

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 18, №2, стр. 1261–1277 (2021)*  
DOI 10.33048/semi.2021.18.096УДК 515.162.32  
MSC 57M25

## КВАНДЛЫ, КВАЗОИДЫ И ПРОЕКЦИИ

Ф. Г. КОРАБЛЁВ

**ABSTRACT.** We study connections between two algebraic constructions — quandles and quasoids. Both of them are motivated by colorings of knot diagrams. There are constructions of cocyclic knot invariants as for quandles and for quasoids. In this paper we, at first, introduce the notion of projection from quasoid to quandle and, at second, construct mixed cocyclic invariants, which use quandles, quasoids and projections in their definition.

**Keywords:** Quandle, quasoid, cocyclic invariant, chain complex.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие дистрибутивного группоида было предложено С. Матвеевым в работе [1]. Независимо Д. Джойс предложил эквивалентное понятие квандла (quandle) в работе [2]. В современной литературе наиболее часто употребляется термин Джойса, так как термин «группоид» обладает слишком широким смыслом и используется во многих других областях математики. Поэтому, чтобы не вызывать двусмысленностей, в дальнейшем мы будем тоже пользоваться термином квандл.

Каждый квандл представляет собой множество с одной бинарной алгебраической операцией, удовлетворяющей аксиомам, мотивированным движениями Рейдемейстера диаграмм узлов и зацеплений. Конечный квандл порождает инвариант ориентированных узлов и зацеплений в трёхмерной сфере, который совпадает с числом правильных раскрасок дуг диаграммы элементами этого квандла (все точные определения, в том числе определение правильной раскраски, будут даны далее в параграфе 2).

---

KORABLEV, Ph.G., QUANDLES, QUASOIDS AND PROJECTIONS.

© 2021 КОРАБЛЁВ Ф.Г.

Работа поддержана РФФИ (грант 20-01-00127).

Поступила 12 сентября 2021 г., опубликована 18 ноября 2021 г.

В работе [3] Д. Картера с соавторами построены коциклические инварианты, которые являются существенным усилением инвариантов числа правильных раскрасок. В ней описано, как каждый конечный квандл порождает цепной комплекс. Выбрав произвольный элемент из второй группы когомологий этого комплекса, каждой правильной раскраске диаграммы узла (или зацепления) на двумерной сфере можно сопоставить её целочисленный вес. Итоговым значением коциклического инварианта является набор весов, сопоставленных каждой правильной раскраске. Как это часто делается в теории узлов, такое мультимножество записывается в виде одного полинома Лорана с одной переменной. При этом степени мономов соответствуют элементам мультимножества, а коэффициенты перед ними — числу вхождений элемента в мультимножество.

В работе [4] предложена другая конструкция коциклических инвариантов. Основное отличие конструкции из этой работы [4] от конструкции из работы [3] состоит в том, как определяется граничный гомоморфизм при построении цепного комплекса. В работе [3] этот гомоморфизм определялся как разность двух функций, а в работе [4] было показано, что сумма этих функций также корректным образом задаёт цепной комплекс. Более того, каждый элемент его второй группы когомологий порождает инвариант ориентированных узлов и зацеплений в  $\mathbb{R}^3$ . Далее в параграфе 2 будет дано полное описание конструкций этих двух коциклических инвариантов. Если  $\Gamma$  — конечный квандл, то тот коциклический инвариант, в определении которого используется граничный гомоморфизм, являющийся разностью двух функций, обозначается  $M_{\Gamma}^{\varphi-}$ , а другой —  $P_{\Gamma}^{\varphi+}$ . В этих обозначениях  $\varphi-$  и  $\varphi+$  — 2-коциклы соответствующих кощепных комплексов.

В работе [5] было предложено понятие квазоида. Каждый квазоид представляет собой множество и отображение на нём. Аксиомы отображения мотивированы движениями Рейдемейстера диаграмм узлов и зацеплений. По сравнению с аксиомами квандла, которые основаны на взаимном расположении дуг диаграммы узла (или зацепления) до и после движений Рейдемейстера, аксиомы квазоида основаны на взаимном расположении областей, на которые эта диаграмма разбивает двумерную сферу. В более ранней работе [6] квазоиды называются «тернарными алгебрами», так как отображение, которое определяет квазоид, фактически является тернарной алгебраической операцией. В других работах (например в [7], [8]) квазоиды называются «tribracket».

В работе [9] построены два коциклических инварианта узлов и зацеплений, основанные на квазоидах, а не на квандлах. Стратегия построения инвариантов подобна той, что использовалась Д. Картером для случая квандлов. Точно также существует две версии коциклических инвариантов: «-»-версия, которая обозначается  $M_Q^{\psi-}$  и «+»-версия, которая обозначается  $P_Q^{\psi+}$ . В этих обозначениях  $Q$  — это конечный квазоид, а  $\psi-$  и  $\psi+$  — 2-коциклы соответствующих кощепных комплексов. Инвариант  $M_Q^{\psi-}$  также был описан в работе [6].

Однотипность конструкций инвариантов  $M_{\Gamma}^{\varphi-}$  и  $M_Q^{\psi-}$ , а также  $P_{\Gamma}^{\varphi+}$  и  $P_Q^{\psi+}$  наталкивает на соображение о том, что, возможно, квандлы и квазоиды с разных точек зрения выражают одно и то же свойство узлов. Может быть все эти инварианты являются следствием какого-то одного более общего инварианта, а возможно понятия квандла и квазоида в каком-нибудь смысле эквивалентны. Одна из попыток исследовать эту связь была предпринята в работе [8].

Основной целью настоящей работы является описание способа, с помощью которого можно нетривиальным образом скомбинировать коциклические квандровые и квазоидные инварианты. Для этого вводится понятие проекции квазоида на квандр. Каждая такая проекция — это отображение, которое должно удовлетворять двум условиям согласованности. С помощью проекции  $p$  каждая пара 2-коциклов  $(\varphi_-, \psi_-)$ , где  $\varphi_-$  — коцикл для цепного комплекса, построенного по квандру  $\Gamma$ , а  $\psi_-$  — коцикл для цепного комплекса, построенного по квазоиду  $Q$ , задаёт комбинированный инвариант  $M_{p,\Gamma,Q}^{\varphi_-,\psi_-}$ . Аналогичным образом определяется другая «+»-версия этого инварианта  $P_{p,\Gamma,Q}^{\varphi_+,\psi_+}$ .

Структура работы такова. В параграфе 2 даются все основные понятия, связанные с квандровыми коциклическими инвариантами ориентированных узлов и зацеплений. Приводится несколько стандартных примеров квандров. Далее описано, как каждый конечный квандр  $\Gamma$  порождает цепные комплексы  $C^-(\Gamma)$  и  $C^+(\Gamma)$ . После этого приводится полное описание инвариантов  $M_\Gamma^{\varphi_-}$  и  $P_\Gamma^{\varphi_+}$ .

Параграф 3 посвящён квазоидам. Сначала даётся определение квазоида и приводится несколько стандартных примеров квазоидов. После этого описывается, как каждый конечный квазоид  $Q$  порождает два цепных комплекса  $C^-(Q)$  и  $C^+(Q)$ . После этого приводится полное описание инвариантов  $M_Q^{\psi_-}$  и  $P_Q^{\psi_+}$ . Структура изложения полностью повторяет структуру параграфа 2, чтобы подчеркнуть аналогичность подходов, основанных на квандрах и на квазоидах.

В параграфе 4 вводится понятие проекции. Приводится несколько явных формул проекций для примеров, описанных в параграфах 2 и 3. Далее доказывается, что каждая проекция порождает цепное отображение цепных комплексов, построенных по квандрам и квазоидам. В конце даётся определение инвариантов  $M_{\Gamma,Q,p}^{\varphi_-,\psi_-}$  и  $P_{\Gamma,Q,p}^{\varphi_+,\psi_+}$ , а также доказывается их корректность.

## 2. КВАНДЛЫ

### 2.1. Понятие квандрла.

**Определение 1.** Пусть  $X$  — множество,  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  — бинарная алгебраическая операция на  $X$ . Пара  $(X, *)$  называется квандром, если выполнены следующие условия:

- (1) Для всех  $a \in X$ :  $a * a = a$ ;
- (2) Для любых  $a, b \in X$  существует единственный такой  $x \in X$ , что  $x * a = b$ ;
- (3) Для любых  $a, b, c \in X$ :  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ .

**Пример 1.** Приведём несколько стандартных примеров квандров.

- (1) Пусть  $X = \mathbb{Z}_n$ ,  $n \geq 1$ , и пусть операция  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  определена следующим образом:  $a * b = 2b - a \pmod n$ . Тогда пара  $(X, *)$  является квандром, который обозначается  $D_n$ .
- (2) Пусть  $X = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  — кольцо полиномов Лорана с целыми коэффициентами, и пусть на  $X$  операция  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  задана следующим образом:  $a * b = t \cdot a + (1 - t) \cdot b$ . Тогда пара  $(X, *)$  является квандром, который обозначается  $A_t$ .

- (3) Пусть  $G$  — произвольная группа, и пусть операция  $*$ :  $G \times G \rightarrow G$  задана следующим образом:  $a * b = b \cdot a \cdot b^{-1}$ , где произведение элементов вычисляется в группе  $G$ . Тогда пара  $(G, *)$  является квандромом, который обозначается  $\text{Conj}(G)$ .

Каждый конечный квандром порождает инвариант ориентированных узлов и зацеплений в трёхмерной сфере.

**Определение 2.** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — конечный квандром,  $D \subset S^2$  — диаграмма ориентированного узла или зацепления на двумерной сфере,  $A(D)$  — множество дуг этой диаграммы  $D$ , то есть множество участков диаграммы, начинающихся и заканчивающихся в нижних проходах. Отображение  $\xi: A(D) \rightarrow X$  называется правильной раскраской диаграммы  $D$ , если в каждой двойной точке этой диаграммы  $D$ :  $\xi(a_1) * \xi(a_2) = \xi(a_3)$ , где  $a_1, a_2, a_3$  — дуги диаграммы, инцидентные двойной точке, дуга  $a_2$  является самой верхней, дуга  $a_1$  расположена справа от неё, а дуга  $a_3$  — слева (см. рис. 1).

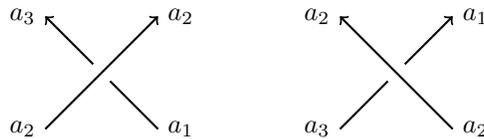


Рис. 1. Дуги  $a_1, a_2$  и  $a_3$  в окрестности положительной двойной точки (слева) и отрицательной (справа)

Обозначим  $\text{Col}_\Gamma(D)$  множество всех правильных раскрасок диаграммы  $D$  элементами квандром  $\Gamma$ . Можно доказать (см. [1]), что если  $D_1$  и  $D_2$  — две диаграммы ориентированного узла (или зацепления)  $K$ , то  $|\text{Col}_\Gamma(D_1)| = |\text{Col}_\Gamma(D_2)|$ . Следовательно, число  $\mathbb{C}_\Gamma(K) = |\text{Col}_\Gamma(D_i)|$ ,  $i = 1, 2$ , является корректно определённым инвариантом ориентированного узла (или зацепления)  $K$ .

**2.2. Цепные комплексы  $\mathcal{C}^-(\Gamma)$  и  $\mathcal{C}^+(\Gamma)$ .** Для каждого конечного квандром  $\Gamma = (X, *)$  построим два цепных комплекса  $\mathcal{C}^-(\Gamma)$  и  $\mathcal{C}^+(\Gamma)$ . Для этого, как обычно, надо определить группы цепей этих комплексов и граничные гомоморфизмы.

Определим  $C_n(\Gamma)$  при  $n \geq 1$  как абелеву группу, состоящую из формальных линейных комбинаций с целыми коэффициентами наборов  $(x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_i \in X$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Положим  $C_n(\Gamma) = 0$  при  $n \leq 0$ . Зададим два отображения  $l_n, r_n: C_n(\Gamma) \rightarrow C_{n-1}(\Gamma)$  при  $n \geq 2$  на образующих группы  $C_n(\Gamma)$  следующим образом:

$$l_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$r_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

При  $n \leq 1$  положим  $l_n = r_n = 0$ . У отображений  $l_n$  и  $r_n$  есть наглядный геометрический смысл. Рассмотрим диаграммы двух ориентированных танглов  $TL^i, TR^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , на  $n$  нитях (см. рис. 2). У этих танглов все нити, кроме нити с номером  $i \in \{1, \dots, n\}$ , расположены вертикально, а  $i$ -ая нить уходит влево в тангле  $TL^i$  и вправо в тангле  $TR^i$ . Пусть  $x_1, \dots, x_n \in X$  — цвета дуг,

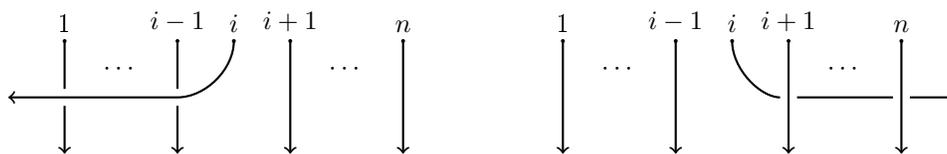


Рис. 2. Танглы  $TL^i$  (слева) и  $TR^i$  справа

инцидентных верхним концевым точкам этих диаграмм. Тогда набор в  $i$ -ом слагаемом в выражении для  $l_n(x_1, \dots, x_n)$  — это такой набор цветов дуг, инцидентных нижним концевым точкам диаграммы  $TL^i$ , что в каждой двойной точке раскраска дуг является правильной. Аналогичным образом каждый набор в  $i$ -ом слагаемом в выражении для  $r_n(x_1, \dots, x_n)$  — это такой набор цветов дуг, инцидентных нижним концевым точкам диаграммы  $TR^i$ , что в каждой двойной точке раскраска дуг тоже является правильной (см. рис. 3).

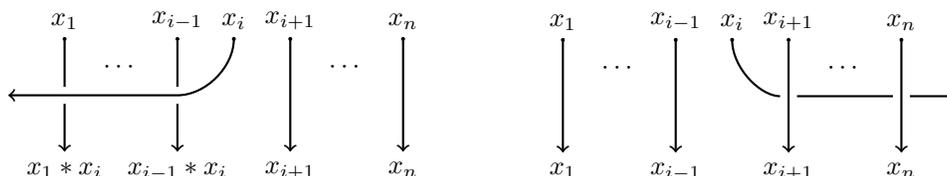


Рис. 3. Правильные раскраски дуг диаграмм танглов  $TL^i$  (слева) и  $TR^i$  (справа)

Пусть при  $n \geq 2$  подгруппа  $E_n(\Gamma) \subseteq C_n(\Gamma)$  порождена всеми такими наборами  $(x_1, \dots, x_n)$ , что  $x_i = x_{i+1}$  хотя бы для одного  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Положим  $E_n(\Gamma) = 0$  при  $n \leq 1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — конечный квандл. Тогда справедливо следующее:

- (1)  $l_{n-1} \circ l_n = 0$  и  $r_{n-1} \circ r_n = 0$ ;
- (2)  $l_{n-1} \circ r_n + r_{n-1} \circ l_n = 0$ ;
- (3)  $l_n(E_n(\Gamma)) \subset E_{n-1}(\Gamma)$  и  $r_n(E_n(\Gamma)) \subset E_{n-1}(\Gamma)$ .

Первые два утверждения теоремы 1 доказаны в [4, Лемма 3.1], а третье утверждение доказано в [4, Лемма 3.2].

Теперь мы готовы определить цепные комплексы  $C^-(\Gamma)$  и  $C^+(\Gamma)$ . Их группами цепей являются фактор-группы  $C_n(\Gamma)/E_n(\Gamma)$ . Для комплекса  $C^-(\Gamma)$  граничным гомоморфизмом  $d_n^-: C_n(\Gamma)/E_n(\Gamma) \rightarrow C_{n-1}(\Gamma)/E_{n-1}(\Gamma)$  является отображение  $d_n^- = l_n - r_n$ , а для комплекса  $C^+(\Gamma)$  граничным гомоморфизмом  $d_n^+: C_n(\Gamma)/E_n(\Gamma) \rightarrow C_{n-1}(\Gamma)/E_{n-1}(\Gamma)$  является отображение  $d_n^+ = l_n + r_n$ . Теорема 1 гарантирует, что комплексы  $C^-(\Gamma)$  и  $C^+(\Gamma)$  определены корректно.

**2.3. Коциклические инварианты  $M_\Gamma^{\varphi^-}$  и  $P_\Gamma^{\varphi^+}$ .** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — конечный квандл,  $C^-(\Gamma)$  и  $C^+(\Gamma)$  — цепные комплексы, а  $C_-(\Gamma)$  и  $C_+(\Gamma)$  — соответствующие им коцепные комплексы. Обозначим  $C^n(\Gamma)$  их группы коцепей, а  $d_-^n: C^{n-1}(\Gamma) \rightarrow C^n(\Gamma)$  и  $d_+^n: C^{n-1}(\Gamma) \rightarrow C^n(\Gamma)$  кограничные гомоморфизмы, соответствующие граничным гомоморфизмам  $d_n^-$  и  $d_n^+$  соответственно.

2.3.1. *Инвариант  $M_{\Gamma}^{\varphi_-}$ .* Инвариант  $M_{\Gamma}^{\varphi_-}$  полностью определяется выбором 2-коцикла  $\varphi_- \in \ker d_-^3$ . Опишем конструкцию этого инварианта. Пусть  $D$  — диаграмма ориентированного узла (или зацепления)  $K$  на двумерной сфере,  $A(D)$  — множество дуг этой диаграммы, и пусть  $\xi: A(D) \rightarrow \Gamma$  — правильная раскраска. Каждой двойной точке  $v$  диаграммы  $D$  сопоставим её вес  $w_{\xi, \varphi_-}(D, v)$ , который определяется следующим образом:  $w_{\xi, \varphi_-}(D, v) = \varepsilon(v) \cdot \varphi_-(a, b)$ , где  $\varepsilon(v)$  обозначает знак двойной точки  $v$ . Значения  $a, b \in \Gamma$  — это цвета дуг в окрестности двойной точки  $v$  (см. рис. 4). Раскраске  $\xi: A(D) \rightarrow \Gamma$  сопоставим число  $w_{\xi, \varphi_-}(D) = \sum_v w_{\xi, \varphi_-}(D, v)$ , где суммирование берётся по всем двойным точкам диаграммы  $D$ . Окончательно

$$M_{\Gamma}^{\varphi_-}(D) = \sum_{\xi \in \text{Col}_{\Gamma}(D)} x^{w_{\xi, \varphi_-}(D)}.$$

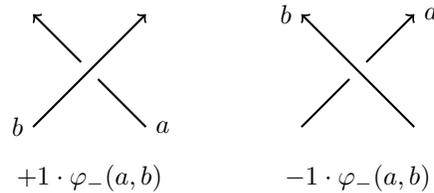


Рис. 4. Вес  $w_{\xi, \varphi_-}(D, v)$  положительной двойной точки (слева) и отрицательной (справа)

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — конечный квадл,  $\varphi_- \in \ker d_-^3$  — 2-коцикл коцепного комплекса  $C_-(\Gamma)$ . Тогда:

- (1) Для любых двух диаграмм  $D_1, D_2$  ориентированного узла (или зацепления)  $K$ :  $M_{\Gamma}^{\varphi_-}(D_1) = M_{\Gamma}^{\varphi_-}(D_2)$ ;
- (2) Если  $\eta_- \in \ker d_-^3$  — другой 2-коцикл, когомологичный коциклу  $\varphi_-$ , то  $M_{\Gamma}^{\varphi_-} = M_{\Gamma}^{\eta_-}$ .

Утверждения теоремы 2 доказаны в [3]. Основное наблюдение, которое используется при доказательстве первого утверждения, состоит в следующем. Каждый 2-коцикл  $\varphi_- \in \ker d_-^3$  удовлетворяет двум соотношениям

- (1)  $\varphi_-(x, x) = x$  для всех  $x \in \Gamma$ .
- (2)  $\varphi_-(x_1, x_3) - \varphi_-(x_1, x_2) + \varphi_-(x_1 * x_3, x_2 * x_3) - \varphi_-(x_1 * x_2, x_3) = 0$  для любых  $x_1, x_2, x_3 \in \Gamma$ .

Этих соотношений достаточно для того, чтобы значение функции  $M_{\Gamma}^{\varphi_-}$  не менялось при движениях Рейдемейстера диаграмм ориентированных узлов и зацеплений. Таким образом, значение  $M_{\Gamma}^{\varphi_-}$  является корректно определённым инвариантом ориентированных узлов и зацеплений. Этот инвариант принимает значение в кольце полиномов Лорана одной неизвестной  $x$  с целыми коэффициентами.

2.3.2. *Инвариант  $P_{\Gamma}^{\varphi_+}$ .* Инвариант  $P_{\Gamma}^{\varphi_+}$  определяется выбором 2-коцикла  $\varphi_+ \in d_+^3$ . Способ построения этого инварианта похож на способ для  $M_{\Gamma}^{\varphi_-}$ . Отличие состоит в том, каким образом для каждой двойной точки  $v$  правильно раскрашенной диаграммы  $D \subset \mathbb{R}^2$  ориентированного узла (или зацепления)

$K \subset \mathbb{R}^3$  определяется знак её веса  $w_{\xi, \varphi_+}(D, v)$ . Для этого рассмотрим шахматную раскраску областей диаграммы  $D$  (при такой раскраске каждая точка дуг диаграммы, отличная от двойной точки, инцидентна областям разных цветов). Можно считать, что самая внешняя область диаграммы имеет белый цвет. Определим вес двойной точки  $v$  следующим образом:  $w_{\xi, \varphi_+}(D, v) = \varepsilon_{ch}(v) \cdot \varphi_+(a, b)$ , где  $\varepsilon_{ch}(v) = +1$ , если двойная точка  $v$  является положительной и чёрные области примыкают к ней так, как изображено на рисунке 5 слева, либо она является отрицательной, и чёрные области примыкают к ней так, как изображено на рисунке 5 справа. Для остальных двух случаев  $\varepsilon_{ch}(v) = -1$  (рисунок 5 в центре). В формуле для  $w_{\xi, \varphi_+}(D, v)$  величины  $a$  и  $b$  являются цветами дуг в окрестности двойной точки  $v$ , расположенных так, как изображено на рисунке 1.

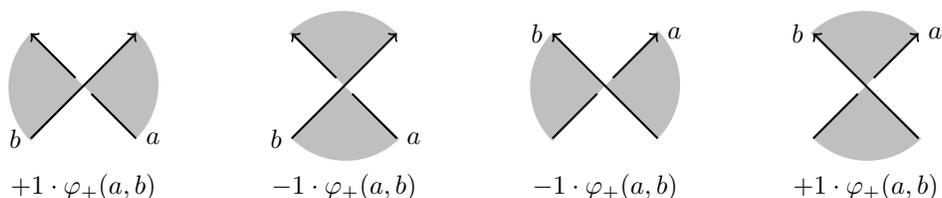


Рис. 5. Значения весов  $w_{\xi, \varphi_+}(D, v)$  в зависимости от типа двойной точки  $v$  и чёрных областей в её окрестности

Обозначим  $w_{\xi, \varphi_+}(D) = \sum_v w_{\xi, \varphi_+}(D, v)$ , где сумма берётся по всем двойным точкам диаграммы  $D$ , и  $\xi: A(D) \rightarrow \Gamma$  — правильная раскраска. Окончательно

$$P_{\Gamma}^{\varphi_+}(D) = \sum_{\xi \in \text{Col}_{\Gamma}(D)} x^{w_{\xi, \varphi_+}(D)}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — конечный квандл,  $\varphi_+ \in \ker d_+^3$  — 2-коцикл коцепного комплекса  $C_+(\Gamma)$ . Тогда:

- (1) Для любых двух диаграмм  $D_1, D_2$  ориентированного узла (или зацепления)  $K$ :  $P_{\Gamma}^{\varphi_+}(D_1) = P_{\Gamma}^{\varphi_+}(D_2)$ ;
- (2) Если  $\eta_+ \in \ker d_+^3$  — другой 2-коцикл, когомологичный коциклу  $\varphi_+$ , то  $P_{\Gamma}^{\eta_+} = P_{\Gamma}^{\varphi_+}$ .

Утверждения теоремы доказаны в [4, Теорема 5.1]. Основной момент при доказательстве первого утверждения состоит в том, что если  $\varphi_+ \in \ker d_+^3$ , то этот 2-коцикл удовлетворяет следующим соотношениям:

- (1)  $\varphi_+(x, x) = 0$  для всех  $x \in \Gamma$ ;
- (2)  $\varphi_+(x_1, x_2) - \varphi_+(x_1, x_3) + 2\varphi_+(x_2, x_3) - \varphi_+(x_1 * x_2, x_3) + \varphi_+(x_1 * x_3, x_2 * x_3) = 0$  для любых  $x_1, x_2, x_3 \in \Gamma$ .

Этих двух соотношений достаточно для того, чтобы значение функции  $P_{\Gamma}^{\varphi_+}$  не менялось при движениях Рейдемейстера диаграмм.

### 3. КВАЗОИДЫ

#### 3.1. Понятие квазоида.

**Определение 3.** Пусть  $Y$  — множество,  $[\cdot, \cdot, \cdot]: Y \times Y \times Y \rightarrow Y$  — отображение трёх аргументов, которое удовлетворяет следующим условиям:

- (1) Уравнение  $[a, b, c] = d$  однозначно разрешимо по каждому из трёх аргументов  $a, b, c \in Y$ , то есть
  - (а) для любых  $b, c, d \in Y$  существует единственное такое  $a \in Y$ , что  $[a, b, c] = d$ ;
  - (б) для любых  $a, c, d \in Y$  существует единственное такое  $b \in Y$ , что  $[a, b, c] = d$ ;
  - (в) для любых  $a, b, d \in Y$  существует единственное такое  $c \in Y$ , что  $[a, b, c] = d$ ;
- (2) Для любых  $a, b, c, d \in Y$ :  $[a, b, [b, c, d]] = [a, [a, b, c], [[a, b, c], c, d]]$ ;
- (3) Для любых  $a, b, c, d \in Y$ :  $[[a, b, c], c, d] = [[a, b, [b, c, d]], [b, c, d], d]$ .

Тогда пара  $(Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  называется квазоидом.

**Пример 2.** Приведём несколько стандартных примеров квазоидов.

- (1) Пусть  $Y = \mathbb{Z}[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$  — кольцо полиномов Лорана двух переменных  $\alpha, \beta$  с целыми коэффициентами, и пусть  $[a, b, c] = \alpha \cdot a - \alpha\beta \cdot b + \beta \cdot c$ . Тогда пара  $(Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  является квазоидом, который обозначается  $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ .
- (2) Пусть  $G$  — группа, и пусть отображение  $[\cdot, \cdot, \cdot]: G \times G \times G \rightarrow G$  задано следующим образом:  $[a, b, c] = a \cdot b^{-1} \cdot c$ , где произведение выполняется в  $G$ . Тогда пара  $(G, [\cdot, \cdot, \cdot])$  является квазоидом, который обозначается  $Q_G$ .

**Определение 4.** Пусть  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид,  $D \subset S^2$  — диаграмма ориентированного узла (или зацепления)  $K$ ,  $\mathcal{A}(D)$  — множество областей, на которые диаграмма  $D$  разбивает двумерную сферу  $S^2$ . Отображение  $\xi: \mathcal{A}(D) \rightarrow Y$  называется правильной раскраской, если в окрестности каждой двойной точки диаграммы  $D$ :  $[\xi(a_1), \xi(a_2), \xi(a_3)] = \xi(a_4)$ , где  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathcal{A}(D)$  — области диаграммы, примыкающие к двойной точке так, как изображено на рисунке 6.

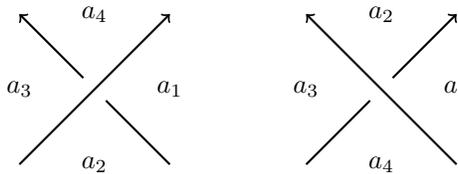


Рис. 6. Области  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$  в окрестности положительной (слева) и отрицательной (справа) двойной точки

Обозначим  $Col_Q(D)$  множество всех правильных раскрасок областей диаграммы  $D$  элементами квазоида  $Q$ . Можно доказать (см. [5]), что если  $D_1, D_2$  — две диаграммы одного и того же узла (или зацепления)  $K$ , то  $|Col_Q(D_1)| = |Col_Q(D_2)|$ . Поэтому число  $\mathbb{C}_Q(K) = |Col_Q(D_i)|$ ,  $i = 1, 2$ , является корректно определённым инвариантом ориентированного узла (или зацепления)  $K$ .

**3.2. Цепные комплексы  $C^+(Q)$  и  $C^-(Q)$ .** Пусть  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид. Определим  $C_n(Q)$  при  $n \geq 0$  как абелеву группу, состоящую из формальных линейных комбинаций всех возможных наборов  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ ,  $y_i \in Y$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ , с целыми коэффициентами. Положим  $C_n(Q) = 0$  при  $n < 0$ .

Зададим отображения  $\lambda_n, \rho_n: C_n(Q) \rightarrow C_{n-1}(Q)$  при  $n \geq 1$  на образующих группы  $C_n(Q)$  следующим образом:

$$\lambda_n(y_0, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} L_{n,i}(y_0, \dots, y_n),$$

$$\rho_n(y_0, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} R_{n,i}(y_0, \dots, y_n),$$

где  $L_{n,i}(y_0, \dots, y_n) = (l_{n,i}^0, \dots, l_{n,i}^{n-1})$ ,  $R_{n,i}(y_0, \dots, y_n) = (r_{n,i}^0, \dots, r_{n,i}^{n-1})$  и значения  $l_{n,i}^j$  и  $r_{n,i}^j$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} l_{n,i}^j &= y_{j+1}, \text{ если } j \geq i-1, & r_{n,i}^j &= y_j, \text{ если } j \leq i-1, \\ l_{n,i}^{i-2} &= [y_{i-2}, y_{i-1}, y_i], & r_{n,i}^i &= [y_{i-1}, y_i, y_{i+1}], \\ l_{n,i}^{i-3} &= [y_{i-3}, y_{i-2}, l_{n,i}^{i-2}], & r_{n,i}^{i+1} &= [r_{n,i}^i, y_{i+1}, y_{i+2}], \\ &\vdots & &\vdots \\ l_{n,i}^0 &= [y_0, y_1, l_{n,i}^1], & r_{n,i}^{n-1} &= [r_{n,i}^{n-2}, y_{n-1}, y_n]. \end{aligned}$$

Положим  $\lambda_n = \rho_n = 0$  при  $n \leq 0$ .

Отображения  $L_{n,i}$  и  $R_{n,i}$ , хоть и записываются громоздко, однако имеют простой геометрический смысл. Точно так же, как при построении цепных комплексов для квандлов, рассмотрим два тангла  $TL^i, TR^i, i = 1, \dots, n$ , изображённые на рисунке 2. Если  $(y_0, \dots, y_n)$  — это цвета областей, примыкающих к верхнему краю диаграмм  $TL^i$  и  $TR^i$ , то  $L_{n,i}(y_0, \dots, y_n)$  и  $R_{n,i}(y_0, \dots, y_n)$  — это такие цвета областей, примыкающих к нижнему краю диаграмм  $TL^i$  и  $TR^i$  соответственно, что в окрестности каждой двойной точки раскраски областей являются правильными (см. рис. 7).

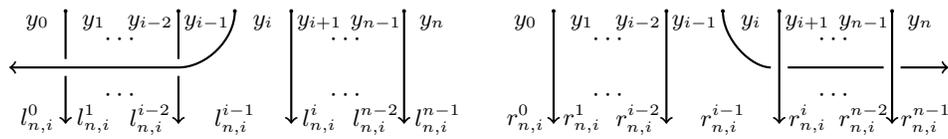


Рис. 7. Правильные раскраски областей диаграмм танглов  $TL^i$  (слева) и  $TR^i$  (справа)

Пусть при  $n \geq 2$  подгруппы  $E_n(Q) \subseteq C_n(Q)$  порождено всем такими наборами  $(y_0, \dots, y_n)$ ,  $y_i \in Y$  для всех  $i = 0, \dots, n$ , что найдётся такое  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , что  $[y_{j-1}, y_j, y_{j+1}] = y_j$ . Положим  $E_n(Q) = 2$  при  $n \leq 1$ .

**Теорема 4.** Пусть  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1)  $\lambda_{n-1} \circ \lambda_n = 0$  и  $\rho_{n-1} \circ \rho_n = 0$ ;
- (2)  $\lambda_{n-1} \circ \rho_n + \rho_{n-1} \circ \lambda_n = 0$
- (3)  $\lambda_n(E_n(Q)) \subset E_{n-1}(Q)$  и  $\rho_n(E_n(Q)) \subset E_{n-1}(Q)$ .

Первые два утверждения этой теоремы доказаны в [9, Теорема 1], а третье утверждение доказано в [9, Теорема 2].

Цепной комплекс  $\mathcal{C}^-(Q)$  определяется следующим образом: его группами цепей являются фактор-группы  $C_n(Q)/E_n(Q)$ , а граничные гомоморфизмы  $\partial_n^- : C_n(Q)/E_n(Q) \rightarrow C_{n-1}(Q)/E_{n-1}(Q)$  задаются формулой  $\partial_n^- = \lambda_n - \rho_n$ . Цепной комплекс  $\mathcal{C}^+(Q)$  определяется аналогичным образом: его группами цепей являются те же самые фактор-группы  $C_n(Q)/E_n(Q)$ , а граничные гомоморфизмы  $\partial_n^+ : C_n(Q)/E_n(Q) \rightarrow C_{n-1}(Q)/E_{n-1}(Q)$  задаются формулой  $\partial_n^+ = \lambda_n + \rho_n$ . Утверждения теоремы 4 гарантируют, что комплексы  $\mathcal{C}^-(Q)$  и  $\mathcal{C}^+(Q)$  корректно определены.

**3.3. Коциклические инварианты  $\mathcal{M}_Q^{\psi_-}$  и  $\mathcal{P}_Q^{\psi_+}$ .** Пусть  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид,  $\mathcal{C}^-(Q)$  и  $\mathcal{C}^+(Q)$  — цепные комплексы, а  $\mathcal{C}_-(Q)$  и  $\mathcal{C}_+(Q)$  — соответствующие им коцепные комплексы. Обозначим  $C_-^n(Q)$  и  $C_+^n(Q)$  — группы коцепей этих коцепных комплексов, а  $\partial_n^- : C_-^{n-1}(Q) \rightarrow C_-^n(Q)$  и  $\partial_n^+ : C_+^{n-1}(Q) \rightarrow C_+^n(Q)$  — кограничные гомоморфизмы, соответствующие граничным гомоморфизмам  $\partial_n^-$  и  $\partial_n^+$ .

**3.3.1. Инвариант  $\mathcal{M}_Q^{\psi_-}$ .** Пусть  $\psi_- \in \ker \partial_-^3$  — 2-коцикл в группе коцепей  $C^2(Q)$  коцепного комплекса  $\mathcal{C}_-(Q)$ , и пусть  $D \subset S^2$  — диаграмма ориентированного узла (или зацепления)  $K$ . Каждой правильной раскраске  $\xi : \mathcal{A}(D) \rightarrow Y$  областей, на которые диаграмма  $D$  разбивает  $S^2$ , сопоставим её вес  $\omega_{\xi, \psi_-}(D)$ , который определяется следующим образом:

$$\omega_{\xi, \psi_-}(D) = \sum_v \omega_{\xi, \psi_-}(D, v),$$

где суммирование берётся по всем двойным точкам  $v$  диаграммы  $D$ , а  $\omega_{\xi, \psi_-}(D, v)$  — вес двойной точки  $v$ , который определяется так:

$$\omega_{\xi, \psi_-}(D, v) = \varepsilon(v) \cdot \psi_-(\xi(a_1), \xi(a_2), \xi(a_3)),$$

где  $\varepsilon(v)$  обозначает знак двойной точки  $v$ , и  $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}(D)$  — области диаграммы, которые примыкают к двойной точке  $v$  так, как изображено на рисунке 6. Окончательно

$$\mathcal{M}_Q^{\psi_-}(D) = \sum_{\xi \in \text{Col}_Q(D)} y^{\omega_{\xi, \psi_-}(D)}.$$

**Теорема 5.** Пусть  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид,  $\psi_- \in \ker \partial_-^3$  — 2-коцикл коцепного комплекса  $\mathcal{C}_-(Q)$ . Тогда:

- (1) Для любых двух диаграмм  $D_1$  и  $D_2$  ориентированного узла (или зацепления)  $K$ :  $\mathcal{M}_Q^{\psi_-}(D_1) = \mathcal{M}_Q^{\psi_-}(D_2)$ ;
- (2) Если  $\zeta_- \in \ker \partial_-^3$  — другой 2-коцикл, когомологичный коциклу  $\psi_-$ , то  $\mathcal{M}_Q^{\psi_-} = \mathcal{M}_Q^{\zeta_-}$ .

Первое утверждение теоремы доказано в [9, Теорема 5] и в работе [?]. Второе утверждение теоремы доказано в [9, Теорема 6]. Основной момент, который используется при доказательстве первого утверждения, состоит в том, что если  $\psi_- \in \ker \partial_-^3$ , то выполняются следующие соотношения:

- (1) Если  $[a, b, c] = b$  для некоторых  $a, b, c \in Y$ , то  $\psi_-(a, b, c) = 0$ ;

(2) Для всех  $a, b, c, d \in Y$ :

$$\begin{aligned} \psi_-(a, b, c) + \psi_-([a, b, c], c, d) + \psi_-(a, [a, b, c], [[a, b, c], c, d]) = \\ = \psi_-(b, c, d) + \psi_-(a, b, [b, c, d]) + \psi_-([a, b, [b, c, d]], [b, c, d], d). \end{aligned}$$

Этих условий достаточно для того, чтобы значение  $\mathcal{M}_Q^{\psi_-}$  не менялось при преобразованиях Рейдемейстера.

3.3.2. *Инвариант  $\mathcal{P}_Q^{\psi_+}$ .* Пусть  $\psi_+ \in \ker \partial_+^3$  — 2-коцикл коцепного комплекса  $\mathcal{C}_+(Q)$ . Конструкция инварианта  $\mathcal{P}_Q^{\psi_+}$  аналогична конструкции инварианта  $\mathcal{M}_Q^{\psi_-}$ , и она отличается ровно тем же самым, чем отличаются конструкции инвариантов  $M_\Gamma^{\varphi_-}$  и  $P_\Gamma^{\varphi_+}$  для 2-коциклов  $\varphi_-$  и  $\varphi_+$  коцепных комплексов  $\mathcal{C}_-(\Gamma)$  и  $\mathcal{C}_+(\Gamma)$  соответственно для конечного квандла  $\Gamma$ .

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^2$  — диаграмма на плоскости ориентированного узла (или зацепления)  $K \subset \mathbb{R}^3$ , и пусть зафиксирована такая шахматная раскраска областей  $\mathcal{A}(D)$ , на которые диаграмма  $D$  разбивает плоскость  $\mathbb{R}^2$ , что самая внешняя область является белой. Пусть  $\xi: \mathcal{A}(D) \rightarrow Y$  — правильная раскраска областей  $\mathcal{A}(D)$  элементами квазоида  $Q$ . Определим её вес

$$\omega_{\xi, \psi_+}(D) = \sum_v \omega_{\xi, \psi_+}(D, v),$$

где суммирование берётся по всем двойным точкам  $v$  диаграммы  $D$ , и вес  $\omega_{\xi, \psi_+}(D, v)$  каждой такой двойной точки  $v$  вычисляется по следующей формуле:

$$\omega_{\xi, \psi_+}(D, v) = \varepsilon_{ch}(v) \cdot \psi_+(\xi(a_1), \xi(a_2), \xi(a_3)),$$

где  $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}(D)$  — области, примыкающие к двойной точке  $v$  так, как изображено на рисунке 6. Окончательно

$$\mathcal{P}_Q^{\psi_+}(D) = \sum_{\xi \in \text{Col}_Q(D)} y^{\omega_{\xi, \psi_+}(D)}.$$

**Теорема 6.** Пусть  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид,  $\psi_+ \in \ker \partial_+^3$  — 2-коцикл коцепного комплекса  $\mathcal{C}_+(Q)$ . Тогда:

- (1) Для любых двух диаграмм  $D_1$  и  $D_2$  ориентированного узла (или зацепления)  $K$ :  $\mathcal{P}_Q^{\psi_+}(D_1) = \mathcal{P}_Q^{\psi_+}(D_2)$ ;
- (2) Если  $\zeta_+ \in \ker \partial_+^3$  — другой 2-коцикл, когомологичный коциклу  $\psi_+$ , то  $\mathcal{P}_Q^{\psi_+} = \mathcal{P}_Q^{\zeta_+}$ .

Первое утверждение теоремы доказано в [9, Теорема 7], а второе утверждение в [9, Теорема 8]. Основное наблюдение, которое при этом используется, состоит в том, что если  $\psi_+ \in \ker \partial_+^3$ , то справедливы следующие соотношения:

- (1) Если  $[a, b, c] = b$ , то  $\psi_+(a, b, c) = 0$ ;
- (2) Для всех  $a, b, c, d \in Y$ :

$$\begin{aligned} \psi_+(a, b, c) - \psi_+([a, b, c], c, d) + \psi_+(a, [a, b, c], [[a, b, c], c, d]) = \\ = -\psi_+(b, c, d) + \psi_+(a, b, [b, c, d]) - \psi_+([a, b, [b, c, d]], [b, c, d], d). \end{aligned}$$

Этих условий достаточно для доказательства того, что значение функции  $\mathcal{P}_Q^{\psi_+}$  не меняется при преобразованиях Рейдемейстера.

## 4. ПРОЕКЦИИ

**Определение 5.** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — квандл,  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — квазоид. отображение  $p: Y \times Y \rightarrow X$  называется проекцией, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

- (1) Для любых  $a, b, c \in Y: p(a, [a, b, c]) = p(b, c)$ ;
- (2) Для любых  $a, b, c \in Y: p([a, b, c], c) = p(a, b) * p(b, c)$ .

Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — квандл,  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — квазоид. С геометрической точки зрения каждая проекция индуцирует раскраску дуг диаграммы ориентированного узла или зацепления по раскраске областей этой диаграммы. Если справа к дуге диаграммы примыкает область цвета  $c_1 \in Y$ , а слева — цвета  $c_2 \in Y$ , то  $p(c_1, c_2)$  — это индуцированный цвет дуги (см. рис. 8 слева). Аксиомы проекции гарантируют, что если в окрестности положительной двойной точки раскраска областей была правильной, то индуцированная ею раскраска дуг является, во-первых, корректно определённой раскраской, и, во-вторых, она тоже правильная (см. рис. 8 справа). В частности, для каждой диаграммы  $D$  ориентированного узла (или зацепления)  $K$  каждая проекция  $p: Y \times Y \rightarrow X$  индуцирует корректно определённое отображение  $p_{col}: Col_Q(D) \rightarrow Col_\Gamma(D)$ .

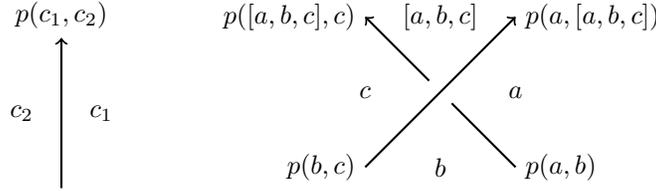


Рис. 8. Цвет дуги диаграммы, к которой примыкают области цветов  $c_1, c_2$  (слева), и цвета областей и дуг диаграммы в окрестности положительной двойной точки (справа)

**Пример 3.** Приведём несколько примеров проекций для квандлов и квазоидов из примеров 1 и 2.

- (1) Пусть  $G$  — группа,  $Conj(G) = (G, *)$  и  $Q_G = (G, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — соответствующие квандл и квазоид. Напомним, что в этом случае

$$a * b = bab^{-1} \text{ и } [a, b, c] = ab^{-1}c.$$

Тогда отображение  $p: G \times G \rightarrow G$ , заданное формулой  $p(a, b) = b^{-1}a$  является проекцией. В самом деле, проверим первую аксиому проекции:

$$p(a, [a, b, c]) = p(a, ab^{-1}c) = (ab^{-1}c)^{-1}a = c^{-1}b = p(b, c).$$

Далее проверим вторую аксиому проекции. С одной стороны

$$p([a, b, c], c) = p(ab^{-1}c, c) = c^{-1}ab^{-1}c.$$

С другой стороны

$$p(a, b) * p(b, c) = (b^{-1}a) * (c^{-1}b) = c^{-1}bb^{-1}ab^{-1}c = c^{-1}ab^{-1}c.$$

Следовательно  $p([a, b, c], c) = p(a, b) * p(b, c)$ .

- (2) Рассмотрим квандл  $A_t = (\mathbb{Z}[t, t^{-1}], *)$ ,  $a * b = ta + (1 - t)b$ , и квазоид  $\mathcal{L}_{t,1} = (\mathbb{Z}[t, t^{-1}], [\cdot, \cdot, \cdot])$ ,  $[a, b, c] = ta - tb + c$ . Этот квазоид  $\mathcal{L}_{t,1}$  получается из квазоида, описанного во втором пункте примера 2, взятием  $\alpha = t$  и  $\beta = 1$ .

Тогда отображение  $p: \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \times \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , заданное формулой  $p(a, b) = x \cdot (b - t \cdot a)$  является проекцией при любом  $x \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . В самом деле, проверим первую аксиому проекции:

$$p(a, [a, b, c]) = p(a, ta - tb + c) = x \cdot (ta - tb + c - ta) = x \cdot (c - tb) = p(b, c).$$

Далее проверим вторую аксиому проекции. С одной стороны

$$\begin{aligned} p([a, b, c], c) &= p(ta - tb + c, c) = x \cdot (c - t \cdot (ta - tb + c)) = \\ &= x \cdot (-t^2a + t^2b - tc + c). \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} p(a, b) * p(b, c) &= (x \cdot (b - ta)) * (x \cdot (c - tb)) = \\ &= t \cdot (x \cdot (b - ta)) + (1 - t) \cdot (x \cdot (c - tb)) = \\ &= txb - t^2xa + xc - txb - txc + t^2xb = x \cdot (-t^2a + t^2b - tc + c). \end{aligned}$$

Следовательно  $p([a, b, c], c) = p(a, b) * p(b, c)$ .

- (3) Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — квандл,  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — квазоид, и пусть зафиксирован  $x \in X$ . Тогда отображение  $t^x: Y \times Y \rightarrow X$ , определённое равенством

$$t^x(a, b) = x \text{ для любых } a, b \in Y,$$

является проекцией.

**4.1. Цепные отображения  $p_*^-$  и  $p_*^+$ .** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — конечный квандл,  $C_n(\Gamma)$  — множество формальных линейных комбинаций с целыми коэффициентами всех наборов  $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$  при  $n \geq 1$ , и  $C_n(\Gamma) = 0$  при  $n \leq 0$ . Пусть  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид, и пусть  $C_n(Q)$  — множество формальных линейных комбинаций с целыми коэффициентами всех наборов  $(y_0, \dots, y_n) \in Y^{n+1}$  при  $n \geq 0$ , и  $C_n(Q) = 0$  при  $n < 0$ . Если  $p: Y \times Y \rightarrow X$  — проекция, то для всех  $n \geq 1$  определим отображение  $p_n: C_n(Q) \rightarrow C_n(\Gamma)$  следующим образом:

$$p_n(y_0, \dots, y_n) = (p(y_0, y_1), p(y_1, y_2), \dots, p(y_{n-1}, y_n)),$$

а на все остальные элементы множества  $C_n(Q)$  значение отображения  $p_n$  продолжим по линейности. Положим  $p_n = 0$  при  $n \leq 0$ .

**Теорема 7.** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — конечный квандл,  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид, и пусть  $p: Y \times Y \rightarrow X$  — проекция. Тогда для всех  $n \geq 1$ :

- (1)  $p_{n-1}(\lambda_n(y_0, \dots, y_n)) = l_n(p_n(y_0, \dots, y_n))$ ;
- (2)  $p_{n-1}(\rho_n(y_0, \dots, y_n)) = r_n(p_n(y_0, \dots, y_n))$ ;
- (3) Если  $(y_0, \dots, y_n) \in E_n(Q)$ , то  $p_n(y_0, \dots, y_n) \in E_n(\Gamma)$ .

*Доказательство.* С одной из точек зрения справедливость теоремы следует из геометрического смысла отображений  $l_n, r_n: C_n(\Gamma) \rightarrow C_{n-1}(\Gamma)$  и  $\lambda_n, \rho_n: C_n(Q) \rightarrow C_{n-1}(Q)$ . Каждое отображение  $p_n$ ,  $n \geq 1$  переводит правильную раскраску областей танглов  $TL^i$  и  $TR^i$  (см. рис. 2),  $i = 1, \dots, n$ , в правильную раскраску дуг этих же танглов.

Дадим независимое от геометрического смысла чисто алгебраическое доказательство, которое опирается только на аксиомы проекции и на определение отображений  $l_n, r_n, \lambda_n$  и  $\rho_n$ .

Докажем первое утверждение. Так как

$$\lambda_n(y_0, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot (l_{n,i}^0, \dots, l_{n,i}^{n-1}),$$

и

$$l_n(p_n(y_0, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot (p(y_0, y_1) * p(y_{i-1}, y_i), \dots \\ \dots, p(y_{i-2}, y_{i-1}) * p(y_{i-1}, y_i), p(y_i, y_{i+1}), \dots, p(y_{n-1}, y_n)),$$

то достаточно показать, что

$$p_{n-1}(l_{n,i}^0, \dots, l_{n,i}^{n-1}) = (p(y_0, y_1) * p(y_{i-1}, y_i), \dots \\ \dots, p(y_{i-2}, y_{i-1}) * p(y_{i-1}, y_i), p(y_i, y_{i+1}), \dots, p(y_{n-1}, y_n)).$$

В левой части этого равенства:

$$p_{n-1}(l_{n,i}^0, \dots, l_{n,i}^{n-1}) = (p(l_{n,i}^0, l_{n,i}^1), \dots, p(l_{n,i}^{n-2}, l_{n,i}^{n-1})).$$

По определению отображения  $l_n: C_n(Q) \rightarrow C_{n-1}(Q)$ :  $l_{n,i}^j = y_{j+1}$  для всех  $j \geq i-1$ . Поэтому, для всех  $j \geq i$ :

$$p(l_{n,i}^{j-1}, l_{n,i}^j) = p(y_j, y_{j+1}).$$

то есть в требуемом равенстве совпадают все элементы наборов слева и справа, начиная с номера  $i$  и больше.

При  $j < i-1$ :  $l_{n,i}^j = [y_j, y_{j+1}, l_{n,i}^{j+1}]$ . Тогда

$$p(l_{n,i}^j, l_{n,i}^{j+1}) = p([y_j, y_{j+1}, l_{n,i}^{j+1}], l_{n,i}^{j+1}) = p(y_j, y_{j+1}) * p(y_{j+1}, l_{n,i}^{j+1}).$$

Далее осталось заметить, что

$$p(y_{j+1}, l_{n,i}^{j+1}) = p(y_{j+1}, [y_{j+1}, y_{j+2}, l_{n,i}^{j+2}]) = p(y_{j+2}, l_{n,i}^{j+2}) = \dots = p(y_{i-1}, y_i).$$

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Так как

$$\rho_n(y_0, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot (r_{n,i}^0, \dots, r_{n,i}^{n-1}),$$

и

$$r_n(p_n(y_0, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} \cdot (p(y_0, y_1), \dots \\ \dots, p(y_{i-2}, y_{i-1}), p(y_i, y_{i+1}), \dots, p(y_{n-1}, y_n)),$$

то достаточно проверить, что

$$(p(r_{n,i}^0, r_{n,i}^1), \dots, p(r_{n,i}^{n-2}, r_{n,i}^{n-1})) = (p(y_0, y_1), \dots \\ \dots, p(y_{i-2}, y_{i-1}), p(y_i, y_{i+1}), \dots, p(y_{n-1}, y_n)).$$

При всех  $j \leq i - 1$ :  $r_{n,i}^j = y_j$ , поэтому  $p(r_{n,i}^{j-1}, r_{n,i}^j) = p(y_{j-1}, y_j)$ . То есть в требуемом равенстве совпадают все элементы, начиная с 1-го и до  $(i - 1)$ -го. Для доказательства совпадения оставшихся элементов можно заметить, что

$$p(r_{n,i}^{j-1}, r_{n,i}^j) = p(r_{n,i}^{j-1}, [r_{n,i}^{j-1}, y_j, y_{j+1}]) = p(y_j, y_{j+1}).$$

Докажем, наконец, третье утверждение теоремы. По определению подгрупп  $E_n(Q)$  и  $E_n(\Gamma)$ :

$$\begin{aligned} (y_0, \dots, y_n) \in E_n(Q) &\iff \exists i: [y_{i-1}, y_i, y_{i+1}] = y_i, \\ p_n(y_0, \dots, y_n) \in E_n(\Gamma) &\iff \exists i: p(y_{i-1}, y_i) = p(y_i, y_{i+1}). \end{aligned}$$

Но если  $[y_{i-1}, y_i, y_{i+1}] = y_i$ , то  $p(y_{i-1}, y_i) = p(y_{i-1}, [y_{i-1}, y_i, y_{i+1}]) = p(y_i, y_{i+1})$ .  $\square$

Утверждения теоремы 7 гарантируют, что семейство отображений  $p_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , задают цепные отображения  $p_*^-: \mathcal{C}^-(Q) \rightarrow \mathcal{C}^-(\Gamma)$  и  $p_*^+: \mathcal{C}^+(Q) \rightarrow \mathcal{C}^+(\Gamma)$ .

#### 4.2. Инварианты $\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}$ и $\mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}$ .

**Определение 6.** Пусть  $\Gamma = (X, *)$  — конечный квандл,  $Q = (Y, [\cdot, \cdot, \cdot])$  — конечный квазоид,  $p: Y \times Y \rightarrow X$  — проекция, и пусть  $\varphi_- \in \ker d_+^3$ ,  $\varphi_+ \in \ker d_+^3$ ,  $\psi_- \in \ker \partial_-^3$ ,  $\psi_+ \in \ker \partial_+^3$  — 2-коциклы. Пусть  $K$  — ориентированный узел (или зацепление), заданный своей диаграммой  $D$  (на двумерной сфере  $S^2$  или плоскости  $\mathbb{R}^2$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}(D) &= \sum_{\xi \in \text{Col}_Q(D)} x^{w_{p_{col}(\xi), \varphi_-}(D)} \cdot y^{\omega_{\xi, \psi_-}(D)}, \\ \mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}(D) &= \sum_{\xi \in \text{Col}_Q(D)} x^{w_{p_{col}(\xi), \varphi_+}(D)} \cdot y^{\omega_{\xi, \psi_+}(D)}. \end{aligned}$$

Функции  $\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}$  и  $\mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}$  принимают значения в кольце  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$  полиномов Лорана с целыми коэффициентами, зависящих от двух переменных  $x$  и  $y$ . Значение каждой из этих функций вычисляется так. Надо перебрать все правильные раскраски областей диаграммы  $D$  элементами квазоида  $Q$ . Для каждой из них вычислить, во-первых, вес этой раскраски с помощью 2-коцикла  $\psi_-$  или  $\psi_+$ , и, во-вторых, вес соответствующей раскраски дуг диаграммы, получающейся применением проекции  $p$ , с помощью 2-коцикла  $\varphi_-$  или  $\varphi_+$ . Далее надо сложить произведения формальных переменных  $y$  и  $x$  в вычисленных степенях.

**Теорема 8.** Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — две диаграммы одного и того же ориентированного узла (или зацепления). Тогда

$$\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}(D_1) = \mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}(D_2) \text{ и } \mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}(D_1) = \mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}(D_2).$$

*Доказательство.* Можно считать, что диаграмма  $D_2$  получается из диаграммы  $D_1$  с помощью одного движения Рейдемейстера. Заметим, что

$$w_{p_{col}(\xi), \varphi_-}(D_1) = w_{p_{col}(\xi), \varphi_-}(D_2) \text{ и } w_{p_{col}(\xi), \varphi_+}(D_1) = w_{p_{col}(\xi), \varphi_+}(D_2).$$

В самом деле, существует естественная биекция  $b_\Gamma: \text{Col}_\Gamma(D_1) \rightarrow \text{Col}_\Gamma(D_2)$ . Более того, раскраска  $p_{col}(\xi)$  дуг диаграммы  $D_2$  и раскраска  $p_{col}(\xi)$  дуг диаграммы  $D_1$  совпадают всюду, кроме локальной области действия движения

Рейдемейстера. Поэтому эти две раскраски связаны биекцией  $b_\Gamma$ , и значит их веса совпадают.

Независимость степеней  $\omega_{\xi, \psi_-}$  и  $\omega_{\xi, \psi_+}$  от диаграммы узла (или зацепления) очевидна. Следовательно, значения функций  $\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}$  и  $\mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}$  не меняются при движениях Рейдемейстера.  $\square$

Теорема 8 означает, что функции  $\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}$  и  $\mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}$  являются корректно определёнными инвариантами ориентированных узлов и зацеплений. Отметим несколько взаимосвязей между инвариантами  $\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}$ ,  $\mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}$  и инвариантами  $M_\Gamma^{\varphi_-}$ ,  $P_\Gamma^{\varphi_+}$ ,  $\mathcal{M}_Q^{\psi_-}$ ,  $\mathcal{P}_Q^{\psi_+}$ , заданных теми же самыми наборами параметров.

Во-первых, значение инварианта  $\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}$  при  $x = 1$  совпадает со значением инварианта  $\mathcal{M}_Q^{\psi_-}$ , и значение инварианта  $\mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}$  при  $x = 1$  совпадает со значением инварианта  $\mathcal{P}_Q^{\psi_+}$ .

Во-вторых, значение инварианта  $\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}$  при  $y = 1$  похоже на значение инварианта  $M_\Gamma^{\varphi_-}$ , однако не совпадает с ним. Отличие состоит в следующем. Значение инварианта  $M_\Gamma^{\varphi_-}$  представляет собой сумму мономов  $x^{w_{\xi, \varphi_-}}$ , где сумма берётся по всем правильным раскраскам  $\xi$ . Значение инварианта  $\mathbb{M}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_-, \psi_-}$  при  $y = 1$  представляет собой такую же сумму мономов  $x^{w_{\xi, \varphi_-}}$ , однако в этом случае сумма берётся не по всем правильным раскраскам, а по тем из них, которые лежат в образе  $p_{col}(Col_Q)$ , и каждая из этих раскрасок берётся столько раз, сколько у неё разных прообразов под действием отображения  $p_{col}^{-1}$ . Точно таким же образом связаны значения инвариантов  $\mathbb{P}_{\Gamma, Q, p}^{\varphi_+, \psi_+}$  при  $y = 1$  и  $P_\Gamma^{\varphi_+}$ .

В-третьих, в случае, когда в качестве проекции берётся отображение  $t^x: Y \times Y \rightarrow X$  для некоторого  $x \in X$ :

$$\mathbb{M}_{\Gamma, Q, t^x}^{\varphi_-, \psi_-}(D) = \mathcal{M}_Q^{\psi_-}(D) \cdot |Col_\Gamma(D)|.$$

Это следует из того, что для любой правильной раскраски  $\xi \in Col_Q(D)$  областей диаграммы  $D$  узла (или зацепления)  $K$ ,  $t_{col}^x(\xi)$  — раскраска дуг диаграммы  $D$  в которой все дуги имеют один и тот же цвет  $x \in X$ . Следовательно  $w_{t_{col}^x(\xi), \varphi_-}(D) = 0$ . Аналогичным образом

$$\mathbb{P}_{\Gamma, Q, t^x}^{\varphi_+, \psi_+}(D) = \mathcal{P}_Q^{\psi_+}(D) \cdot |Col_\Gamma(D)|.$$

#### REFERENCES

- [1] S.V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Math. USSR, Sb., **47** (1984), 73–83. Zbl 0523.57006
- [2] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra, **23** (1982), 37–65. Zbl 0474.57003
- [3] J.S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Am. Math. Soc., **355**:10 (2003), 3947–3989. Zbl 1028.57003
- [4] Z. Cheng, H. Gao, *Positive quandle homology and its applications in knot theory*, Algebr. Geom. Topol., **15**:2 (2015), 933–963. Zbl 1315.57018
- [5] F.G. Korabiev, *Quasoids in knot theory*, Proc. Steklov Inst. Math., **303**, Suppl. 1 (2018), S156–S165. Zbl 1423.57014
- [6] M. Niebrzydowski, *On some ternary operations in knot theory*, Fundam. Math., **225**:1 (2014), 259–276. Zbl 1294.57008

- [7] S. Nelson, S. Pico, *Virtual tribrackets*, J. Knot Theory Ramifications, **28**:4 (2019), Article ID 1950026. Zbl 1426.57029
- [8] S. Nelson, K. Oshiro, N. Oyamaguchi, *Local biquandles and Niebrzydowski's tribracket theory*, Topology Appl., **258** (2019), 474–512. Zbl 1415.57007
- [9] Ph.G. Korablev, *Cocyclic quasoid knot invariants*, Sib. Math. J. **61**:2 (2020), 271–289. Zbl 1442.57004

PHILIPP GLEBOVICH KORABLEV  
CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,  
192, BR. KASHIRINYKH STR.,  
CHELYABINSK, 454000, RUSSIA,  
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,  
4, S. KOVALEVSKOY STR.,  
EKATERINBURG, 620990, RUSSIA  
*Email address:* korablev@csu.ru