S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1098–1104 (2021) УДК 519.71
DOI 10.33048/semi.2021.18.084 MSC 08A99

О БЕСПОВТОРНЫХ МУЛЬТИФУНКЦИЯХ В ОДНОМ БАЗИСЕ

И.К. ШАРАНХАЕВ

Abstract. Multifunctions that can be realized by read-once formulas in some finite base are studied. An algorithm for finding read-once representations of multifunctions in this base is obtained using the decomposition method of multifunctions.

Keywords: multifunction, many-valued logic, superposition, base, decomposition, read-once formula.

В теории дискретных функций интенсивно развивается направление, занимающееся исследованием функций, заданных на конечном множестве A и принимающих в качестве своих значений подмножества множества A, в том числе $\varnothing$. Множество функций такого вида, которые в последнее время принято называть мультифункциями [1, 2, 3], является естественным обобщением множества конечнозначных функций на A (функций k-значной логики).

Следует отметить, что мультифункции часто рассматриваются как не всюду определенные функции, т. е. функции, определенные не на всех наборах [4]. В этом случае под неопределенностями в мультифункциях можно понимать некоторые подмножества основного множества A, например, $\varnothing$ и само A.

Естественным является вопрос выразимости произвольной мультифункции через мультифункции меньшей размерности. В [5] получен критерий декомпозиции мультифункций на $\{0, 1\}$, в том числе разделительной декомпозиции, который обобщает результат Г.Н. Поварова о функциональной разделимости

Sharankhaev, I.K., On read-once multifunctions in some base.

Работа автора поддержана грантом Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова.

Поступила 14 июля 2021 г., опубликована 22 октября 2021 г.

булевых функций [6] и дает метод получения представлений мультифункций с помощью мультифункций меньшей размерности. На основе этого метода в данной статье предлагается алгоритм нахождения бесповторных представлений мультифункций на $\{0,1\}$ в одном базисном множестве.

1. Основные понятия и определения

Изложению основных результатов предпошлем необходимые определения и обозначения. Отметим, что терминология, используемая для мультифункций, практически полностью сохранена из теории булевых функций, которую можно посмотреть, например, в [7]. Будут использоваться следующие обозначения: переменные обозначаются символами x, y, u, v, w, возможно, с индексами; константы обозначаются символами α, β, σ, γ, возможно, с индексами; символом $\tilde{x}$ обозначается набор $(x_1,\ldots,x_n)$; $|\tilde{x}|$ – длина набора $\tilde{x}$.

Пусть $|A|$ – мощность множества A, 2^A – множество всех подмножеств A, $E_2=\{0,1\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n}^{\overline{*}}=\{f|f:E_2^n\to 2^{E_2}\}, P_2^{\overline{*}}=\bigcup\limits_n P_{2,n}^{\overline{*}}$,

$P_{2,n}=\{f|f\in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})|=1$ для всех $\tilde{\alpha}\in E_2^n\}, P_2=\bigcup\limits_n P_{2,n}$.

Функции из P_2 называют булевыми функциями, а из $P_2^{\overline{*}}$ – мультифункциями на E_2. Далее мультифункции на E_2 будем называть просто мультифункциями.

Для того, чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m))$, где f, f_1, ..., $f_n\in P_2^{\overline{*}}$, определяла некоторую мультифункцию $g(x_1,\ldots,x_m)$, зададим значения мультифункции на наборах из подмножеств множества E_2.

Если $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\begin{cases}\varnothing, \text{ если } \ f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\varnothing \ \text{ для некоторого } \ i\in\{1,\ldots,m\};\\ \bigcup\limits_{\beta_i\in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n), \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Мультифункция, получаемая из $f(x_1,...,x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы $\sigma\in\{0,1\}$, называется остаточной и обозначается $f_{x_i}^{\sigma}$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Для упрощения записи договоримся далее использовать следующую кодировку: $\varnothing\leftrightarrow *$, $\{0\}\leftrightarrow 0$, $\{1\}\leftrightarrow 1$, $\{0,1\}\leftrightarrow 2$.

Мультифункцию из $P_2^{\overline{*}}$ удобно задавать ее значениями на двоичных наборах, причем вектор значений мультифункции записывают в виде строки или столбца, а двоичные наборы считают заданными в соответствии с натуральным порядком. Например, $f=(0*21)$ означает, что $f(00)=0$, $f(01)=*$, $f(10)=2$, $f(11)=1$. Мультифункцию, которая на всех наборах принимает значение $*$, будем обозначать просто $*$.

Для произвольных n-местных мультифункций f и g определим мультифункцию $f\cup g$ следующим образом:

$$(f\cup g)(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cup g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

для любого набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Мультифункция f при разбиении множества переменных на $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}$ допускает *декомпозицию*, если существуют мультифункции h и g такие, что выполняется

$$f(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) = h(\tilde{u},\tilde{w},g(\tilde{u},\tilde{v})). \tag{1}$$

Если $\tilde{u} = \varnothing$, то такая декомпозиция называется *разделительной.*

Размерностью мультифункции f называют число ее переменных.

Назовем переменную x_i мультифункции f фиктивной, если $f^0_{x_i} = f^1_{x_i}$, и существенной в противном случае.

Мультифункция, у которой все переменные существенны, называется существенной. В противном случае, она несущественна.

Пусть B – множество мультфункций и X – множество символов, называемых переменными. Индукцией определим понятие терма над B от множества переменных X:

1) переменная x из X есть терм;

2) если символом f обозначается мультифункция размерности m, принадлежащая B, и $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ – термы, то $f(\Phi_1,\ldots,\Phi_m)$ есть терм.

Определим значение терма Φ при заданных значениях переменных данного терма:

1) если Φ – переменная, то значение Φ совпадает со значением этой переменной;

2) если Φ имеет вид $f(\Phi_1,\ldots,\Phi_m)$ и значения $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ есть $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ соответственно, то значение терма Φ есть $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$.

Мультифункция g представима термом $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$, если размерность g равна n и для любого набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, задающего значения переменных, значение терма $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ при данных значениях переменных совпадает с $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Терм Φ называется бесповторным, если каждая переменная входит в него не более одного раза.

Мультифункция f называется бесповторной в базисном множестве B, если найдется бесповторный терм Φ над B, представляющий мультифункцию f.

2. Вспомогательные результаты

В [5] получен результат, представленный ниже, который дает метод получения представлений мультифункций с помощью мультифункций меньшей размерности. Для понимания дальнейшего изложения приведем теорему 1 с доказательством.

Теорема 1. *Произвольная мультифункция f допускает декомпозицию при разбиении множества переменных на $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}$ тогда и только тогда, когда для любого набора $\tilde{\alpha}$ ($|\tilde{\alpha}| = |\tilde{u}|$) среди всех остаточных мультифункций от $f^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{u}}$ по переменным $\tilde{v}$ не более четырех различных, причем каждая из них равна либо $*$, либо некоторой мультифункции f_0, либо некоторой мультифункции f_1, либо $f_0 \cup f_1$.*

Доказательство. Необходимость. Так как мультифункция f допускает декомпозицию, то $f(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) = h(\tilde{u},\tilde{w},g(\tilde{u},\tilde{v}))$. Для произвольных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеем

$$f(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{w}) = h(\tilde{\alpha},\tilde{w},g(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})).$$

В силу того, что $g(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) \in \{0,1,*,2\}$, остаточная мультифункция $f(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{w})$ равна либо $*$, либо $h(\tilde{\alpha},\tilde{w},0)$, либо $h(\tilde{\alpha},\tilde{w},1)$, либо либо $h(\tilde{\alpha},\tilde{w},2) = h(\tilde{\alpha},\tilde{w},0) \cup h(\tilde{\alpha},\tilde{w},1)$.

Достаточность. Определим мультифункции $g(\tilde{u}, \tilde{v})$ и $h(\tilde{u}, \tilde{w}, y)$. Для произвольных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$

$$g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \begin{cases} *, \text{ если } f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{w}) = *; \\ 0, \text{ если } f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{w}) = f_0(\tilde{w}); \\ 1, \text{ если } f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{w}) = f_1(\tilde{w}); \\ 2, \text{ если } f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{w}) = f_0(\tilde{w}) \cup f_1(\tilde{w}). \end{cases}$$

$$h(\tilde{\alpha}, \tilde{w}, y) = \begin{cases} f_0(\tilde{w}), \text{ если } y = 0; \\ f_1(\tilde{w}), \text{ если } y = 1. \end{cases}$$

Покажем, что для таких мультифункций g и h равенство (1) выполняется. Рассмотрим $h(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}))$ при произвольных $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$.

Если $g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = *$, то $h(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})) = * = f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$.

Если $g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 0$, то $h(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})) = f_0(\tilde{\gamma}) = f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$.

Если $g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1$, то $h(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})) = f_1(\tilde{\gamma}) = f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$.

Если $g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 2$, то $h(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})) = f_0(\tilde{\gamma}) \cup f_1(\tilde{\gamma}) = f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$.

□

Следствие 1. *(Разделительная декомпозиция) Произвольная мультифункция f допускает разделительную декомпозицию при разбиении множества переменных на $\tilde{v}, \tilde{w}$ тогда и только тогда, когда среди всех остаточных мультифункций от f по переменным $\tilde{v}$ не более четырех различных, причем каждая из них равна либо $*$, либо некоторой мультифункции f_0, либо некоторой мультифункции f_1, либо $f_0 \cup f_1$.*

Доказательство. Следует из доказательства теоремы 1 при $\tilde{u} = \varnothing$. □

Большой интерес вызывает вопрос нахождения бесповторных представлений для мультифункций. В [8] предложен алгоритм нахождения бесповторных представлений мультифункций в базисном множестве $B_{\triangleright} = \{-, \cdot, \vee, \oplus, \triangleright\}$, который сильно учитывает специфику данного множества, а именно, использует свойства бесповторных мультифункций в $B_{\triangleright}$. Метод разделительной декомпозиции (следствие к теореме 1) позволяет подойти к этому вопросу с более общих позиций и существенно упростить построение такого алгоритма. Далее в статье получен алгоритм нахождения бесповторных представлений мультифункций в базисном множестве $B_{\triangleright} = \{-, \cdot, \vee, \oplus, \triangleright\}$ на основе метода разделительной декомпозиции.

Для мультифункций $g_1 = (10)$, $g_2 = (0111)$, $g_3 = (0001)$, $g_4 = (0110)$ будем использовать также их запись, принятую для булевых функций $g_1(x) = \bar{x}$, $g_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, $g_3(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, $g_4(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ соответственно. Для мультифункции $g_5(x_1, x_2) = (*102)$ будем использовать запись $x_1 \triangleright x_2$.

Отметим, что в случае, когда f является булевой функцией, алгоритм нахождения бесповторных представлений в $B_{\triangleright} \setminus \{\triangleright\}$ построен в [7].

Опишем все существенные мультифункции размерностей 1 и 2, бесповторные в $B_{\triangleright}$. Унарных мультифункций ровно две, x и $\bar{x}$, обе они являются булевыми функциями. Бинарных существенных бесповторных мультифункций ровно 18, из них 10 являются булевыми функциями. Перечислим все эти мультифункции, указав представляющие их термы, которые используются в нашем алгоритме.

$f_1(x_1, x_2) = (0001) = x_1 \cdot x_2$,

$f_2(x_1, x_2) = (0111) = x_1 \vee x_2$,

$f_3(x_1, x_2) = (0010) = x_1 \cdot \bar{x}_2,$
$f_4(x_1, x_2) = (0100) = \bar{x}_1 \cdot x_2,$
$f_5(x_1, x_2) = (0110) = x_1 \oplus x_2,$
$f_6(x_1, x_2) = (1011) = x_1 \vee \bar{x}_2,$
$f_7(x_1, x_2) = (1101) = \bar{x}_1 \vee x_2,$
$f_8(x_1, x_2) = (1000) = \overline{x_1 \vee x_2},$
$f_9(x_1, x_2) = (1110) = \overline{x_1 \cdot x_2},$
$f_{10}(x_1, x_2) = (1001) = \overline{x_1 \oplus x_2},$
$f_{11}(x_1, x_2) = (*102) = x_1 \triangleright x_2,$
$f_{12}(x_1, x_2) = (02*1) = \bar{x}_1 \triangleright x_2,$
$f_{13}(x_1, x_2) = (1*20) = x_1 \triangleright \bar{x}_2,$
$f_{14}(x_1, x_2) = (201*) = \bar{x}_1 \triangleright \bar{x}_2,$
$f_{15}(x_1, x_2) = (*012) = x_2 \triangleright x_1,$
$f_{16}(x_1, x_2) = (0*21) = \bar{x}_2 \triangleright x_1,$
$f_{17}(x_1, x_2) = (12*0) = x_2 \triangleright \bar{x}_1,$
$f_{18}(x_1, x_2) = (210*) = \bar{x}_2 \triangleright \bar{x}_1.$

Множество, состоящее из перечисленных 18 мультифункций, обозначим через K. Тот факт, что других бесповторных мультифункций не существует, следует из [7] и свойства

$$\overline{x_1 \triangleright x_2} = x_2 \triangleright x_1.$$

3. Алгоритм нахождения бесповторных представлений мультифункций в базисном множестве $B_\triangleright$

На вход алгоритма подается существенная мультифункция f размерности больше, чем 2, заданная в векторном виде. На выходе алгоритм находит бесповторный терм $\Phi(\tilde{x})$, представляющий f, или сообщает, что f не является бесповторной в базисном множестве $B_\triangleright$.

Пусть $\tilde{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – упорядоченное множество переменных мультифункции f.

I. Выбираем двухэлементное подмножество из множества $\tilde{x}$. Если алгоритм вызван рекурсивно, то выбираем подмножество, которое не рассматривалось на предыдущих вызовах алгоритма. Если все двухэлементные подмножества множества $\tilde{x}$ выбраны, то мультифункция $f(\tilde{x})$ не является бесповторной в базисном множестве $B_\triangleright$ и алгоритм завершает работу.

Если подмножество выбрано, обозначим его $\tilde{v} = \{x_i, x_j\}$.

Вычисляем остаточные мультифункции от f по $\tilde{v}$ и по теореме 1 строим $g(\tilde{v})$, если это возможно, иначе возвращаемся на шаг I.

Если $g(\tilde{v})$ построена, но $g(\tilde{v}) \notin K$, то возвращаемся на шаг I, иначе переходим на шаг II.

II. Находим множество $\tilde{w} = \tilde{x} \backslash \tilde{v}$ и задаем мультифункцию $h(y, \tilde{w})$ по теореме 1. Для мультифункции $g(\tilde{v})$ находим представляющий ее терм $\Psi_g(\tilde{v})$.

Применяем алгоритм к мультифункции $h(y, \tilde{w})$, если она имеет размерность больше, чем 2. Если размерность мультифункции h равна 2, то проверяем ее на принадлежность множеству K.

Если бесповторный терм $\Psi_h(\widetilde{y, w})$, представляющий мультифункцию $h(y, \tilde{w})$, найден, то терм, представляющий мультифункцию f равен $\Phi(\tilde{x}) = \Psi_h(\Psi_g(\tilde{v}), \tilde{w})$. Иначе переходим к шагу I.

Теорема 2. *Алгоритм нахождения бесповторных представлений мультифункций в базисном множестве $B_{\triangleright}$ является корректным.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из следствия к теореме 1. □

На следующем примере проверим работу алгоритма. Рассмотрим функцию

$$f = (**11*022*********022*022*022**11)$$

из примера в работе [8].

Множество $\tilde{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Нетрудно убедиться, что f существенна.

Вызов алгоритма 1.

I. Выбираем $\tilde{v} = \{x_1, x_2\}$. Находим остаточные мультифункции от f по $\tilde{v}$:
$f^{0\,0}_{x_1x_2} = (**11*022) = f_0$; $f^{0\,1}_{x_1x_2} = (********)$; $f^{1\,0}_{x_1x_2} = (*022*022) = f_0 \cup f_1$; $f^{1\,1}_{x_1x_2} = (*022**11) = f_1$.

Так как $g_1(\tilde{v}) = (0*21) \in K$, переходим на шаг II.

II. Имеем $g_1(\tilde{v}) = \bar{x}_2 \triangleright x_1$, $\tilde{w} = \{x_3, x_4, x_5\}$, $h_1(y_1, \tilde{w}) = (**11*022*022**11)$.

Применяем алгоритм к мультифункции h_1 (вызов алгоритма 2), получаем терм $\Psi_{h_1} = (y_1 \oplus x_3) \triangleright (x_5 \triangleright x_4)$.

В итоге $\Phi = ((\bar{x}_2 \triangleright x_1) \oplus x_3) \triangleright (x_5 \triangleright x_4)$.

Вызов алгоритма 2.

Мультифункция $h_1(y_1, x_3, x_4, x_5) = (**11*022*022**11)$.

I. Выбираем $\tilde{v} = \{y_1, x_3\}$. Находим остаточные мультифункции от h_1 по $\tilde{v}$:
$(h_1)^{0\,0}_{y_1x_3} = (**11) = f_0$; $(h_1)^{0\,1}_{y_1x_3} = (*022) = f_1$; $(h_1)^{1\,0}_{y_1x_3} = (*022) = f_1$; $(h_1)^{1\,1}_{y_1x_3} = (**11) = f_0$.

Так как $g_2(\tilde{v}) = (0110) \in K$, переходим на шаг II.

II. Имеем $g_2(\tilde{v}) = y_1 \oplus x_3$, $\tilde{w} = \{x_4, x_5\}$, $h_2(y_1, \tilde{w}) = (**11*022)$.

Применяем алгоритм к мультифункции h_2 (вызов алгоритма 3), получаем терм $\Psi_{h_2} = y_2 \triangleright (x_5 \triangleright x_4)$.

В итоге $\Psi_{h_1} = (y_1 \oplus x_3) \triangleright (x_5 \triangleright x_4)$.

Вызов алгоритма 3.

Мультифункция $h_2(y_2, x_4, x_5) = (**11*022)$.

I. Выбираем $\tilde{v} = \{y_2, x_4\}$. Находим остаточные мультифункции от h_2 по $\tilde{v}$:

$(h_2)^{0\,0}_{y_2x_4} = (**)$;

$(h_2)^{0\,1}_{y_2x_4} = (10)$;

$(h_2)^{1\,0}_{y_2x_4} = (*0)$;

$(h_2)^{1\,1}_{y_2x_4} = (22)$.

Так как условия теоремы 1 не выполняются, возвращаемся на шаг I.

I. Выбираем $\tilde{v} = \{y_2, x_5\}$. Находим остаточные мультифункции от h_2 по $\tilde{v}$:
$(h_2)^{0\,0}_{y_2x_5} = (*1)$; $(h_2)^{0\,1}_{y_2x_5} = (*1)$; $(h_2)^{1\,0}_{y_2x_5} = (*2)$; $(h_2)^{1\,1}_{y_2x_5} = (02)$.

Так как условия теоремы 1 не выполняются, возвращаемся на шаг I.

I. Выбираем $\tilde{v} = \{x_4, x_5\}$. Находим остаточные мультифункции от h_2 по $\tilde{v}$:
$(h_2)^{0\,0}_{x_4x_5} = (**)$; $(h_2)^{0\,1}_{x_4x_5} = (*0) = f_0$; $(h_2)^{1\,0}_{x_4x_5} = (12) = f_1$; $(h_2)^{1\,1}_{x_4x_5} = (12) = f_0 \cup f_1$.

Так как $g_3(\tilde{v}) = (*012) \in K$, переходим на шаг II.

II. Имеем $g_3(\tilde{v}) = x_5 \triangleright x_4$, $\tilde{w} = \{y_2\}$, $h_3(y_3, \tilde{w}) = (*012)$.
Так как $h_3 \in K$, то терм $\Psi_{h_3} = y_2 \triangleright y_3$.
В итоге $\Psi_{h_2} = y_2 \triangleright (x_5 \triangleright x_4)$.

References

[1] F. Börner, *Total multifunctions and relations*, Contrib. Gen. Algebra, **13** (2001), 23–36. Zbl 0997.08003

[2] S.A. Badmaev, *A completeness criterion for sets of multifunctions in full partial ultraclone of rank 2*, Sib. Élektron. Mat. Izv., **15** (2018), 450–474. Zbl 1436.08003

[3] S.A. Badmaev, I.K. Sharankhaev, *On minimal bases in full partial ultraclone of rank 2*, Sib. Élektron. Mat. Izv., **17** (2020), 1478–1487. Zbl 1443.08002

[4] V.V. Tarasov, *Completeness criterion for undefined functions of Boolean algebra*, Probl. Kibern., **30** (1975), 319–325. Zbl 0414.94040

[5] I.K. Sharankhaev, *On decomposition of sub-definite partial Boolean functions*, J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys., **9**:1 (2016), 119–122. Zbl 7325264

[6] G.N. Povarov *On functional separability of Boolean functions*, Dokl. Akad. Nauk USSR, **94**:5 (1954), 801–803. Zbl 0056.00902

[7] S.F. Vinokurov, N.A. Peryazev, eds., *Selected problems in the theory of Boolean functions*, Fizmatlit, Moskow, 2001. Zbl 0979.06001

[8] V.L. Semicheva, *Methods of finding of repetition-free representations of incompletely defined Boolean functions*, Dissertation of Candidate in Physics and Mathematics, Irkutsk, 2008.

Ivan Konstantinovich Sharankhaev
Buryat State University,
24a, Smolina str.,
Ulan-Ude, 670000, Russia
Email address: goran5@mail.ru