S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 18, №2, стр. 1307–1318 (2021)* УДК 517.929:57
DOI 10.33048/semi.2021.18.100 MSC 34K20, 92B05

# НАХОЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ОЦЕНОК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н.В. ПЕРЦЕВ, К.К. ЛОГИНОВ

Abstract. We consider the problem of constructing component-wise exponentially decreasing estimates of the solution to the Cauchy problem for systems of linear delay differential equations. Systems of differential equations contain matrices of a special type and belong to the systems of Wazewski type equations. The properties of nonsingular M-matrices, methods and algorithms for finding the roots of nonlinear equations are used. Examples of the study of specific systems of differential equations are presented.

**Keywords:** delay differential equation, systems of Wazewski differential equations, nonnegative matrix, nonsingular M-matrix, component-wise exponentially decreasing estimates, linear and nonlinear mathematical models of living systems.

## 1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования [1]–[5], посвященные построению экспоненциально убывающих оценок решений задачи Коши для систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающих в математических моделях живых систем.

---

Pertsev, N.V., Loginov, K.K., Finding the parameters of exponential estimates of solutions to the Cauchy problem for some systems of linear delay differential equations.



Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-29-10086.

*Поступила 27 июля 2021 г., опубликована 23 ноября 2021 г.*

Пусть $m > 1$ — фиксированное натуральное число, $E$ — единичная $m \times m$ матрица. Обозначим через $||z||$ норму вектора $z \in R^m$. Для определенности положим, что $||z|| = ||z||_{(1)} = \sum_{i=1}^{m} |z_i|$. Условимся, что для пары векторов $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in R^m$ неравенства $\xi^{(1)} \leqslant \xi^{(2)}$, $\xi^{(1)} < \xi^{(2)}$, $\xi^{(2)} \geqslant \xi^{(1)}$ $\xi^{(2)} > \xi^{(1)}$, $\xi^{(1)} > 0$ понимаются покомпонентно.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений Важевского с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Bx(t) + \sum_{k=0}^{n} A_k x(t - \omega_k), \ t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega = [-\omega; 0]. \tag{2}$$

В (1), (2) принято, что $x(t) \in R^m$, $B = \mathrm{diag}(b_{11}, \dots, b_{mm})$ — диагональная матрица с элементами $b_{jj} > 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $A_0, A_1, \dots, A_n$ — $m \times m$ матрицы с элементами $a_{ij}^{(k)} \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$ (неотрицательные матрицы). Запаздывания $\omega_k$ постоянны, $0 < \omega_k \leqslant \omega$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\omega > 0$ — некоторая константа, $\omega_0 = 0$. Начальные данные содержат непрерывную и неотрицательную (покомпонентно) функцию $\psi(t)$. При $t = 0$ в системе (1) под каждой из компонент $dx(t)/dt$ понимается правосторонняя производная.

В биологических приложениях задачу Коши (1), (2) можно рассматривать как пример компартментной модели, описывающей динамику компонент некоторого вещества, распределенного между различными, соединенными между собой компартментами (пулами) [6], [7], [8]. В работах [3], [4], [5] задача Коши (1), (2) возникает при построении верхних оценок решений некоторых нелинейных моделей динамики популяций.

Решением задачи Коши (1), (2) на промежутке $[0; \infty)$ назовем функцию $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$, непрерывную (покомпонентно) на промежутке $I_\omega \cup [0; \infty)$, $1 \leq i \leq m$, непрерывно дифференцируемую (покомпонентно) на промежутке $[0; \infty)$, удовлетворяющую начальным условиям (2) и уравнениям (1) для всех $t \in [0; \infty)$ (с учетом правосторонних производных компонент $x(t)$ при $t = 0$) [9], [10]. Из линейности системы (1) следует, что задача Коши (1), (2) имеет на промежутке $[0; \infty)$ единственное решение $x(t)$ [9], [10]. Отметим также, что неотрицательность $\psi(t)$ влечет неотрицательность $x(t)$, $t \in [0; \infty)$.

Задача Коши (1), (2) допускает тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ при нулевых начальных данных, т.е. в случае, когда $\psi(t) \equiv 0$. В работе [11] установлен следующий результат: для асимптотической устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $A_\Sigma - B$ удовлетворяла критерию Севастьянова–Котелянского [12]. Поскольку система (1) является автономной, то из асимптотической устойчивости $x(t) \equiv 0$ следует экспоненциальная устойчивость $x(t) \equiv 0$ [9]. Нахождение параметров экспоненциальных оценок для $||x(t)||$ или компонент $x(t)$ при $t \geqslant 0$ (в случае $\psi(t) \not\equiv 0$) представляет собой отдельно взятую задачу. Для построения экспоненциальных оценок компонент решения задачи Коши (1), (2) в работах [1]–[5] использованы свойства матриц специального вида.

Обозначим через $S = (s_{ij})$ вещественную $m \times m$ матрицу с элементами $s_{ij} \leqslant 0$ для всех $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Будем говорить, что $S$ является невырожденной М-матрицей, если она не вырождена и матрица $S^{-1}$ неотрицательна

[13], [14]. Следующие утверждения эквивалентны [13]: 1) $S$ является невырожденной М-матрицей; 2) все собственные числа матрицы $S$ имеют положительные вещественные части; 3) существует вектор $\xi \in R^m$, $\xi > 0$, такой, что $S\xi > 0$; 4) все главные миноры матрицы $S$ положительны; 5) матрица $(-S)$ удовлетворяет критерию Севастьянова–Котелянского. Полный список, содержащий около 50 эквивалентных утверждений относительно $S$, изложен в работе [13] (см., также [12], [14]–[16]).

Применяя [1], [2], приходим к следующему результату.

**Теорема 1.** *Пусть в (1), (2) начальная функция $\psi(t) \not\equiv 0$, каждая строка матрицы $A_\Sigma = \sum_{k=0}^n A_k$ отлична от нулевой и $B - A_\Sigma$ является невырожденной М–матрицей. Тогда для решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) справедлива оценка*

$$0 \leqslant x(t) \leqslant c\, e^{-\gamma\, t}, \quad t \in I_\omega \cup [0; \infty), \tag{3}$$

*где $\gamma \in R$, $c \in R^m$ удовлетворяют системе неравенств*

$$0 < \gamma < \min(b_{11}, \ldots, b_{mm}), \quad c > 0, \quad c \geqslant \sup_{t \in I_\omega} \bigl(e^{\gamma\, t}\psi(t)\bigr), \quad P(\gamma)c \geqslant 0, \tag{4}$$

*$m \times m$ матрица $P(\gamma)$ задана формулой*

$$P(\gamma) = B - \gamma\, E - \sum_{k=0}^{n} A_k\, e^{\gamma\, \omega_k}, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{5}$$

Один из возможных способов нахождения решения системы (4) состоит в следующем. Предположим, что существует $\gamma_*$ — вещественный корень уравнения $det\, P(\gamma) = 0$ на промежутке $0 < \gamma < \min(b_{11}, \ldots, b_{mm})$, такой, что система $P(\gamma_*)c = 0$ имеет решение $c^{(*)} > 0$. Тогда можно подобрать $\beta_* > 0$, для которого $\beta_* c^{(*)} \geqslant \sup_{t \in I_\omega} \bigl(e^{\gamma_*\, t}\psi(t)\bigr)$ и, очевидно, $P(\gamma_*)(\beta_* c^{(*)}) = 0$. В итоге получаем, что пара $\gamma = \gamma_*$, $c = \beta_* c^{(*)}$ удовлетворяет (4). Описанный алгебраический способ нахождения пары $(\gamma, c)$ может быть достаточно легко реализован с помощью аналитических выкладок и простейших численных методов в случаях, когда система (1) имеет небольшую размерность или входящие в (1) матрицы $A_0, A_1, \ldots, A_n$ являются разреженными. В более общих случаях требуется привлечение численных методов нахождения вещественных корней уравнения $det\, P(\gamma) = 0$ и отыскания решений $c^{(*)} > 0$ системы линейных уравнений $P(\gamma_*)c = 0$, где $P(\gamma_*)$ — вырожденная матрица.

Условия теоремы 1, вообще говоря, не гарантируют существование $\gamma_*$ и $c^{(*)}$, указанных в приведенном выше алгебраическом способе. Пусть, в частности, $m = 4$, $g_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ — некоторые константы,

$$A_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B - A_\Sigma = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & -g_1 & 0 \\ -g_2 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -g_3 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -g_4 & b_{44} \end{pmatrix},$$

$$P(\gamma) = \begin{pmatrix} b_{11} - \gamma & 0 & -g_1 e^{\gamma\omega_2} & 0 \\ -g_2 e^{\gamma\omega_1} & b_{22} - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -g_3 e^{\gamma\omega_1} & b_{33} - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -g_4 e^{\gamma\omega_1} & b_{44} - \gamma \end{pmatrix}.$$

Примем, что $b_{11}b_{22}b_{33} > g_1g_2g_3$. Вычисляя главные миноры матрицы $B - A_\Sigma$, устанавливаем, что $B - A_\Sigma$ является невырожденной М–матрицей. Уравнение $det\,P(\gamma) = 0$ приводит к нахождению вещественных корней $\gamma$ уравнения

$$(b_{44} - \gamma)\big((b_{11} - \gamma)(b_{22} - \gamma)(b_{33} - \gamma) - g_1g_2g_3e^{\gamma(2\omega_1+\omega_2)}\big) = 0$$

с учетом ограничения $0 < \gamma < \min(b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44})$. Ясно, что корень $\gamma = b_{44}$ не подходит. Если рассмотреть уравнение

$$(b_{11} - \gamma)(b_{22} - \gamma)(b_{33} - \gamma) - g_1g_2g_3e^{\gamma(2\omega_1+\omega_2)} = 0,$$

то равносильное ему уравнение

$$(b_{11} - \gamma)(b_{22} - \gamma)(b_{33} - \gamma) = g_1g_2g_3e^{\gamma(2\omega_1+\omega_2)}$$

имеет на промежутке $0 < \gamma < \min(b_{11}, b_{22}, b_{33})$ ровно один вещественный корень $\gamma_1$. В самом деле, выражение $(b_{11}-\gamma)(b_{22}-\gamma)(b_{33}-\gamma)$ монотонно убывает, а выражение $g_1g_2g_3e^{\gamma(2\omega_1+\omega_2)}$ монотонно возрастает по $\gamma$ на указанном промежутке. Кроме того, по условию верно неравенство $b_{11}b_{22}b_{33} > g_1g_2g_3$. В зависимости от значений констант, входящих в $P(\gamma)$, может оказаться, что $\gamma_1 < b_{44}$ или $\gamma_1 \geqslant b_{44}$. Ранг матрицы $P(\gamma_1)$ равен 2. Если окажется, что $\gamma_1 \geqslant b_{44}$, то система $P(\gamma_1)c = 0$, $c \in R^4$, не имеет решений вида $c^{(*)} > 0$. Следовательно, при $\gamma_1 \geqslant b_{44}$ алгебраический способ не позволяет найти решения системы (4).

В разделе 2 приведен способ построения решений системы (4), отличный от указанного выше алгебраического способа, и обеспечивающий существование искомой пары $(\gamma, c)$ в рамках условий теоремы 1. В этом же разделе представлен алгоритм численного решения системы (4). В разделе 3 изложены результаты построения экспоненциально убывающих оценок для математической модели, описывающей производство некоторых веществ.

## 2. Способ и алгоритм нахождения параметров экспоненциальных оценок

*2.1. Вспомогательные результаты.* Пусть вещественная матрица $S$ такова, что $s_{ij} \leqslant 0$ для всех $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, и $S$ является невырожденной М-матрицей. Очевидно, что каждая строка и каждый столбец матрицы $S^{-1}$ содержит хотя бы один положительный элемент.

Обратимся к неравенствам

$$\xi \in R^m, \quad \xi > 0, \quad S\xi > 0. \tag{6}$$

Обозначим через

$$e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)^T,\, e^{(2)} = (0, 1, \ldots, 0)^T,\, \ldots,\, e^{(m)} = (0, 0, \ldots, 1)^T$$

совокупность единичных векторов из $R^m$. В [1] показано, что любое решение неравенств (6) можно представить в виде

$$\xi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \xi^{(k)}, \tag{7}$$

где $\alpha_k > 0$ — произвольные вещественные константы,

$$\xi^{(k)} = S^{-1}e^{(k)} \in R^m,\ 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{8}$$

Из (7), (8) следует, что $\xi = S^{-1}\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T > 0$, столбцы матрицы $S^{-1}$ составлены из векторов $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}$, причем каждый вектор $\xi^{(k)}$ отличен от нулевого и имеет неотрицательные компоненты, $1 \leqslant k \leqslant m$. Отсюда, в частности, вытекает один из способов проверки матрицы $S$ на принадлежность к семейству М-матриц: если уравнения

$$S\xi^{(k)} = e^{(k)},\ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{9}$$

имеют решения, при которых хотя бы один из векторов $\xi^{(k)}$ содержит отрицательные компоненты, то $S$ не является невырожденной М-матрицей. Для нахождения решений уравнений (9) можно использовать известные методы линейной алгебры, например, метод приведения (9) к верхне-треугольному виду.

Примем, что $S = E - Q$, где $Q$ — вещественная неотрицательная $m \times m$ матрица. Все собственные числа матрицы $Q$ лежат внутри единичного круга, тогда и только тогда, когда все главные миноры $S$ положительны [15] (другими словами, $S$ является невырожденной М-матрицей). Пусть $S$ — невырожденная М-матрица. Отсюда следует, что спектральный радиус матрицы $Q$ меньше единицы [16]. Рассмотрим задачу нахождения вектора $\xi$, удовлетворяющего (6). Имеем, что $\xi = (E - Q)^{-1}\alpha$,

$$\xi = Q\xi + \alpha,\ \alpha \in R^m,\ \alpha > 0.$$

Зафиксируем $\alpha$. Получаем, что вектор $\xi$ таков, что $\xi = \lim_{j\to\infty} w^{(j)}$, где последовательность векторов $w^{(j)}$ задается с помощью сходящегося итерационного процесса

$$w^{(j)} = Qw^{(j-1)} + \alpha,\ j = 1, 2, 3, \ldots,\ w^{(0)} = \alpha. \tag{10}$$

Такой подход удобен с вычислительной точки зрения, поскольку не требует обращения матрицы $E - Q$ (см. раздел 2.3).

*2.2. Нахождение решений неравенств (4).* Примем, что выполнены условия теоремы 1. Рассмотрим способы построения решений неравенства (4). Заметим, что для любых $\gamma \geqslant 0$ и $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2$ верно

$$\widehat{\psi} = \sup_{t\in I_\omega} \psi(t) \geqslant \sup_{t\in I_\omega} \bigl(e^{\gamma\, t}\psi(t)\bigr), \tag{11}$$

$$\sup_{t\in I_\omega} \bigl(e^{\gamma_1 t}\psi(t)\bigr) \geqslant \sup_{t\in I_\omega} \bigl(e^{\gamma_2 t}\psi(t)\bigr). \tag{12}$$

Кроме того, по условию $\widehat{\psi} \neq 0$. Очевидно, что в соотношениях (11), (12) равенства выполняются в случае, когда каждая из компонент $\psi(t)$ представляет собой неубывающую на промежутке $I_\omega$ функцию. Из (4) и (11) следует, что вектор $c$ можно искать, исходя из условий $c > 0$, $c \geqslant \widehat{\psi}$, независимо от значений $\gamma > 0$. С другой стороны, если $\widehat{\psi} > 0$ и искомое $\gamma > 0$ будет близко к $\min(b_{11}, \ldots, b_{mm})$, то в силу (12) искомый вектор $c > 0$ может быть взят таким, что $c < \widehat{\psi}$.

Пусть $c \in R^m$, $c > 0$ — некоторый вектор. Опираясь на выражение для $P(\gamma)$, приведенное в (5), перепишем неравенство $P(\gamma)c \geqslant 0$, входящее в (4), в следующем виде:

$$P(\gamma)c = \Bigl(B - \gamma E - \sum_{k=0}^{n} A_k e^{\gamma\,\omega_k}\Bigr)c = (B - A_\Sigma)c - \gamma c - \sum_{k=0}^{n} A_k (e^{\gamma\,\omega_k} - 1)c \geqslant 0. \tag{13}$$

По условию $B - A_\Sigma$ — невырожденная М–матрица, и существует $\xi \in R^m$, такой, что $\xi > 0$, $(B - A_\Sigma)\xi > 0$. Используя (7), введем семейство векторов $\xi^{(\alpha)}$

по формуле

$$\xi^{(\alpha)} = (B - A_\Sigma)^{-1}\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T \in R^m, \quad \alpha > 0. \tag{14}$$

Учитывая свойства матрицы $(B - A_\Sigma)^{-1}$, из (14) получаем, что каждая компонента вектора $\xi^{(\alpha)}$ не убывает по компонентам вектора $\alpha$ и строго возрастает хотя бы по одной из компонент $\alpha$.

Зафиксируем $\alpha$ из (14). Имеем, что $\xi^{(\alpha)} > 0$ и $(B - A_\Sigma)\xi^{(\alpha)} = \alpha$. Кроме того, поскольку все строки $A_\Sigma$ отличны от нулевой строки, то $B\xi^{(\alpha)} > \alpha$. Полагая, что искомый в неравенствах (4) вектор $c$ имеет вид $c = \xi^{(\alpha)}$ и привлекая (13), (14), получаем, что

$$P(\gamma)c = P(\gamma)\xi^{(\alpha)} = \alpha - \gamma\xi^{(\alpha)} - \sum_{k=0}^{n} A_k(e^{\gamma\,\omega_k} - 1)\xi^{(\alpha)}. \tag{15}$$

Опираясь на выражение для $P(\gamma)\xi^{(\alpha)}$ из (15), найдем $\gamma \in R$, такое, что

$$0 < \gamma < \min(b_{11}, \dots, b_{mm}),\ P(\gamma)\xi^{(\alpha)} \geqslant 0. \tag{16}$$

Рассматривая неравенство $P(\gamma)\xi^{(\alpha)} \geqslant 0$ покомпонентно, получаем следующую систему неравенств относительно $\gamma$:

$$\alpha_i - \gamma\,\xi_i^{(\alpha)} \geqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(k)}\,(e^{\gamma\,\omega_k} - 1)\,\xi_j^{(\alpha)},\ 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{17}$$

В системе (17) дополнительно учитываем ограничения относительно $\gamma$, приведенные в (16).

Нетрудно заметить, что формулы (17) в левой части содержат монотонно убывающие, а в правой части — монотонно возрастающие функции от $\gamma$. Если принять, что $\gamma = 0$, то для каждого $1 \leq i \leq m$ левая часть в (17) будет положительна, а правая часть обратится в ноль. Видно, что $\alpha_i - \gamma\,\xi_i^{(\alpha)} \geqslant 0$, если $0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha_i/\xi_i^{(\alpha)}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Попутно заметим, что из неравенства $B\xi^{(\alpha)} > \alpha$ следует, что для любого $1 \leqslant i \leqslant m$ верно $\alpha_i/\xi_i^{(\alpha)} < b_{ii}$. Поэтому в качестве решения системы (16) возьмем $\gamma = \gamma_\alpha$ как наименьший из корней отдельно взятых уравнений

$$\alpha_i - \gamma\,\xi_i^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(k)}\,(e^{\gamma\,\omega_k} - 1)\,\xi_j^{(\alpha)},\ 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{18}$$

Если принять, что $\xi^{(\alpha)}$ удовлетворяет хотя бы одному из неравенств

$$\xi^{(\alpha)} \geqslant \widehat{\psi}, \tag{19}$$

$$\xi^{(\alpha)} \geqslant \widehat{\psi}_\alpha = \sup_{t \in I_\omega}\big(e^{\gamma_\alpha t}\psi(t)\big), \tag{20}$$

то пара $c = \xi^{(\alpha)}$, $\gamma = \gamma_\alpha$ является решением системы (4).

Предположим, что вектор $\xi^{(\alpha)}$ не удовлетворяет (19). Заменим $\alpha$ на $\alpha + \delta$, где $\delta \in R^m$, $\delta \geqslant 0$, $\delta \neq 0$. Очевидно, что существует указанный $\delta$, такой, что вектор $c = \xi^{(\alpha+\delta)}$ будет удовлетворять (19). С другой стороны, пусть $\xi^{(\alpha)}$ удовлетворяет (19) с «запасом», т.е. все компоненты $\xi^{(\alpha)}$ существенно превосходят компоненты $\widehat{\psi}$. Тогда, заменяя $\alpha$ на $\alpha - \delta$ (при достаточно малых $\delta > 0$, близких к нулевому вектору), можно найти вектор $c = \xi^{(\alpha-\delta)}$, удовлетворяющий (19). Из тройки $\xi^{(\alpha)}$, $\xi^{(\alpha+\delta)}$, $\xi^{(\alpha-\delta)}$ можно взять тот вектор, который удовлетворяет

(19), и имеет наименьшую сумму компонент (наименьшую норму). Используя выбранный из указанной тройки вектор и повторяя приведенные выше выкладки, найдем искомую пару $c$ и $\gamma$ в оценке (3).

Предположим, что вектор $\xi^{(\alpha)}$ не удовлетворяет (20) или удовлетворяет (20) с «запасом». Введем $\widehat{\xi}^{(\alpha)} = \beta\xi^{(\alpha)}$, где $\beta \in R$, $\beta > 0$. Подставляя $c = \widehat{\xi}^{(\alpha)}$ в (13) и учитывая, что $\beta > 0$, находим, что $\gamma = \gamma_\alpha$ — наименьший из корней отдельно взятых уравнений (18), куда по-прежнему входят компоненты вектора $\xi^{(\alpha)}$. Другими словами, использование константы $\beta > 0$ не влияет на значения $\gamma = \gamma_\alpha$. Обращаясь к неравенству (20), вместо $\xi^{(\alpha)}$ подставим $\widehat{\xi}^{(\alpha)} = \beta\xi^{(\alpha)}$. Положим:

$$\beta = \beta_\alpha = \max\Big(\frac{\widehat{\psi}_{\alpha,1}}{\xi_1^{(\alpha)}}, \dots, \frac{\widehat{\psi}_{\alpha,m}}{\xi_m^{(\alpha)}}\Big), \tag{21}$$

где $\widehat{\psi}_{\alpha,1}, \dots, \widehat{\psi}_{\alpha,m}$ — компоненты вектора $\widehat{\psi}_\alpha$. Следовательно, пара $c = \beta_\alpha\xi^{(\alpha)}$, $\gamma = \gamma_\alpha$ является решением системы (4). Из (21) видно, что $\beta_\alpha < 1$, если $\xi^{(\alpha)}$ удовлетворяет (20) с «запасом». Тогда $c = \beta_\alpha\xi^{(\alpha)} < \xi^{(\alpha)}$, что уменьшает значения компонент вектора $c$ в экспоненциальной оценке (3).

*2.3. Алгоритм численного построения решений неравенств (4).* Как и ранее, полагаем, что выполнены условия теоремы 1. Учтем, что для фиксированного $1 \leqslant i \leqslant m$ компонента $\psi_i(t)$ начальной функции фактически задана на промежутке $[-\tau_i; 0]$, где константа $\tau_i$ зависит от $\omega_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда экспоненциальная оценка для компоненты $x_i(t)$ решения задачи Коши (1), (2) строится на промежутке $t \in [-\tau_i; 0] \cup [0; \infty)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Кроме того, если матрица $B - A_\Sigma$ имеет достаточно простую структуру, то предварительно найдем $(B - A_\Sigma)^{-1}$, используя один из способов обращения матриц, в частности, символьные вычисления или способ, заданный (7)–(9).

Ниже приведен алгоритм численного нахождения вектора $c$ и константы $\gamma$, опирающийся на результаты разделов 2.1, 2.2. Описание алгоритма включает конкретные численные методы решения промежуточных задач.

Первый шаг. Задаем значения компонент вектора $\alpha$ с помощью набора точек $\alpha^{(c)}$ из единичного $m$–мерного куба: для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ принимаем, что $\alpha_i^{(c)} = kh$, $1 \leqslant k \leqslant N$, где $N$ — целочисленная константа, $Nh = 1$. Переходим на шаг 2.

Второй шаг. Последовательно фиксируем значения компонент вектора $\alpha$ из набора точек $\alpha^{(c)}$. Для каждого заданного $\alpha$ выполняем следующие действия.

• Задаем вектор $\xi^{(\alpha)}$, применяя либо соотношение

$$\xi^{(\alpha)} = (B - A_\Sigma)^{-1}\alpha,$$

либо итерационный процесс вида (10), а именно:

$$w^{(j)} = B^{-1}A_\Sigma w^{(j-1)} + B^{-1}\alpha,\ j = 1, 2, 3, \dots,\ w^{(0)} = B^{-1}\alpha.$$

Во втором случае полагаем, что $\xi^{(\alpha)} = w_*^{(j)}$, где $w_*^{(j)}$ выбираем, исходя из заданной точности $||w^{(j)} - w^{(j-1)}|| < \delta$ или при достижении заданного числа шагов $j = M$ — целочисленная константа.

• Используя $\xi^{(\alpha)}$, находим корень $\gamma = \gamma_i$ каждого из уравнений (18), $1 \leqslant i \leqslant m$. Для фиксированного $1 \leqslant i \leqslant m$ корень $\gamma = \gamma_i$ ищем методом деления отрезка пополам, начиная с отрезка $[0; \alpha_i/\xi_i^{(\alpha)}]$. Количество используемых отрезков определяем, исходя из того, что длина очередного отрезка станет меньше заданной точности $\varepsilon$ или будет достигнуто заданное число используемых отрезков $D$ — целочисленная константа. Принимаем, что $\gamma_\alpha = \min(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

• Находим вектор $\widehat{\psi}_\alpha$ по формуле (20). Для фиксированного $1 \leqslant i \leqslant m$ компоненту $\widehat{\psi}_{\alpha,i}$ этого вектора вычисляем с помощью наибольших значений функции $e^{\gamma_\alpha t}\psi_i(t)$ в точках $t_j = -\tau_i + jr_i$, $0 \leqslant j \leqslant L_i$, где $L_i$ — целочисленная константа, $L_i r_i = \tau_i$.

• Находим константу $\beta_\alpha$ по формуле (21).

• Запоминаем найденную пару $(c^{(\alpha)}, \gamma_\alpha) = (\beta_\alpha \xi^{(\alpha)}, \gamma_\alpha)$.

• Перебрав все значения $\alpha$ из набора $\alpha^{(c)}$, переходим на шаг 3.

Третий шаг. Из всего набора найденных пар $(c^{(\alpha)}, \gamma_\alpha)$, $\alpha \in \alpha^{(c)}$, выбираем искомую пару $(c, \gamma)$ по одному из следующих критериев:

• константа $\gamma_\alpha$ является наибольшей;

• вектор $c^{(\alpha)}$ таков, что $||c^{(\alpha)}||$ является наименьшей;

• константа $\gamma_\alpha$ и вектор $c^{(\alpha)}$ таковы, что для заданного индекса $1 \leqslant k \leqslant m$ выражение $c_k^{(\alpha)} \, e^{-\gamma_\alpha \tau_k}$ имеет наименьшее значение.

В качестве замечания к алгоритму отметим, значения константы $\gamma$ и компонент вектора $c$ могут быть уточнены путем выбора значений компонент вектора $\alpha$ на более «мелкой» сетке в окрестности точки $\alpha$, указанной в шаге 3 алгоритма. Дополнительно отметим, что отдельные этапы алгоритма допускают естественное распараллеливание, что существенно снижает вычислительные затраты при реализации алгоритма на ЭВМ.

## 3. Пример

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \rho x_4(t - \omega_2) - \mu_1 x_1(t), \tag{22}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = p_1 \mu_1 x_1(t - \omega_1) - \mu_2 x_2(t), \tag{23}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = p_2 \mu_2 x_2(t - \omega_1) - \mu_3 x_3(t), \tag{24}$$

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = p_3 \mu_3 x_3(t - \omega_1) - \mu_4 x_4(t), \ t \geqslant 0, \tag{25}$$

$$x_1(t) = \psi_1(t), \ x_2(t) = \psi_2(t), \ x_3(t) = \psi_3(t), \ t \in [-\omega_1; 0], \tag{26}$$

$$x_4(t) = \psi_4(t), \ t \in [-\omega_2; 0], \tag{27}$$

где $\rho > 0$, $\mu_i > 0$, $0 < p_j < 1$ — некоторые константы, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, запаздывания $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$, $\psi_4(t)$ — неотрицательные непрерывные функции, тождественно не равные нулю. Задачу Коши (22)–(27) можно интерпретировать как математическую модель, описывающую производство веществ $X_1$, $X_2$, $X_3$ под управлением положительной обратной связи, заданной с помощью переменной $x_4(t - \omega_2)$, отражающей вещество $X_4$.

Обозначим $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$, $A_0 \equiv 0$,

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3\mu_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho \\ p_1\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3\mu_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений (22)–(25) запишем в векторной форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Bx(t) + A_1 x(t-\omega_1) + A_2 x(t-\omega_2). \tag{28}$$

Имеем, что

$$B - A_\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & -\rho \\ -p_1\mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2\mu_2 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3\mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}.$$

Изучая главные миноры матрицы $B - A_\Sigma$, получаем, что первые три из них положительны, а четвертый минор (определитель этой матрицы) положителен при выполнении неравенства

$$\mu_4 > \rho\, p_1 p_2 p_3. \tag{29}$$

Следовательно, если неравенство (29) верно, то $B - A_\Sigma$ является невырожденной М-матрицей. Исходя из вида матрицы $A_\Sigma$, начальных функций $\psi_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, и неравенства (29), устанавливаем, что для задачи Коши (22)–(27) справедлива теорема 1.

Учитывая достаточно простую структуру матриц, входящих в (28), построим экспоненциально убывающие оценки решения задачи Коши (22)–(27), используя алгебраический метод, приведенный после формулировки теоремы 1. Обращаясь к формуле (5), устанавливаем, что

$$P(\gamma) = B - \gamma E - A_1 e^{\gamma\,\omega_1} - A_2 e^{\gamma\,\omega_2},$$

$$det\, P(\gamma) = (\mu_1 - \gamma)(\mu_2 - \gamma)(\mu_3 - \gamma)(\mu_4 - \gamma) - p_1 p_2 p_3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \rho\, e^{(3\omega_1 + \omega_2)\gamma}.$$

Уравнение $det\, P(\gamma) = 0$, $0 < \gamma < \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, приводит к нахождению корней уравнения

$$\varphi_1(\gamma) = (\mu_1 - \gamma)(\mu_2 - \gamma)(\mu_3 - \gamma)(\mu_4 - \gamma) = \varphi_2(\gamma) = p_1 p_2 p_3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \rho\, e^{(3\omega_1 + \omega_2)\gamma} \tag{30}$$

на промежутке $0 \leqslant \gamma < \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$. Из (30) видно, что $\varphi_1(\gamma)$ монотонно убывает, а $\varphi_2(\gamma)$ монотонно возрастает на указанном промежутке. Из (29) следует, что $\varphi_1(0) > \varphi_2(0)$. Поэтому уравнение (30) имеет ровно один корень $\gamma = \gamma_*$, такой, что $0 < \gamma_* < \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$.

Рассмотрим систему $P(\gamma_*)c = 0$, $c > 0$. Нетрудно заметить, что ранг матрицы $P(\gamma_*)$ равен 3. Тогда искомый $c = c^{(*)} = c^{(*)}(q) > 0$ имеет вид

$$c_1^{(*)}(q) = \frac{\rho\, e^{\gamma_* \omega_2}}{\mu_1 - \gamma_*}\, q, \quad c_2^{(*)}(q) = \frac{(\mu_3 - \gamma_*)(\mu_4 - \gamma_*)e^{-2\gamma_*\omega_1}}{p_2 p_3 \mu_2 \mu_3}\, q,$$

$$c_3^{(*)}(q) = \frac{(\mu_4 - \gamma_*)e^{-\gamma_*\omega_1}}{p_3 \mu_3}\, q, \quad c_4(q) = q, \quad q \in R,\ q > 0.$$

Подберем константу $q = q_*$ так, чтобы $c^{(*)}(q)$ удовлетворял неравенству

$$c^{(*)}(q) \geqslant \sup_{t \in I_\omega} \big( e^{\gamma_* \, t} \psi(t) \big). \tag{31}$$

Поскольку в общем случае $\omega_1 \neq \omega_2$, то при подборе $q = q_*$ в неравенстве (31) следует находить наибольшие значения первых трех компонент используемых функций по промежутку $[-\omega_1; 0]$, а наибольшее значение четвертой компоненты используемых функций — по промежутку $[-\omega_2; 0]$. Видно, что компоненты вектора $c^{(*)}(q)$ линейно возрастают по $q$, поэтому существует $q = q_* > 0$, обеспечивающий выполнение (31). В итоге получаем, что пара $(\gamma, c) = (\gamma_*, c^{(*)}(q_*))$ является решением системы неравенств (4).

Примем далее, что параметры модели и начальные функции таковы:

$$\omega_1 = 1.5,\ \omega_2 = 2.0,\ \rho = 1.45,\ \mu_1 = 1.4,\ \mu_2 = 1.2,$$
$$\mu_3 = 1.3,\ \mu_4 = 0.8,\ p_1 = 0.8,\ p_2 = 0.75,\ p_3 = 0.7,$$
$$x_1(t) = \psi_1(t) = 10,\ \ x_2(t) = \psi_2(t) = 10 + 2t,$$
$$x_3(t) = \psi_3(t) = 15 - 4t,\ \ t \in [-\omega_1; 0], \quad x_4(t) = 10\, e^{-0.5t},\ \ t \in [-\omega_2; 0].$$

Из вида функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и формул (11), (12), (20) следует, что первые две компоненты вектора $\widehat{\psi}_\alpha$ не зависят от $\alpha$ и имеют значения $\widehat{\psi}_{\alpha,1} = \widehat{\psi}_{\alpha,2} = 10$.

Для указанных параметров и начальных данных корень $\gamma_*$ уравнения (30) и компоненты вектора $c^{(*)}(q_*)$, удовлетворяющего (31), таковы (с точностью до шести знаков): $\gamma_* = 0.026975$,

$$c_1^{(*)}(q_*) = 29.882271,\ c_2^{(*)}(q_*) = 29.709487,$$
$$c_3^{(*)}(q_*) = 21.871238,\ \ c_4^{(*)}(q_*) = 26.809818.$$

Следовательно, можно записать покомпонентные экспоненциальные оценки

$$0 \leqslant x_1(t) \leqslant 29.882271\, e^{-0.026975\, t},\ \ 0 \leqslant x_2(t) \leqslant 29.709487\, e^{-0.026975\, t},$$
$$0 \leqslant x_3(t) \leqslant 21.871238\, e^{-0.026975\, t},\ \ 0 \leqslant x_4(t) \leqslant 26.809818\, e^{-0.026975\, t},\ \ t \geqslant 0.$$

Перейдем к построению экспоненциальных оценок для компонент $x(t)$, используя алгоритм, представленный в разделе 2.3. Положим:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \omega_1 = 1.5,\ \ \tau_4 = \omega_2 = 2.0.$$

На втором шаге алгоритма применяем матрицу $(B - A_\Sigma)^{-1}$, найденную с помощью символьных вычислений.

В первом вычислительном эксперименте константы, используемые в алгоритме, таковы:

$$h = 0.02,\ \ N = 50,\ \ \varepsilon = 10^{-6},\ \ D = 1000,$$
$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0.01,\ \ L_1 = L_2 = L_3 = 150,\ \ L_4 = 200.$$

Кроме того, для третьего критерия в алгоритме примем, что $k = 3$, интерпретируя $X_3$ как финальный продукт в цепочке $X_1 \to X_2 \to X_3$. Результаты вычислений (с точностью до шести знаков) представлены в таблице 1.

Таблица 1. Числовые значения параметров экспоненциальных оценок, найденных в первом вычислительном эксперименте.

| Критерий | $\gamma$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.026916 | 28.707903 | 28.541897 | 21.008862 | 25.758201 |
| 2 | 0.000722 | 28.168160 | 26.354627 | 20.977642 | 27.143594 |
| 3 | 0.021007 | 28.590178 | 28.030211 | 20.355679 | 26.064414 |

Уточним найденные значения $\gamma$ и компонент вектора $c$, опираясь на замечание к алгоритму относительно более «мелкой» сетки. Зафиксируем значения вектора $\alpha = \alpha^{(1)}$, использованные при построении таблицы 1. Далее в рамках каждого из трех критериев изменяем компоненты вектора $\alpha$ на промежутке вида $\alpha \in [\alpha^{(1)} - 0.01; \alpha^{(1)} + 0.01]$ с шагом $\Delta_\alpha = 0.0004$. Результаты второго вычислительного эксперимента (с точностью до шести знаков) представлены в таблице 2.

Таблица 2. Числовые значения параметров экспоненциальных оценок, найденных во втором вычислительном эксперименте.

| Критерий | $\gamma$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.026973 | 28.706719 | 28.540804 | 21.010895 | 25.755242 |
| 2 | 0.000520 | 28.164119 | 26.318724 | 20.983612 | 27.154554 |
| 3 | 0.021000 | 28.582493 | 28.021095 | 20.348862 | 26.064758 |

Сравнение результатов, приведенных в таблицах 1, 2, показывает относительно небольшие изменения значений $\gamma$ и компонент вектора $c$. Поэтому дальнейшее измельчение сетки для компонент вектора $\alpha$ нецелесообразно.

Из таблиц 1, 2 видно, что вычисления в рамках первого критерия дают значения параметра $\gamma$ и компонент вектора $c$, близкие к соответствующим значениям, найденным с помощью алгебраического способа. Третий критерий немного «проигрывает» первому критерию по значению параметра $\gamma$, отражающему скорость убывания компонент решения $x(t)$. Второй критерий дает явно заниженное значение параметра $\gamma$ по сравнению с найденными значениями в рамках первого и третьего критериев. Использование второго критерия фактически дает минимальную оценку $||x(t)|| \leqslant ||c||$ для всех $t \in [0; \infty)$ среди трех заданных критериев.

В завершение отметим, что предложенный в работе алгоритм нахождения числовых значений параметров экспоненциальных оценок решения $x(t)$ задачи Коши (1), (2) имеет важный прикладной характер. Формулы для экспоненциально убывающих оценок решения $x(t)$ позволяют оценить скорость и время снижения всех или части компонент решения от начального до заданного (благоприятного или неблагоприятного) уровня. Так, например, для математических моделей в эпидемиологии и иммунологии требуется числовая оценка промежутка времени до завершения эпидемического процесса в некоторой популяции или промежутка времени до выздоровления инфицированного индивидуума. Оценка указанных промежутков времени с помощью приведенного алгоритма возможна для нелинейных математических моделей, имеющих блочную структуру правых частей дифференциальных уравнений [3], [4], [5]. Кроме того, результаты работы алгоритма могут быть использованы для сравнения с результатами построения экспоненциальных оценок решения задачи Коши (1), (2) на основе функционалов Ляпунова-Красовского.

## References

[1] N.V. Pertsev, *Two-sided estimates for solutions to the Cauchy problem for Wazewski linear differential systems with delay*, Sib. Math. J., **54**:6 (2013), 1088–1097. Zbl 1293.34097

[2] N. V. Pertsev, *Application of M-matrices in construction of exponential estimates for solutions to the Cauchy problem for systems of linear difference and differential equations*, Sib. Adv. Math., **24**:4 (2014), 240–260. Zbl 1340.34179

[3] N. V. Pertsev, *Exponential decay estimates for some components of solutions to the nonlinear delay differential equations of the living system models*, Sib. Math. J., **61**:4 (2020), 715–724. Zbl 1453.34106

[4] N. V. Pertsev, *On exponentially decreasing estimates of solutions to nonlinear delay functional differential equations used in population dynamics models*, Dyn. Syst., Simferopol', **10(38)**:1 (2020), 70–83. Zbl 7362690

[5] N. V. Pertsev, *Construction of exponentially decreasing estimates of solutions to a Cauchy problem for some nonlinear systems of delay differential equations*, Sib. Électron. Math. Izv., **18** (2021), 579–598. Zbl 1462.34097

[6] A. Mazanov, *Stability of multi-pool models with lags*, J. Theor. Biol., **59**:2 (1976), 429–442. MR0424279

[7] I. Gyori, J. Eller, *Compartmental systems with pipes*, Math. Biosci., **53** (1981), 223–247. Zbl 0488.92001

[8] W.M. Haddad, V. Chellaboina, *Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay*, Syst. Control Lett., **51**:5 (2004), 355–361. Zbl 1157.34352

[9] V.B. Kolmanovskij, V.R. Nosov, *Stability and periodic regimes of control systems with aftereffect*, Nauka, Moscow, 1981. Zbl 0457.93002

[10] J.K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York etc., 1977. Zbl 0352.34001

[11] A.Yu. Obolenskii, *Stability of solutions of autonomous Wazewski systems with delayed action*, Ukr. Math. J., **35**:5 (1983), 486–492. Zbl 0537.34072

[12] F.R. Gantmakher, *The Theory of Matrices. Vol. 1,2*, AMS, Chelsea Publishing, Providence, 1998. Zbl 0927.15001, 0927.15002

[13] A. Berman, R.J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Academic Press, New York etc., 1979. Zbl 0484.15016

[14] V.V. Voevodin, Yu.A. Kuznetsov, *Matrices and calculations*, Nauka, Moscow, 1984. Zbl 0537.65024

[15] R. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York etc., 1970. Zbl 0216.06101

[16] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York-London, 1970. Zbl 0241.65046

Nikolay Viktorovitch Pertsev
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk Division
13, Pevtsova str.,
Omsk, 644043, Russia
*Email address*: `homlab@ya.ru`

Konstantin Konstantinovich Loginov
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk Division
13, Pevtsova str.,
Omsk, 644043, Russia
*Email address*: `kloginov85@mail.ru`