S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2. стр. 1278–1285 (2021) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2021.18.097 MSC 35B40

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Д.А. ПРОКУДИН

Abstract. An initial-boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of viscous compressible multicomponent media is considered, and the viscosity matrix is not assumed to be diagonal. The stabilization of the solution to the initial-boundary value problem with an unlimited increase of time is proved.

Keywords: compressible viscous medium, multicomponent flows, stabilization of solution.

1. Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим следующую систему уравнений динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial P_i}{\partial x}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Prokudin, D.A., On the stabilization of solutions to the initial-boundary value problem for the equations of dynamics of viscous compressible multicomponent media.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2020-23) (гос. задание FZMW-2020-0008 от 24.01.2020), одобренного в рамках конкурсного отбора научных проектов, выполняемых научными коллективами исследовательских центров и/или научных лабораторий образовательных организаций высшего образования.

Поступила 8 октября 2021 г., опубликована 18 ноября 2021 г.

Здесь $N \geqslant 2$ — число компонент, ρ — плотность среды, u_i — скорость i–ой компоненты, $v = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} u_i$ — средняя скорость среды,

$$P_i = -p + \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x}$$

— напряжения, где p — давление в среде, а постоянные коэффициенты вязкостей $\{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ образуют симметричную матрицу $\mathbf{N}$, причем $\mathbf{N} > 0$, т. е. $(\mathbf{N}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geqslant B_1(\mathbf{N})|\boldsymbol{\xi}|^2$ для всех $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ с некоторой постоянной $B_1(\mathbf{N}) > 0$. Обозначим $\mathbf{N}^{-1} = \{\widetilde{\nu}_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$.

Введенные уравнения вместе с уравнением состояния

$$p = K\rho^\gamma, \quad K = \mathrm{const} > 0, \quad \gamma = \mathrm{const} > 1$$

образуют замкнутую систему

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i, \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + v\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) + K\frac{\partial \rho^\gamma}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.2}$$

Будем рассматривать эту систему в прямоугольнике Q_T (здесь и далее $Q_t = (0,1)\times(0,t)$) с произвольной конечной высотой T, $0 < T < +\infty$, при следующих начальных и граничных условиях ($i = 1, \dots, N$):

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.3}$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{1.4}$$

Пусть начальные данные в (1.3) удовлетворяют условиям

$$\rho_0 \in W_2^1(0,1), \quad \rho_0 > 0, \quad u_{0i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1), \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.5}$$

Как видно, в уравнениях (1.2) присутствуют слагаемые, отвечающие за взаимодействие между компонентами в старших членах, а именно слагаемые, отвечающие за вязкое трение между компонентами. Коэффициенты вязкостей образуют матрицу $\mathbf{N}$, недиагональные элементы которой отвечают за указанное взаимодействие. Если эта матрица диагональна, взаимодействие не происходит, и соответствующая задача не представляет существенных новых математических трудностей по сравнению с однокомпонентным движением [1]–[8]. Вопросы о стабилизации для смежных одномерных моделей динамики многокомпонентных сред изучались в работах [9], [10].

В работе [11] установлена однозначная разрешимость задачи (1.1)–(1.5) в Q_T с произвольным T. В данной работе получены оценки решений задачи (1.1)–(1.5), не зависящие от времени, из которых следует стабилизация решения при $t \to +\infty$.

2. Введение лагранжевых координат

При исследовании задачи (1.1)–(1.5) будут использоваться лагранжевы координаты. Возьмем за новые независимые переменные $y(x,t) = \int\limits_0^x \rho(s,t)\,ds$ и t. Тогда система (1.1), (1.2) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N u_i, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + K\frac{\partial \rho^\gamma}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij}\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial u_j}{\partial y}\right), \quad i = 1,\dots,N. \tag{2.2}$$

Область Q_T при таком переходе отображается в прямоугольник $\Pi_T = (0,d)\times(0,T)$, где $d = \int\limits_0^1 \rho_0\,dx > 0$, начальные и граничные условия преобразуются к виду ($i = 1,\dots,N$)

$$\rho|_{t=0} = \widetilde{\rho}_0(y), \quad u_i|_{t=0} = \widetilde{u}_{0i}(y), \quad y \in [0,d], \tag{2.3}$$

$$u_i|_{y=0} = u_i|_{y=d} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{2.4}$$

3. Вывод априорных оценок

Приступим к выводу априорных оценок. Умножим уравнения (2.1) на $KN\rho^{\gamma-2}$, (2.2) на u_i, просуммируем и проинтегрируем по y, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^d \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N u_i^2 + \frac{KN}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}\right)dy + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^d \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)dy = 0. \tag{3.1}$$

Отсюда, после интегрирования по t, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_0^d u_i^2 dy + \int\limits_0^d \rho^{\gamma-1}\,dy + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t\int\limits_0^d \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 dyd\tau \leqslant B_2, \tag{3.2}$$

где $B_2 = B_2\left(B_1, \|\widetilde{\rho}_0\|_{L_{\gamma-1}(0,d)}, \left\{\|\widetilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\right\}, K, N, \gamma\right)$.

Далее, перепишем уравнения (2.2) в виде

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \widetilde{\nu}_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{K}{N}\left(\sum_{j=1}^N \widetilde{\nu}_{ij}\right)\frac{\partial \rho^\gamma}{\partial y} = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial u_i}{\partial y}\right), \quad i = 1,\dots,N, \tag{3.3}$$

а затем просуммируем (3.3) по i от 1 до N, получим

$$\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^N \widetilde{\nu}_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} + \widetilde{K}\frac{\partial \rho^\gamma}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \widetilde{K} = \frac{K}{N}\sum_{i,j=1}^N \widetilde{\nu}_{ij}. \tag{3.4}$$

Из уравнения (2.1) выразим

$$\rho\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \ln\rho}{\partial t} \tag{3.5}$$

и подставим в (3.4):

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t \partial y} + \widetilde{K} \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial y} = -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t}.$$

Умножим это равенство на $\dfrac{\partial \ln \rho}{\partial y} =: w$ и проинтегрируем по y, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^d w^2\, dy\right) + \widetilde{K}\gamma \int_0^d \rho^\gamma w^2\, dy = -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) w\, dy. \tag{3.6}$$

Правую часть (3.6) преобразуем, интегрируя по частям и используя (2.1), (3.5):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) w\, dy = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d u_j w\, dy\right) + \\ + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right) dy. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким образом, из (3.6) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^d w^2\, dy\right) + \widetilde{K}\gamma \int_0^d \rho^\gamma w^2\, dy = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d u_j w\, dy\right) + \\ + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right) dy. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Проинтегрируем (3.8) по t:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^d w^2\, dy + \widetilde{K}\gamma \int_0^t \int_0^d \rho^\gamma w^2\, dy d\tau = \frac{1}{2}\int_0^d w_0^2\, dy - \\ -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d u_j w\, dy + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \widetilde{u}_{0j} w_0\, dy + \\ + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^t \int_0^d \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right) dy d\tau, \quad w_0 = w|_{t=0}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Отсюда с учетом (3.2) заключаем

$$\int\limits_0^d w^2\,dy + \int\limits_0^t\int\limits_0^d \rho^\gamma w^2\,dyd\tau \leqslant \tag{3.10}$$

$$\leqslant B_3\left(B_2, \inf_{(0,d)}\widetilde{\rho}_0, \|\widetilde{\rho}_0\|_{W_2^1(0,d)}, \{\|\widetilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\}, \mathbf{N}, \widetilde{K}, N, \gamma\right).$$

Теперь заметим, что из уравнения неразрывности (1.1) очевидно следует, что при каждом $t\in[0,T]$ хотя бы в одной точке $z(t)\in[0,d]$

$$\rho(z(t),t) = d. \tag{3.11}$$

Следовательно, можно воспользоваться представлением

$$\ln\rho(y,t) = \ln\rho(z(t),t) + \int\limits_{z(t)}^{y} \partial_s \ln\rho(s,t)\,ds,$$

из которого по неравенству Гельдера, с учетом (3.10) и (3.11), имеем

$$|\ln\rho(y,t)| \leqslant |\ln d| + \sqrt{d}\|w\|_{L_2(0,d)} \leqslant B_4(B_3,d).$$

Отсюда непосредственно следует

$$0 < \frac{1}{B_5} \leqslant \rho \leqslant B_5 < +\infty, \quad B_5 = B_5(B_4) \tag{3.12}$$

и, поэтому, из (3.2) и (3.10) имеем

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_0^t\int\limits_0^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 dyd\tau + \int\limits_0^d \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 dy + \tag{3.13}$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^d \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 dyd\tau \leqslant B_6(B_2,B_3,B_5,\gamma).$$

Чтобы получить следующую оценку, умножим (2.2) на $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}$ и проинтегрируем по y

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 dy + \sum_{j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^d \rho\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\right) dy =$$

$$= -\sum_{j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^d \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right) dy + \tag{3.14}$$

$$+K\gamma\int\limits_0^d \rho^{\gamma-1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right) dy.$$

Теперь (3.14) просуммируем по i и проинтегрируем по t:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2dy+\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\rho\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\right)dyd\tau=\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\left(\frac{\partial \widetilde{u}_{0i}}{\partial y}\right)^2dy-\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)dyd\tau+\\ &+K\gamma\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\rho^{\gamma-1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)dyd\tau.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Левую часть (3.15) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2dy+\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\rho\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\right)dyd\tau\geqslant\\ &\geqslant B_7(B_1,B_5)\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2dy+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)^2dyd\tau\right).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Для второго слагаемого в правой части (3.15), ввиду (3.13) и мультипликативного неравенства

$$\left\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\right\|^2_{C[0,d]}\leqslant 2\left\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\right\|_{L_2(0,d)}\left\|\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right\|_{L_2(0,d)},\tag{3.17}$$

имеем оценку

$$\begin{aligned}&-\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)dyd\tau\leqslant\\ &\leqslant\frac{B_7}{4}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)^2dyd\tau+\\ &+B_8(B_7,\mathbf{N},N)\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\right\|^2_{L_2(0,d)}\left\|\frac{\partial\rho}{\partial y}\right\|^4_{L_2(0,d)}d\tau\leqslant\\ &\leqslant\frac{B_7}{4}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)^2dyd\tau+B_9(B_6,B_8).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Наконец третье слагаемое в правой части (3.15) оценим следующим образом:

$$K\gamma\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^d \rho^{\gamma-1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)dyd\tau \leqslant \tag{3.19}$$

$$\leqslant \frac{B_7}{4}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^d\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)^2 dyd\tau + B_{10},$$

где $B_{10}=B_{10}(B_5,B_6,B_7,K,N,\gamma)$. Таким образом, из (3.15), в силу (3.16), (3.18) и (3.19), следует оценка

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^d\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 dy + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^d\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)^2 dyd\tau \leqslant \tag{3.20}$$

$$\leqslant B_{11}\left(B_7,B_9,B_{10},\left\{\|\widetilde{u}_{0i}\|_{W_2^1(0,d)}\right\}\right).$$

Интегрируя (3.14) по t, заключаем (см. (3.18))

$$\int_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\int_0^d\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 dy\right|d\tau \leqslant \tag{3.21}$$

$$\leqslant B_{12}\left(B_5,B_6,B_7,B_{11},\mathbf{N},K,N,\gamma\right), \quad i=1,\ldots,N.$$

4. Доказательство стабилизации решения при неограниченном возрастании времени

Из (3.13) и (3.21) вытекают при $t\to+\infty$ сходимости

$$\left\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\right\|_{L_2(0,d)}\to 0, \quad i=1,\ldots,N. \tag{4.1}$$

Дифференцируя (2.1) по y и умножая на $\dfrac{\partial\rho}{\partial y}$, с использованием (3.17), приходим к оценке

$$\int_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\int_0^d\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 dy\right|d\tau \leqslant B_{13}\left(B_5,B_6,B_{11}\right). \tag{4.2}$$

Следовательно, при $t\to+\infty$

$$\left\|\frac{\partial\rho}{\partial y}\right\|_{L_2(0,d)}\to 0. \tag{4.3}$$

Таким образом доказано (см. (3.11)), что в норме $W_2^1(0,d)$ при $t\to+\infty$

$$u_i\to 0, \quad i=1,\ldots,N, \quad \rho\to d. \tag{4.4}$$

Несложно убедиться теперь, что эти же сходимости имеют место в эйлеровых переменных в норме $W_2^1(0,1)$.

References

[1] A.V. Kazhikhov, *Stabilization of solutions of an initial-boundary-value problem for the equations of motion of a barotropic viscous fluid*, Differ. Equations, **15**:4 (1979), 463–467. Zbl 0426.35025

[2] I. Straskraba *Recent progress in the mathematical theory of 1D barotropic flow*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, Sci. Mat., **55**:2 (2009), 395–405. Zbl 1205.76231

[3] I. Straskraba, A. Zlotnik, *Global properties of solutions to 1D-viscous compressible barotropic fluid equations with density dependent viscosity*, Z. Angew. Math. Phys., **54**:4 (2003), 593–607. Zbl 1040.35064

[4] I. Straskraba, A. Zlotnik, *Global behavior of 1d-viscous compressible barotropic fluid with a free boundary and large data*, J. Math. Fluid Mech., **5**:2 (2003), 119–143. Zbl 1042.76050

[5] A.A. Zlotnik, Nguen Zha Bao, *The behavior as $t \to +\infty$ of solutions to a quasilinear nonstationary problem with free boundaries*, Differ. Equations, **30**:6 (1994), 1003–1005. Zbl 0834.35104

[6] A.A. Zlotnik, *Stabilization of solutions of a certain quasilinear system of equations with a weakly monotone nonlinearity*, Differ. Equations, **35**:10 (1999), 1423–1428. Zbl 0976.35054

[7] A.A. Zlotnik, *Uniform estimates and stabilization of symmetric solutions of a system of quasilinear equations*, Differ. Equations, **36**:5 (2000), 701–716. Zbl 1088.35516

[8] A.A. Zlotnik, B. Ducomet, *Stabilization rate and stability for viscous compressible barotropic symmetric flows with free boundary for a general mass force*, Sb. Math., **196**:12 (2005), 1745–1799. Zbl 1151.35432

[9] I.G. Akhmerova, A.A. Papin, *Solvability of the boundary-value problem for equations of one-dimensional motion of a two-phase mixture*, Math. Notes, **96**:2 (2014), 166–179. Zbl 1315.35154

[10] A.A. Zlotnik, *Uniform estimates and stabilization of solutions to equations of one-dimensional motion of a multicomponent barotropic mixture*, Math. Notes, **58**:2 (1995), 885–889. Zbl 0852.76078

[11] D.A. Prokudin, *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures*, J. Physics: Conference Series, **894** (2017), Article 012076.

Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
15, Lavrent'eva ave.,
630090, Novosibirsk, Russia
Laboratory for Mathematical and Computer Modeling
in Natural and Industrial Systems,
Faculty of Mathematics & Information Technologies,
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
Email address: prokudin@hydro.nsc.ru