительной меры. Значит, $\mu_* S(A,B,\varphi) = 0$ и $\mu^* S(A,B,\varphi) = 1$. □

Говоря неформально, нам остается сжать две конструкции из теоремы 1 и леммы 9 по горизонтали в подходящее число раз и поставить рядом.

Доказательство теоремы 2. Возьмем любые числа $0 \le m_* \le m^* \le 1$. Возьмем тройку (A_+, B_+, φ_+), для которой $S(A_+, B_+, \varphi_+) \supseteq]0,1[\times]0,1[$ и, следовательно, $\mu S(A_+, B_+, \varphi_+) = 1$, и тройку (A_-, B_-, φ_-), для которой $\mu_* S(A_-, B_-, \varphi_-) = 0$ и $\mu^* S(A_-, B_-, \varphi_-) = 1$. Так как удаление конечного числа точек не меняет меру множества, можно считать, что множества A_+, B_+, A_-, B_- все содержатся в интервале $]0,1[$.

Обозначим L_+ линейное преобразование вещественной прямой, при котором точка 0 неподвижна, а точка 1 переходит в m_*. Обозначим L_- линейное преобразование вещественной прямой, при котором точка 0 переходит в m_*, а точка 1 в m^*.

Положим $A := L_+[A_+] \cup L_-[A_-]$. Для всех $a \in A_+$ положим $\varphi(L_+(a)) := L_+(\varphi_+(a))$ и для всех $a \in A_-$ обозначим $\varphi(L_-(a)) := L_-(\varphi_-(a))$. Легко видеть, что тройка (A, B, φ) искомая. □

References

[1] S. Kakeya, *Some problems on maxima and minima regarding ovals*, Tohoku Science Rep., **6** (1917), 71–88. JFM 46.1119.02

[2] J. Pál, *About an elementary variation problem*, Bull. de l'Acad. de Dan., **3**:2 (1920), 1–35. JFM 47.0684.01
[3] A.S. Besicovitch, *On Kakeya's problem and a similar one*, M. Z., **27** (1927), 312–320. JFM 53.0713.01
[4] H.J. van Alphen, *Extension of a sentence by Besicovitsch*, Mathematica, Zutphen B, **10** (1942), 144–157. Zbl 0026.26602
[5] F. Cunningham, *The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets*, Am. Math. Mon., **78** (1971), 114–129. Zbl 0207.20903
[6] R. Davies, *Some remarks on the Kakeya problem*, Proc. Camb. Philos. Soc., **69** (1971), 417–421. Zbl 0209.26602
[7] T. Wolff, *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Rev. Mat. Iberoam., **11**:3 (1995), 651–674. Zbl 0848.42015
[8] N.H. Katz, T. Tao, *New bounds for Kakeya problems*, J. Anal. Math., **87** (2002), 231–263. Zbl 1027.42014
[9] N.H. Katz, J. Zahl, *An improved bound on the Hausdorff dimension of Besicovitch sets in* $\mathbb{R}^3$, J. Am. Math. Soc., **32**:1 (2019), 195–259. Zbl 1403.42020
[10] J. Bourgain, *Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis*, Geom. Funct. Anal., **1**:2 (1991), 147–187. Zbl 0756.42014
[11] C. Fefferman, *The multiplier problem for the ball*, Ann. Math. (2), **94** (1971), 330–336. Zbl 0234.42009
[12] V.I. Bogachev, *Measure Theory*, Springer, Berlin, 2007. Zbl 1120.28001
[13] T. Jech, *Set Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2003. Zbl 1007.03002
[14] A.S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Zbl 0819.04002
[15] R. Engelking, *General Topology*, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977. Zbl 0373.54002

Anton Evgenevich Lipin
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16, S. Kovalevskaya str.,
Ekaterinburg, 620108, Russia
Email address: tony.lipin@yandex.ru