S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1286–1298 (2021) УДК 517.5
DOI 10.33048/semi.2021.18.098 MSC 30C80

Special issue: International S.B. Stechkin's Workshop-Conference on Function Theory (Russia, Altai Republic, August 9–19, 2021)

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА КЛАССЕ СОБОЛЕВА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ ФУНКЦИЙ

Р.Р. АКОПЯН

Abstract. A solution is obtained for interconnected extremal problems on the class of analytic functions in a strip with finite L^2-norms of limit values of functions on one boundary line and bounded L^2-norms of limit values of the derivative of order n, $n \geq 0$, on the other boundary line: best approximation of the differentiation operators with respect to the uniform norm on an intermediate line by bounded operators; optimal recovery of the derivative of order k on an intermediate line from values of the function on the boundary line given with an error. An exact Kolmogorov-type inequality is obtained that estimates the uniform norm of the derivative of order k on an intermediate line in terms of the L^2-norm of the limit boundary values of the function and the derivative of order n.

Keywords: analytic functions, best approximation of the operator, optimal recovery, Kolmogorov inequality.

Akopyan, R.R., Best approximation of differentiation operators on the Sobolev class of functions analytic in a strip.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Поступила 25 октября 2021 г., опубликована 19 ноября 2021 г.

1. Постановки задач

В дальнейшем k, n, y и Y — неотрицательные числа, для которых выполняется одно из двух условий:

$$(a)\ Y = y \geq 0,\ 2n > 2k+1 \quad \text{или} \quad (b)\ Y > y > 0,\ k, n - \text{произвольные}.$$

При $n \neq 0$ определим величины α и β, а при $Y \neq 0$ — величину γ формулами

$$\alpha = \frac{2n-2k-1}{2n}, \qquad \beta = 1-\alpha = \frac{2k+1}{2n}, \qquad \gamma = \frac{y}{Y}.$$

При $Y > 0$ обозначим $\Pi = \Pi(0, Y) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im z < Y\}$ — полосу комплексной плоскости, параллельную вещественной оси $\mathbb{R}$. Далее всегда для $t \in \mathbb{R}$ и $m \geq 0$ полагаем $t^{2m} = |t|^{2m}$.

Для функции f из $L^2(\mathbb{R})$, стандартным образом (см., например, [1]), определено её преобразование Фурье

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx,$$

причём $\widehat{f}$ из $L^2(\mathbb{R})$. Если для $m \geq 0$, $z \in \mathbb{C}$ и функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ сходится (в смысле Коши) интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (it)^m \widehat{f}(t) e^{itz} dt,$$

то это число — производная (по Вейлю) порядка m функции f в точке z, обозначаем её в дальнейшем $f^{(m)}(z)$.

Определим пространство $W_n^{2,2}$ функций f из $L^2(\mathbb{R})$, для которых квадрат функции $\phi_{n,Y}[f]$, заданной равенством $\phi_{n,Y}[f](t) = |t|^n e^{-Yt} \widehat{f}(t)$, суммируем на $\mathbb{R}$. То есть $W_n^{2,2}$ определяется следующим образом:

$$W_n^{2,2} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \phi_{n,Y}[f] \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

В случае $Y = 0$ пространство $W_n^{2,2} = W_n^{2,2}(\mathbb{R})$ есть пространство Соболева.

В случае $Y > 0$ пространство $W_n^{2,2} = W_n^{2,2}(\Pi)$ можно отождествить с пространством аналитических в полосе Π функций f, с граничными значениями на вещественной оси из $L^2(\mathbb{R})$ и у которых $f^{(n)}$ из пространства L^2 на граничной прямой $\mathbb{R}+iY$. При этом справедливо равенство $\|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+iY)} = \|\phi_{n,Y}[f]\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

В пространстве $W_n^{2,2}$ выделим класс Q, задаваемый равенством

$$Q = \left\{ f \in W_n^{2,2} \, : \, \|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+iY)} \leq 1 \right\}.$$

Рассмотрим функцию Ω двух положительных переменных λ, μ и функцию ω переменной $\delta > 0$, определяемые формулами

$$\Omega(\lambda, \mu) = \sup \left\{ \|f^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}+iy)} : f \in W_n^{2,2}, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \lambda, \|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+iY)} \leq \mu \right\}, \tag{1}$$

$$\omega(\delta) = \sup \left\{ \|f^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}+iy)} \, : \, f \in Q, \, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta \right\}. \tag{2}$$

Непосредственно из определения (1) для функций пространства $W_n^{2,2}$ следует точное неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}+iy)} \leq \Omega \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+iY)} \right), \quad f \in W_n^{2,2}. \tag{3}$$

Функция (2) является модулем непрерывности оператора дифференцирования порядка k на прямой $\mathbb{R}+iy$ на классе Q, и связана с функцией (1) равенствами

$$\omega(\delta)=\Omega(\delta,1), \qquad \Omega(\lambda,\mu)=\mu\omega(\lambda/\mu).$$

Таким образом, задачи исследования функций (1) и (2), а также неравенство (3), эквивалентны.

В случае $Y=0$ неравенство (3) является неравенством типа Колмогорова, которое получено Л.В. Тайковым [2], и имеет вид:

$$\|f^{(k)}\|_{C(\mathbb{R})} \le \mathcal{C}\|f\|^{\alpha}_{L^2(\mathbb{R})}\|f^{(n)}\|^{\beta}_{L^2(\mathbb{R})}, \quad f\in W_n^{2,2}(\mathbb{R}),$$

$$\alpha=\frac{2n-2k-1}{2n}, \quad \beta=1-\alpha, \qquad \mathcal{C}=\left\{\frac{\alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta}}{2n\sin\alpha\pi}\right\}^{1/2}.$$

Одновременно с величинами (1) и (2) будем рассматривать взаимосвязанные задачи оптимального восстановления производной порядка k на прямой $\mathbb{R}+iy$ функций из класса Q, заданных на оси $\mathbb{R}$ с L^2-погрешностью, и наилучшего приближения оператора дифференцирования порядка k на прямой $\mathbb{R}+iy$ на классе Q линейными ограниченными операторами. Перейдем к точной постановке этих задач.

В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$ будем рассматривать либо множество $\mathcal{F}$ всех однозначных, либо $\mathcal{L}$ — линейных, или $\mathcal{B}$ — линейных ограниченных операторов из $L^2(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R}+iy)$. Для произвольного $\delta>0$ и оператора $T\in\mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T,\delta)=\sup\left\{\|f^{(k)}-Tg\|_{C(\mathbb{R}+iy)}\,:\,f\in Q,\,g\in L^2(\mathbb{R}),\,\|f-g\|_{L^2(\mathbb{R})}\le\delta\right\}$$

является погрешностью восстановления методом T производной порядка k на прямой $\mathbb{R}+iy$ функций из класса Q. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)=\inf\{\mathcal{U}(T,\delta)\,:\,T\in\mathcal{R}\} \tag{4}$$

есть оптимальное восстановление производной порядка k на прямой $\mathbb{R}+iy$ функций из класса Q, заданных на оси $\mathbb{R}$ с L^2-погрешностью множеством методов $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$, $\delta>0$, и нахождении оптимального метода восстановления — оператора, на котором в (4) достигается нижняя грань.

Пусть $\mathcal{B}(N)$ — множество линейных ограниченных операторов из $L^2(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R}+iy)$ с нормой, не превосходящей числа $N>0$. Для оператора $T\in\mathcal{B}(N)$ величина

$$U(T)=\sup\left\{\|f^{(k)}-Tf\|_{C(\mathbb{R}+iy)}\,:\,f\in Q\right\}$$

есть уклонение оператора T от оператора дифференцирования порядка k на прямой $\mathbb{R}+iy$ на классе Q. Тогда величина

$$E(N)=\inf\{U(N)\,:\,T\in\mathcal{B}(N)\} \tag{5}$$

является наилучшим приближением оператора дифференцирования порядка k на прямой $\mathbb{R}+iy$ множеством $\mathcal{B}(N)$. Задача состоит в вычислении величины $E(N), N>0$, и нахождении метода наилучшего приближения — оператора, на котором в (5) достигается нижняя грань.

При $Y=y=0$ решение задачи (5) было также получено в работе [2]. В этом случае справедливо равенство

$$E(N)=\beta\alpha^{\alpha/\beta}\mathcal{C}^{1/\beta}N^{-\alpha/\beta},$$

а методом наилучшего приближения является оператор

$$\Lambda_h f(x) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^k}{1+ht^{2n}} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt, \quad \text{при} \quad h = \left\{ \frac{\beta}{2n\sin\alpha\pi} \right\}^{\beta/2} N^{-\beta}.$$

Задачи (4) и (5) являются конкретными постановками более общих задач, соответственно, оптимального восстановления оператора на классе элементов банахового пространства но неточной информации и задачи Стечкина наилучшего приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе. Историю исследования этих задач, их взаимосвязь и связь с модулем непрерывности оператора см., например, [3], [4] и ссылки там.

В частности, для исследуемых в настоящей работе задач известно, что связь выражается следующими образом. В задаче восстановления (4) множеством $\mathcal{F}$ всех однозначных отображений из $L^2(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R}+iy)$ существует линейный ограниченный оператор, являющийся оптимальным методом восстановления, а величина погрешности восстановления оптимальным методом равна модулю непрерывности (2) восстанавливаемого оператора, т.е. справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \omega(\delta).$$

Кроме того, величины модуля непрерывности (2) и наилучшего приближения (5) связаны равенствами

$$\begin{aligned} \omega(\delta) &= \inf\left\{E(N) + N\delta \,:\, N > 0\right\}; \\ E(N) &= \sup\left\{\omega(\delta) - N\delta \,:\, \delta > 0\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Результаты упоминавшейся выше работы Л.В. Тайкова [2] развивались и обобщались в различных направлениях, см. статьи [5, 6, 7, 8].

О результатах в задаче оптимального восстановления на классах Харди – Соболева аналитических в полосе функций с ограниченной нормой производной в пространстве Харди по информации о функции на промежуточной прямой и соответствующих неравенствах колмогоровского типа см. в работах [9, 10, 11, 12]. Некоторые результаты в близких к исследуемым здесь задачах (при $n = 0$ и $k = 0, 1$, для других норм) получены в работах автора [13, 14, 15].

В настоящей работе будет получено точное решение задач (2), (4) и (5); исследуется их поведение при стремлении к $+0$ и $+\infty$ параметров δ и N.

2. Формулировка основных результатов

В случаях $sY = y \geq 0$, $2ns > 2m+1$ или $sY > y > 0$, $m, n-$ произвольные неотрицательные и $s > 0$ введем обозначение для специального интеграла с параметром h :

$$\jmath_s[m,n,y,Y](h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2m} e^{-2yt}}{(1+ht^{2n}e^{-2Yt})^s} dt, \quad h > 0. \tag{7}$$

Далее будут использоваться величины:

$$d(h) = \frac{\jmath_2^{1/2}[k,n,y,Y](h)}{\jmath_2^{1/2}[k+n,n,y+Y,Y](h)}, \qquad v(h) = \frac{\jmath_1[k,n,y,Y](h)}{\jmath_2^{1/2}[k+n,n,y+Y,Y](h)}; \tag{8}$$

$$\nu(h) = \jmath_2^{1/2}[k,n,y,Y](h), \qquad u(h) = h\jmath_2^{1/2}[k+n,n,y+Y,Y](h). \tag{9}$$

Отметим, что величины d, v, n и u связаны тождеством

$$u(h) + d(h)\nu(h) \equiv v(h). \tag{10}$$

Для положительного параметра h определим функцию f_h формулой
$$f_h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{e}(t)|t|^k e^{-yt}}{1 + ht^{2n}e^{-2Yt}} e^{izt} dt, \quad \mathfrak{e}(t) = \exp\{-i \arg(t^k)\}.$$
Функция f_h определена и аналитична в полосе
$$\varpi(-y, 2Y - y) = \{z \in \mathbb{C} : -y < \Im z < 2Y - y\}.$$

Определим оператор (свертки) T_δ из пространства $L^2(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R} + iy)$ формулой
$$T_h f(x + iy) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^k e^{-yt}}{1 + ht^{2n}e^{-2Yt}} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$
Ясно, что при $Y = y = 0$ операторы T_h и Λ_h совпадают.

Основными результатами работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть для неотрицательных параметров k, n, y, Y выполняются одно из условий (a) или (b). Тогда справедливы равенства*
$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(d(h)) = \omega(d(h)) = v(h), \quad h > 0. \tag{11}$$
Методом оптимального восстановления является линейный ограниченный оператор T_h; неравенство (3) обращается в равенство на функциях вида $cf_h(\cdot - x_0)$, $h > 0, x_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть для неотрицательных параметров k, n, y, Y выполняются одно из условий (a) или (b). Тогда справедливо равенство*
$$E(\nu(h)) = u(h), \quad h > 0. \tag{12}$$
Методом наилучшего приближения является линейный ограниченный оператор T_h.

Отметим, что теоремы 1 и 2 дают полное решение, соответственно, задач (4) и (5). Точнее справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *В условиях теорем на параметры k, n, y, Y имеет место:*
1) *для любого $N > 0$ существует единственное $h > 0$ такое, что $\nu(h) = N$;*
2) *для любого $\delta > 0$ существует единственное $h > 0$ такое, что $d(h) = \delta$.*

Функции ω и, соответственно, Ω являются не элементарными, поэтому выписать явный вид неравенства (3) невозможно. Однако используя теорему 1 можно записать точное аддитивное неравенство.

Следствие 1. *В условиях теорем на параметры k, n, y, Y справедливо точное неравенство*
$$\|f^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}+iy)} \le \nu(h)\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + u(h)\|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+iY)}, \quad f \in W_n^{2,2},\ h > 0. \tag{13}$$
Неравенство (13) обращается в равенство на функциях вида $cf_h(\cdot - x_0)$, $h > 0, x_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$.

Из равенства (12) или, что тоже самое, неравенства (13) следуют вложения класса $W_n^{2,2}(\Pi)$ в пространство $C_k(\mathbb{R}+iy)$ — функций из $C(\mathbb{R}+iy)$ с ограниченной производной порядка k на прямой $\mathbb{R}+iy$, $0 < y \le Y$, и пространство Харди – Соболева $H_k(\varpi(y,\eta))$ — функций из пространства Харди $H(\varpi(y,\eta))$, $0 < y < \eta \le Y$, аналитических и ограниченных в полосе $\varpi(y,\eta) = \{z \in \mathbb{C} : y < \Im z < \eta\}$, и имеющих в полосе ограниченную производную порядка k. Точнее, справедливо утверждение.

Следствие 2. *При $0 < y < \eta < Y$ и произвольных неотрицательных k и n справедливы вложения:*

$$W_n^{2,2}(\Pi) \subset C_k(\mathbb{R} + iy), \qquad W_n^{2,2}(\Pi) \subset H_k(\varpi(y, \eta)).$$

При $0 < y < Y$ и $2k + 1 < 2n$ справедливы вложения:

$$W_n^{2,2}(\Pi) \subset C_k(\mathbb{R} + iY), \qquad W_n^{2,2}(\Pi) \subset H_k(\varpi(y, Y)).$$

3. Свойства функции f_h и оператора T_h

Функция f_h определена и аналитична в полосе $\varpi(-y, 2Y - y)$. Кроме того, для произвольного $\xi \in (-y, 2Y - y)$ сужение f_h на прямую $\mathbb{R} + i\xi$ является суммируемой с квадратом функцией, и справедливо равенство

$$\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R}+i\xi)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2k} e^{-2(y+\xi)t}}{(1 + ht^{2n} e^{-2Yt})^2} dt \right)^{1/2}.$$

Для производной порядка m, $m \geq 0$, имеет место представление

$$f_h^{(m)}(z) = \frac{i^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{e}(t) t^{k+m} e^{-yt}}{1 + ht^{2n} e^{-2Yt}} e^{izt} dt, \quad z \in \varpi(-y, 2Y - y).$$

При произвольном $\xi \in (-y, 2Y - y)$ для норм сужения производных на прямую $\mathbb{R} + i\xi$ справедливы равенства

$$\|f_h^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+i\xi)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2(k+n)} e^{-2(y+\xi)t}}{(1 + ht^{2n} e^{-2Yt})^2} dt \right)^{1/2},$$

$$\|f_h^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}+i\xi)} = |f^{(k)}(i\xi)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2k} e^{-(y+\xi)t}}{1 + ht^{2n} e^{-2Yt}} dt.$$

Соответственно, имеем

$$\begin{gathered} \|f_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = \jmath_2^{1/2}[k, n, y, Y](h), \ \|f_h^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+iY)} = \jmath_2^{1/2}[k + n, n, y + Y, Y](h), \\ \|f_h^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}+iy)} = \jmath_1[k, n, y, Y](h). \end{gathered} \tag{14}$$

Лемма 1. *Пусть для неотрицательных параметров k, n, y, Y выполняются одно из условий (a) или (b). Тогда справедливо неравенство*

$$\omega(d(h)) \geq v(h), \quad h > 0. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F_h = f_h \jmath_2^{-1/2}[k + n, n, y + Y, Y](h)$. Из соотношений (8) и (14) следуют равенства

$$\|F_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = d(h), \quad \|F_h^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}+iy)} = v(h), \quad \|F_h^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+iY)} = 1.$$

В частности это означает, что $F_h \in Q$. Тогда из определения (2) модуля непрерывности следует неравенство (15). Лемма 1 доказана. $\square$

Из неравенства Коши — Буняковского — Шварца и равенства Парсеваля для нормы оператора T_h, вытекает равенство

$$\|T_h\| = \|T_h\|_{L^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}+iy)} = \nu(h). \tag{16}$$

Норма достигается на функциях $f_h \jmath_2^{-1/2}[k, n, y, Y](h)$. Выпишем представление разности производной порядка k функции f и $T_h f$ для $f \in W_n^{2,2}$:

$$\left| f^{(k)}(x + iy) - T_h f(x + iy) \right| = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{k+n} e^{-(y+Y)t}}{1 + ht^{2n} e^{-2Yt}} i^n t^n e^{-Yt} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt \right|.$$

Аналогично вычислению нормы T_h, получаем оценку уклонения

$$\|f^{(k)} - T_h f\|_{C(\mathbb{R}+iy)} \le u(h)\|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}+iY)}, \quad f \in W_n^{2,2}.$$

Более того, имеет место равенство

$$U(T_h) = \sup\left\{\|f^{(k)} - T_h f\|_{C(\mathbb{R}+iy)} \,:\, f \in Q\right\} = u(h), \tag{17}$$

в котором верхняя грань достигается на функции F_h. Из равенств (16), (17) и (10) следует цепочка соотношений

$$\mathcal{U}(T_h, d(h)) \le U(T_h) + \|T_h\| d(h) = u(h) + \nu(h)d(h) = v(h).$$

Более того, имеет место равенство

$$\mathcal{U}(T_h, d(h)) = v(h), \tag{18}$$

верхняя грань в погрешности восстановления $\mathcal{U}(T_h, d(h))$ достигается на функции F_h. Непосредственно из равенств (17) и (18) получим оценку сверху величин (4) и (5).

Лемма 2. *Пусть для неотрицательных параметров k, n, y, Y выполняются одно из условий (a) или (b). Тогда при всех $h > 0$ справедливы неравенства*

$$E(\nu(h)) \le u(h), \tag{19}$$

$$\mathcal{E}(\delta(h)) \le v(h).$$

4. Доказательства основных теоремы

Используя неравенство (15) леммы 1 и неравенство (19) леммы 2, равенства (6) и (10) имеем цепочку соотношений

$$v(h) \le \omega(d(h)) \le E(n(h)) + d(h)\nu(h) \le u(h) + d(h)\nu(h) = v(h), \quad h > 0.$$

Следовательно, для всех $h > 0$ справедливы равенства

$$\omega(d(h)) = v(h), \qquad E(n(h)) = v(h) - d(h)\nu(h) = u(h).$$

Равенства (11) и (12) доказаны. Теперь из равенств (16), (17) и (18) следует, что линейный ограниченный оператор T_h является методом оптимального восстановления при $\delta = d(h)$ и методом наилучшего приближения при $N = \nu(h)$. Теоремы 1 и 2 доказаны.

5. Исследование интеграла с параметром

В этой части исследуется интеграл (7) и доказывается Предложение 1. Рассматриваем в дальнейшем (7) как функцию переменной $h \in (0, +\infty)$ с неотрицательными параметрами m, n, y, Y и $s > 0$. Интеграл является сходящимся при всех $h \in (0, +\infty)$ в случаях: (a^*) $sY = y \ge 0$, $2ns > 2m+1$ и (b^*) $sY > y > 0$ для произвольных неотрицательных m, n и $s > 0$. Функция (7) положительная, по переменной h убывает и выпуклая на полупрямой $(0, +\infty)$, что следует из соотношений для её производных

$$\jmath_s'[m, n, y, Y](h) = -s\jmath_{s+1}[m+n, n, y+Y, Y](h) < 0,$$

$$\jmath_s''[m, n, y, Y](h) = s(s+1)\jmath_{s+2}[m+2n, n, y+2Y, Y](h) > 0.$$

Нас интересует поведение $\jmath_s[m, n, y, Y](h)$ при $h \to +0$ и при $h \to +\infty$. В двух специальных случаях нетрудно выписать явную зависимость от h.

(I) Случай $Y=y=0$ и $2ns>2m+1$. Производя замену переменной $\tau=h^{1/2n}t$, имеем равенство

$$\jmath_s[m,n,0,0](h)=\kappa_1 h^{-\beta^*},\quad \beta^*=\frac{2m+1}{2n},$$

$$\kappa_1=\jmath_s[m,n,0,0](1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\tau^{2m}}{(1+\tau^{2n})^s}d\tau.$$

(II) Случай $sY>y>0$ и $m\geq n=0$. Производя в интеграле замену переменной $\tau=t-\ln h/2Y$, имеем асимптотическое, при $h\to+0$ и $h\to+\infty$, соотношение

$$\jmath_s[m,0,y,Y](h)=h^{-\gamma^*}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\left(\tau+\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2m}e^{-2y\tau}}{(1+e^{-2Y\tau})^s}d\tau\sim\kappa_2 h^{-\gamma^*}\left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2m},$$

$$\gamma^*=y/Y,\quad \kappa_2=\jmath_s[0,0,y,Y](1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2y\tau}}{(1+e^{-2Y\tau})^s}d\tau.$$

Рассмотрим случай $Y\neq 0$ и $n\neq 0$.

Лемма 3. *Пусть $sY>y>0$, $m\geq 0, n>0$ или $sY=y>0$, $2ns>2m+1$ и $s>0$. Тогда имеют место равенства*

$$\lim_{h\to+0}\jmath_s[m,n,y,Y](h)=+\infty,$$

$$\lim_{h\to+\infty}\jmath_s[m,n,y,Y](h)=+0,\quad \lim_{h\to+\infty}h^s\jmath_s[m,n,y,Y](h)=+\infty.$$

При $h\to+\infty$ справедливы предельные соотношения:

$$\jmath_s[m,n,y,Y](h)\sim\kappa_1 h^{-\beta^*},\quad \text{если}\quad \beta^*<\gamma^*; \tag{20}$$

иначе (если $\beta^*\geq\gamma^*$)

$$\kappa_2 h^{-\gamma^*}\left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\gamma^* n)}\lesssim\jmath_s[m,n,y,Y](h)\lesssim\kappa_2 h^{-\gamma^*}\left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\gamma^* n)_+}, \tag{21}$$

в частности

$$\jmath_s[m,n,y,Y](h)\sim\kappa_2 h^{-\gamma^*}\left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\gamma^* n)},\quad \text{если}\quad \beta^*\geq\gamma^*+1/2n;$$

При $h\to+0$ в случае $sY>y$ для произвольного $\sigma>1$ справедливо предельное соотношение:

$$\kappa_2 h^{-\gamma^*}\left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\sigma\gamma^* n)}\lesssim\jmath_s[m,n,y,Y](h)\lesssim\kappa_2 h^{-\gamma^*}\left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\gamma^* n)_+}. \tag{22}$$

В случае $sY=y$ для произвольного ε, $0<\varepsilon<s$, существуют $c_1(\varepsilon), c_2$ и $h(\varepsilon)$ такие, что для всех h, $0<h<h(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$c_1(\varepsilon)h^{-\gamma^*+\varepsilon}\leq\jmath_s[m,n,sY,Y](h)\leq c_2 h^{-\gamma^*}. \tag{23}$$

Доказательство. Разложим исходный интеграл в сумму

$$\jmath_s[m,n,y,Y](h)=A(h)+B(h)+C(h),$$

$$A(h)=A_s[m,n,y,Y](h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^{+\infty}\frac{t^{2m}e^{2yt}}{(1+ht^{2n}e^{2Yt})^s}dt,$$

$$B(h)=B_s[m,n,y,Y](h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{t^{2m}e^{-2yt}}{(1+ht^{2n}e^{-2Yt})^s}dt,$$

$$C(h)=C_s[m,n,y,Y](h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^{+\infty}\frac{t^{2m}e^{-2yt}}{(1+ht^{2n}e^{-2Yt})^s}dt.$$

Вначале исследуем поведение $\jmath_s$ при $h\to+0$. Сумма $B+C$ ограниченная, действительно справедливо неравенство

$$0\le B(h)+C(h)\le\int_{-1}^{\infty}t^{2m}e^{-2yt}dt.$$

Обозначим через $t(h)$ и $\epsilon(h)$ величины, определяемые равенствами

$$t(h)=\frac{\ln 1/h}{2Y},\quad \epsilon=\epsilon(h)=n\sigma\frac{\ln(t(h)/\sigma)}{t(h)},\ \sigma>1.$$

Для введённых величин справедливы равенства

$$\lim_{h\to+0}t(h)=+\infty,\quad \lim_{h\to+0}\epsilon(h)=+0,\quad \lim_{h\to+0}\left(\frac{t(h)}{\sigma}+\frac{\ln h}{2(Y+\epsilon(h))}\right)=-\infty.$$

Заметим, что если $t\ge t(h)/\sigma$, то $t^n\le e^{\epsilon t}$.

Рассмотрим первое слагаемое при $sY\ne y$ ($\gamma^*<s$). Обозначим через η величину $\eta=m/\gamma^*-(m/\gamma^*-n)_+$, где $x_+=1/2(x+|x|)$; имеем $0\le\eta\le n$. Оценим $A(h)$ сверху:

$$A(h)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^{+\infty}\frac{t^{2m}e^{2yt}}{(1+t^{2\eta}e^{2Y(t-t(h))})^s}dt=[\tau=t-t(h)]=$$

$$=\frac{h^{-\gamma^*}}{\sqrt{2\pi}}\int_{1-t(h)}^{+\infty}\frac{(\tau+t(h))^{2m}e^{2y\tau}}{(1+e^{2Y(\tau+\eta/Y\ln(\tau+t(h))})^s}d\left(\tau\pm\frac{\eta}{Y}\ln(\tau+t(h))\right).$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух и в первом из них сделаем замену переменных $\theta=\tau+\frac{\eta}{Y}\ln(\tau+t(h))$, получим

$$A(h)\le\frac{h^{-\gamma^*}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{1-t(h)}^{+\infty}\frac{(\tau(\theta)+t(h))^{2(m-\gamma^*n)_+}e^{2y\theta}}{(1+e^{2Y\theta})^s}d\theta-\right.$$

$$\left.-\frac{\eta}{Y}\int_{1-t(h)}^{+\infty}\frac{(\tau+t(h))^{2m-1}e^{2y\tau}}{(1+(\tau+t(h))^{2\eta}e^{2Y\tau})^s}d\tau\right)\le$$

$$\le h^{-\gamma^*}\,(t(h))^{2(m-\gamma^*n)_+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1-t(h)}\frac{\left(\frac{\tau(\theta)}{t(h)}+1\right)^{2(m-\gamma^*n)_+}e^{2y\theta}}{(1+e^{2Y\theta})^s}d\theta\sim$$

$$\sim\kappa_2h^{-\gamma^*}\left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\gamma^*n)_+}.$$

Здесь предел интеграла равен интегралу от предела т.к. суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $(c_0|\theta|+1)^{2(m-\gamma^*n)_+}(1+e^{2Y\theta})^{-s}e^{2y\theta}$, $c_0=2Y/|\ln h_0|$, при $h\le h_0<1$ является мажорантой подынтегральной функции. Это следует из соотношений:

$$0\le\frac{\tau(\theta)}{t(h)}+1\le\frac{\theta}{t(h)}+1\le\frac{|\theta|}{t(h)}+1\le c_0|\theta|+1,\quad \theta\in[1-t(h),+\infty).$$

Оценим с другой стороны.

$$A(h)\ge\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{t(h)}{\sigma}}^{+\infty}\frac{t^{2m}e^{2yt}}{(1+ht^{2n}e^{2Yt})^s}dt\ge\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{t(h)}{\sigma}}^{+\infty}\frac{t^{2m}e^{2yt}}{(1+he^{2(Y+\epsilon)t})^s}dt=$$

$$= \frac{h^{-y/(Y+\epsilon)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t(h)}{\sigma}+\frac{\ln h}{2(Y+\epsilon)}}^{+\infty} \frac{\left(\tau - \frac{\ln h}{2(Y+\epsilon)}\right)^{2m} e^{2y\tau}}{(1+e^{2(Y+\epsilon)\tau})^s} d\tau \sim \kappa_2 h^{-\gamma^*} \left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\sigma\gamma^* n)} \sigma^{\sigma\gamma^* n}.$$

В итоге получаем неравенство (22).

Рассмотрим $A(h) = A_s[m,n,sY,Y](h)$ в случае $y = sY$, $2m+1 < 2ns$ ($\beta^* < s = \gamma^*$). Оценку сверху даёт следующее неравенство

$$A(h) \leq \frac{h^{-s}}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} t^{2m-2ns} dt = c_2 h^{-\gamma^*}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{s-\beta^*}.$$

С другой стороны, для произвольного $\varepsilon > 0$ справедлива оценка снизу

$$A(h) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} \frac{e^{2Y(s-\varepsilon/2)t}}{(1+ht^{2n}e^{2Yt})^s} dt = A_s[0,n,Y(s-\varepsilon/2),Y](h).$$

Применяя оценку снизу из (22), получим

$$A_s[0,n,Y(s-\varepsilon/2),Y](h) \gtrsim c_1(\varepsilon) h^{-s+\varepsilon}, \quad c_1(\varepsilon) = \jmath_s[0,0,Y(s-\varepsilon/2),Y](1).$$

Отсюда следует утверждение леммы с неравенством (23).

Исследуем поведение $\jmath_s$ при $h \to +\infty$. Для первого слагаемого при $sY \neq y$ ($\gamma^* < s$) имеем оценку

$$A(h) \leq \frac{h^{-s}}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} t^{2m-2ns} e^{-2(sY-y)t} dt = o\left(h^{-\gamma^*} \ln^{2(m-\theta\gamma^* n)} h\right).$$

А в случае $sY = y$, $2m+1 < 2ns$ ($\beta^* < s = \gamma^*$) справедливо неравенство

$$A(h) \leq \frac{h^{-s}}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} t^{2m-2ns} dt = o\left(h^{-\beta^*}\right).$$

Рассмотрим второе слагаемое. При $2m+1 < 2ns$ ($\gamma^* \leq s, \beta^* < s$) справедливо соотношение

$$B(h) = \left[\tau = h^{1/2n} t\right] = \frac{h^{-\beta^*}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h^{1/2n}}^{h^{1/2n}} \frac{\tau^{2m} e^{-2y\tau h^{-1/2n}}}{(1+\tau^{2n} e^{-2Y\tau h^{-1/2n}})^s} d\tau \sim \kappa_1 h^{-\beta^*}.$$

Здесь предельный переход справедлив в силу неравенства

$$0 \leq f(\tau,h) \leq \varphi(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}, h > 0,$$

в котором функция $f(\tau,h)$ на отрезке $[-h^{1/2n}, h^{1/2n}]$ определяется равенством

$$f(\tau,h) = \frac{\tau^{2m} e^{-2y\tau h^{-1/2n}}}{(1+\tau^{2n} e^{-2Y\tau h^{-1/2n}})^s}, \quad \tau \in [-h^{1/2n}, h^{1/2n}],$$

и равна нулю вне этого отрезка, а суммируемая на прямой $\mathbb{R}$ функция $\varphi(\tau)$ — равенством

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau^{2m} e^{2y}}{(1+\tau^{2n} e^{-2Y})^s}.$$

В случае $2m+1 > 2ns, y < sY$ ($\gamma^* < s < \beta^*$) справедливо неравенство

$$B(h) \leq \frac{h^{-s}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} t^{2m-2ns} e^{-2(y-sY)t} dt = o\left(h^{-\gamma^*} \ln^{2(m-\gamma^* n)} h\right).$$

Наконец, в случае $2m+1 = 2ns, y < sY$ ($\gamma^* < s = \beta^*$) для достаточно малого $\varepsilon, 0 < \varepsilon < s$, имеем

$$B(h) \leq \int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n(s-\varepsilon)-1} e^y}{(1+ht^{2n}e^{-Y})^s} dt =$$

$$= \frac{h^{-\beta^*+\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h^{1/2n}}^{h^{1/2n}} \frac{|\tau|^{2n(s-\varepsilon)-1} e^y}{(1+\tau^{2n}e^{-Y})^s} d\tau = o\left(h^{-\gamma^*} \ln^{2(m-\gamma^* n)} h\right).$$

В итоге получаем, что либо $B(h) = o\left(h^{-\gamma^*} \ln^{2(m-\gamma^* n)} h\right)$, либо $B(h) \sim \kappa_1 h^{-\beta^*}$.

Для получения оценок третьего слагаемого при $sY \neq y$ $(\gamma^* < s)$ обозначим через $t(h)$ и $\epsilon(h)$ величины определяемые равенствами

$$t(h) = \frac{\ln h}{2Y}, \quad \epsilon = \epsilon(h) = n \frac{\ln t(h)}{t(h)}.$$

Для введённых величин справедливы равенства

$$\lim_{h\to+\infty} t(h) = +\infty, \quad \lim_{h\to+\infty} \epsilon(h) = +0, \quad \lim_{h\to+\infty} \left(t(h) - \frac{\ln h}{2(Y-\epsilon(h))}\right) = -\infty;$$

и если $t \geq t(h)$, то $t^n \leq e^{\epsilon t}$. Рассуждая аналогично оценке $A(h)$ в первой части доказательства леммы, имеем асимптотическую оценку сверху

$$C(h) \lesssim \kappa_2 h^{-\gamma^*} \left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\gamma^* n)_+}.$$

Получим оценку снизу.

$$C(h) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t(h)}^{+\infty} \frac{t^{2m} e^{-2yt}}{(1+he^{-2(Y-\epsilon)t})^s} dt =$$

$$= \frac{h^{-y/(Y-\epsilon)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{t(h)-\frac{\ln h}{2(Y-\epsilon)}}^{+\infty} \frac{(\tau + \frac{\ln h}{2(Y-\epsilon)})^{2m} e^{-2y\tau}}{(1+e^{-2(Y-\epsilon)\tau})^s} d\tau \sim \kappa_2 h^{-\gamma^*} \left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{2(m-\gamma^* n)}.$$

В случае $sY = y$, $2m+1 < 2ns$ $(\beta^* < s = \gamma^*)$ получаем

$$C(h) \leq \frac{h^{-s}}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} t^{2m-2ns} dt = o\left(h^{-\beta^*}\right).$$

Складывая оценки A, B и C, получаем асимптотические равенство (20) и неравенство (21). Лемма 3 доказана. □

Из леммы 3 следуют предельные соотношения для величин (8) и (9). Выпишем их в случаях, когда лемма 3 даёт асимптотические равенства, и соответствующие соотношения для решений задач (2) и (5).

Следствие 3. *Имеют место утверждения:*
i) в случае $\beta < \gamma$ при $h \to +\infty$ для величин (8) справедливы асимптотические равенства

$$d(h) \sim \jmath_2^{1/2}[k,n,0,0](1) \jmath_2^{-1/2}[k+n,n,0,0](1)\, h^{1/2},$$
$$v(h) \sim \jmath_1[k,n,0,0](1) \jmath_2^{-1/2}[k+n,n,0,0](1)\, h^{\alpha/2},$$

и, следовательно, при $\delta \to +\infty$ справедливо соотношение

$$\omega(\delta) \sim \mathcal{C}_1\, \delta^\alpha, \quad \mathcal{C}_1 = \jmath_1[k,n,0,0](1)\, \jmath_2^{-\alpha/2}[k,n,0,0](1)\, \jmath_2^{-\beta/2}[k+n,n,0,0](1);$$

а для величин (9) справедливы асимптотические равенства

$$\nu(h) \sim \jmath_2^{1/2}[k,n,0,0](1)\, h^{-\beta/2}, \qquad u(h) \sim \jmath_2^{1/2}[k+n,n,0,0](1)\, h^{\alpha/2},$$

и, следовательно, при $N \to +0$ справедливо соотношение

$$E(N) \sim \mathcal{K}_1\, N^{-\alpha/\beta}, \quad \mathcal{K}_1 = \jmath_2^{\alpha/(2\beta)}[k,n,0,0](1)\, \jmath_2^{1/2}[k+n,n,0,0](1).$$

ii) в случае $\beta \geq \gamma + 1/2$ при $h \to +\infty$ для величин (8) справедливы асимптотические равенства

$$d(h) \sim \jmath_2^{1/2}[0,0,y,Y](1)\jmath_2^{-1/2}[0,0,y+Y,Y](1)\, h^{1/2},$$

$$v(h) \sim \jmath_1[0,0,y,Y](1)\jmath_2^{-1/2}[0,0,y+Y,Y](1)\, h^{(1-\gamma)/2} \left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{k-\gamma n},$$

и, следовательно, при $\delta \to +\infty$ справедливо соотношение

$$\omega(\delta) \sim \mathcal{C}_2\, \delta^{1-\gamma} \left(\frac{\ln \delta}{Y}\right)^{k-\gamma n}, \quad \mathcal{C}_2 = \frac{\jmath_1[0,0,y,Y](1)}{\jmath_2^{(1-\gamma)/2}[0,0,y,Y](1)\jmath_2^{\gamma/2}[0,0,y+Y,Y](1)};$$

а для величин (9) справедливы асимптотические равенства

$$\nu(h) \sim \jmath_2^{1/2}[0,0,y,Y](1)\, h^{-\gamma/2} \left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{k-\gamma n},$$

$$u(h) \sim \jmath_2^{1/2}[0,0,y+Y,Y](1)\, h^{(1-\gamma)/2} \left(\frac{\ln h}{2Y}\right)^{k-\gamma n},$$

и, следовательно, при $N \to +0$ справедливо (неявное) соотношение

$$E(N) \sim \jmath_2^{1/2}[0,0,y+Y,Y](1) \left(\mathcal{K}_2 \frac{E(N)}{N}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{1}{Y} \ln\left(\mathcal{K}_2 \frac{E(N)}{N}\right)\right)^{k-\gamma n},$$

$$\mathcal{K}_2 = \jmath_2^{1/2}[0,0,y,Y](1)\, \jmath_2^{-1/2}[0,0,y+Y,Y](1).$$

Теперь докажем Предложение 1.

Доказательство. Утверждение 1) сразу следует из определения (9) величины $\nu(h)$ и свойств интеграла $\jmath_2[k,n,y,Y](h)$.

Для $\delta > 0$ функция $u(h) + \delta\nu(h)$ является выпуклой, имеет пределы в нуле и бесконечности, равные $+\infty$. Тогда она имеет на $(0,+\infty)$ единственную стационарную точку h_δ — точку минимума, для которой справедливо равенство

$$u'(h_\delta) + \delta\nu'(h_\delta) = 0.$$

Вычисляя выражение для δ, полученное из этого равенства, получим

$$\delta = -\frac{u'(h_\delta)}{\nu'(h_\delta)} = d(h_\delta).$$

Тем самым показано, что для каждого $\delta > 0$ существует единственное h_δ, удовлетворяющее равенству $d(h_\delta) = \delta$, т.е. что справедливо утверждение 2). Предложение 1 доказано. □

References

[1] E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971. Zbl 0232.42007

[2] L.V. Taikov, *Kolmogorov-type inequalities and best formulas for numerical differentiation*, Math. Notes, **4**:2 (1969), 631–634. Zbl 0206.34901

[3] V.V. Arestov, *Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems*, Russ. Math. Surv., **51**:6 (1996), 1093–1126. Zbl 0947.41019

[4] V.V. Arestov, R.R. Akopyan, *Stechkin's problem on the best approximation of an unbounded operator by bounded ones and related problems*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **26**:4 (2020), 7–31.

[5] A.Yu. Shadrin, *Inequalities of Kolmogorov type and estimates of spline interpolation on periodic classes* W_2^m, Math. Notes, **48**:4 (1990), 1058–1063. Zbl 0753.42003

[6] V.F. Babenko, R.O. Bilichenko, *Inequality of Taikov type for powers of normal operators in Hilbert space*, Researches in Mathematics, **19**:3 (2021), 3–7.

[7] G.G. Magaril-Il'yaev, K.Yu. Osipenko, *Optimal reconstruction of the values of functions and their derivatives from an inexactly specified Fourier transform*, Sb. Math., **195**:10 (2004), 1461–1476. Zbl 1072.42002

[8] E.V. Vvedenskaya, K.Yu. Osipenko, *Discrete analogs of Taikov's inequality and recovery of sequences given with an error*, Math. Notes, **92**:4 (2012), 473–484. Zbl 1258.42007

[9] K.Yu. Osipenko, M.I. Stesin *Optimal recovery of derivatives of bounded analytic and harmonic functions from inaccurate data*, Math. Notes, **53**:5 (1993), 513–520. Zbl 0802.30032

[10] K.Yu. Osipenko, *Inequalities for derivatives of functions analytical in a strip*, Math. Notes, **56**:4 (1994), 1069–1074. Zbl 0862.30001

[11] K.Yu. Osipenko, *On n-widths, optimal quadrature formulas, and optimal recovery of functions analytic in a strip*, Russ. Acad. Sci. Izv., Math., **45**:1 (1995), 55–78. Zbl 0839.41015

[12] K.Yu. Osipenko, *The Hardy–Littlewood–Pólya inequality for analytic functions in Hardy–Sobolev spaces*, Sb. Math., **197**:3 (2006), 315–334. Zbl 1149.30003

[13] R.R. Akopyan, *Best approximation of the operator of analytic continuation on the class of functions analytic in a strip*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **17**:3 (2011), 46–54.

[14] R.R. Akopyan, *Best approximation of the differentiation operator on a class of functions that are analytic in a strip*, Proc. Steklov Inst. Math., Suppl. 1, **288**:1 (2015), S5–S12. MR3364187

[15] R.R. Akopyan, *An analogue of the two-constants theorem and optimal recovery of analytic functions*, Sb. Math., **210**:10 (2019), 1348–1360. Zbl 07148309

Roman Razmikovich Akopyan
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16, S. Kovalevskaya str.,
Yekaterinburg, 620100, Russia
Email address: RRAkopyan@mephi.ru