

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №2, стр. 1083–1097 (2021)

УДК 519.644

DOI 10.33048/semi.2021.18.083

MSC 65D32

Special issue: International S.B. Stechkin's Workshop-Conference
on Function Theory (Russia, Altai Republic, August 9–19, 2021)

**К ВОПРОСУ ХОРОШЕЙ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ
НЕНАСЫЩАЕМЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ**

В.Н. БЕЛЫХ

ABSTRACT. A sufficient sign of good conditionality (resistance to rounding errors) of unsaturated quadrature formulas with a weight function from the Lebesgue space L_p , $1 < p < \infty$ on a finite segment is indicated.

Keywords: unsaturation, quadrature formula, rounding errors.

1. ВВЕДЕНИЕ

Право современного компьютера на существование, его полезность в науке в том и состоит, что он способен осуществлять вычисления с огромной (свыше 10 Пфлопс) скоростью. Вместе с этим, оказав в целом прогрессирующее влияние на всю вычислительную практику, его появление не только не ослабило, но и в корне обострило интерес к проблеме доверия качеству производимых вычислений. И связано это в первую очередь с неопределенностью самих критериев оценки качества вычислений: никакие технические устройства не позволяют выполнять арифметические действия над числами, заданными бесконечными дробями. Причина этого принципиальна и неустранима: любой цифровой (компьютерный) вычислительный процесс не может осуществляться абсолютно точно. Его функционирование всегда сопряжено с неизбежными ошибками округлений компьютерных арифметических операций. При этом дефицит

BELYKH, V.N., ON THE QUESTION OF GOOD CONDITIONALITY OF UNSATURATED
QUADRATURE FORMULAS.

© 2021 БЕЛЫХ В.Н.

Работа поддержана в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0005).

Поступила 29 сентября 2021 г., опубликована 22 октября 2021 г.

квалифицированного внимания к ошибкам округлений приводит к тому, что квадратурные формулы, приемлемые в теоретической математике, зачастую оказываются неэффективными с точки зрения математики компьютерной [1]. Действительно, в вопросах приближённого вычисления интегралов приходится сталкиваться с одновременным разрешением следующих двух проблем. Одна связана с выявлением условий, обеспечивающим наиболее быстрое убывание к нулю функционала погрешности квадратурной формулы, другая — с учётом того реального контекста, в котором осуществляются вычисления, т.е. с установлением фактов, обеспечивающих им устойчивость к малости ошибок округлений. Указанное положение вещей сильно снижает ценность формальных, а по сути — волюнтаристских подходов к проблеме приближённого вычисления определённых интегралов.

В результате, планируя цифровые вычисления, приходится примерять зачастую противоречивые требования: точность вычислений и объём перерабатываемой битовой информации. И всё это должно быть напрямую согласовано с информацией об аппроксимационных возможностях компакта X подынтегральных функций. При этом желательно, чтобы наличие у X дополнительной (экстраординарной) гладкости могло наблюдаться в процессе вычислений по величине убывания к нулю функционала погрешности квадратурной формулы.

В этой связи вполне естествен интерес и к некоей “золотой середине” или, как это принято в компьютерной практике, к оптимальной квадратурной формуле [2], в которой ключевым параметром является соотношение, связывающее точность вычислений и минимальный объём перерабатываемой битовой информации. Так что теоретически всегда выгодно потребовать от формулы учёта наибольшей гладкости подынтегральной функции из X . Но не всякие конструкции оптимальных формул подходят для этого: формулы, основанные на локальных способах аппроксимации подынтегральных функций, т.е. имеющие главный член погрешности, для цифровых вычислений не годятся [1, 3].

И потому наибольшее впечатление на компьютерную практику произвели последствия открытых К.И. Бабенко ненасыщаемых квадратурных формул, оказавшимися, с одной стороны, близким к оптимальным, а, с другой, автоматически подстраивающимся к любым имеющимся “запасам” гладкости подынтегральных функций (*феномен ненасыщаемости* [4]). Вследствие этого любая избыточная (экстраординарная) гладкость подынтегральных функций, прежде находившаяся на периферии насущных интересов цифровых вычислений, становится их активным персонажем. Причём пик эффективности этих формул — *экспоненциальная сходимость* — достигается на классах бесконечно гладких X . Тем самым одним из качеств, принципиально отличающим ненасыщаемые квадратурные формулы, является отсутствие у них главного члена погрешности. Так что выход за клише, господствующей в вычислительной практике конечно-разностной парадигмы, становится возможен лишь отречением от ценностей, ассоциированных с её статус-кво — главного члена погрешности.

2. ОСОБЕННОСТИ КОМПЬЮТЕРНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

Трудности в разрешении проблемы доверия качеству цифровых вычислений начинаются уже с признания различий между дискретным и непрерывным. Именно оно это различие наиболее отчетливо и признано в современном

цифровом компьютере. При этом любая разумная формализация взгляда на проблему качества (точности) вычислений должна завершаться разъяснением характера возможного сосуществовании указанных логических понятий путём принятия следующей гипотезы: дискретное в процессе вычислений не противопоставляется непрерывному и выступает лишь в качестве конструктивного элемента, вскрывающего аппроксимативный характер непрерывного. Попытка подобрать этому наблюдению адекватную математическую формулировку с неизбежностью приводит к понятию функционала погрешности, способному эффективно разрешать указанную коллизию. Тем самым, не указав функционал погрешности численного метода, мы делаем фактически бессмысленными все последующие рассуждения о достоверности конструируемого им числового компьютерного ответа. А коль такой функционал погрешности предъявлен, совершаемые потери информации определяются его величиной.

Итак, операция замены вещественного числа ξ конечной дробью (округление) является вынужденной и необходимой, и без потери информации не обходится. Компьютерная её реализация всегда связана с процедурой “упаковки” $O : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ вещественного числа ξ из \mathbb{R} в один из ближайших к нему компьютерных образов $O(\xi) = [\xi]$ из конечного множества \mathbb{M} компьютерных чисел. Допускаемая при этом ошибка округления $|\xi - [\xi]|$ всегда лимитирована структурой разрядной сетки компьютера и характеризуется обычно парой компьютерных числовых параметров ε_2 и ε_∞ , тесно связанных, в свою очередь, с понятиями относительной погрешности представления числа ξ на данном компьютере и максимальным компьютерным числом из множества \mathbb{M} соответственно. И хотя существующий приём “маскировки” вещественного числа ξ не встречает заметных возражений среди большинства пользователей, в его основе — очевидное смещение истинного значения ξ в сторону его неоднозначности или, лучше сказать, неопределенности. Заменяя число ξ его компьютерным изображением $[\xi]$, мы отнюдь не утверждаем справедливость хоть какого-либо равенства; речь всегда может идти лишь о двойном неравенстве (с избытком или с недостатком) [5]. Отмеченная неопределенность реализуется обычно на практике как некое общее утверждение о нелокальности оператора округления $O : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$, и чаще всего выступает в форме своеобразного запрета: образ ненулевого вещественного числа $\xi \neq 0$ под действием этого оператора не исчезает так же, как не исчезает само ξ . Сказанное в отношении операции округления доминирует и в отношении результатов арифметических операций, производимых над компьютерными числами. Причём внешнее совпадение компьютерных арифметических операций с их математическими аналогами не должно создавать иллюзий семантического совпадения их свойств: конечность множества \mathbb{M} компьютерных чисел влечет потерю операционных свойств пространства \mathbb{R} и потому \mathbb{M} , в отличие от \mathbb{R} , уже не является полем.

Более того, операция округления $O : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ сопровождается не только безвозвратной потерей информации, но одновременно ужесточает требования к устойчивости компьютерных арифметических операций к ошибкам округлений [5]. Так что, если раньше на этапе “ручных” вычислений приходилось оперировать лишь со штучными категориями “одна операция — одна ошибка округления”, то в современном цифровом компьютере уже в самом контексте подразумевается, что каждая арифметическая операция должна работать при

осуществлении всего вычислительного процесса в целом, который оказывается вовлеченным в сложнейшие связи со многими компьютерными операциями и по этой причине должен функционировать в устойчивом взаимодействии с ними. Поэтому для того, чтобы реально контролировать потери информации при проведении арифметических операций над машинными числами, вычислительный алгоритм должен обладать свойством устойчивости. Его устойчивость к ошибкам округлений способна придавать компьютерным числовым ответам определённую однозначность. Напротив, неустойчивые численные алгоритмы способствуют быстрому нарастанию в вычислениях ошибок округления и, как следствие, приводят к АВОСТАм (автоматическим остановам) вычислений.

Иначе говоря, при компьютерных расчётах с использованием вещественных чисел неизбежно возникают ошибки, вызванные тем, что все (или почти все) компьютерные арифметические операции над этими числами выполняются приближённо, да и сами числа хранятся в компьютере с некоторой точностью. Всё это потребовало подробного рассмотрения [5] особенностей выполнения компьютерных арифметических операций $*$ = $\{\pm, \times, \div\}$ над вещественными числами ξ, ξ_1, ξ_2 . Оказалось, что все необходимые факты об устойчивости этих операций извлекаются в предположении справедливости следующих гипотез: $|(\xi_1 * \xi_2) - [\xi_1 * \xi_2]| \leq \max(\varepsilon_2 |\xi_1 * \xi_2|, 1/\varepsilon_\infty)$. При этом все компьютерные арифметические операции детерминированы, т.е. повторное их выполнение на одном и том же компьютере и с одними и теми же исходными данными приводит к тому же самому результату. Более того, они обладают свойствами монотонности по своим аргументам, аналогичными свойствам точных арифметических операций. Так для произвольных компьютерных чисел $[\xi], [\xi_1], [\xi_2]$ из \mathbb{M} верны следующие свойства: если $\xi_1 \geq \xi_2$, то $[\xi_1 * \xi] \geq [\xi_2 * \xi]$ и $[\xi * \xi_1] \geq [\xi * \xi_2]$.

Таким образом в любой хорошо (или корректно) поставленной вычислительной проблеме вопрос о том, что чем управляет (ошибки округления процессом вычислений или процесс вычислений ошибками округления) абсолютно надуман: цифровых вычислений без ошибок округления (в арифметике вещественных чисел) не бывает, а ошибки округления без цифровых вычислений простое отсутствуют. В этой связи на современном этапе развития численных методов особенно чётко осознаётся, что решаемые с помощью цифрового компьютера проблемы должны быть прежде всего “хорошо” поставлены, т.е. устойчивы к ошибкам округлений. Причём реальную им “цену” желательно предвидеть всё же заранее [1,5]. В итоге компьютерная практика обретает числовые критерии “хорошей” обусловленности численного алгоритма: в пределах разумной малости ошибок округления должны существовать механизмы, обеспечивающие стабильное (или устойчивое) его функционирование вплоть до получения конечного числового ответа. При этом корректность компьютерной постановки задачи обычно аттестуется характеристикой, именуемой числом обусловленности [5]; если оно велико, то от такого численного алгоритма следует отказаться, потому как конструируемый компьютерный числовой ответ не может внушать доверия из-за плохой устойчивости алгоритма [1].

3. НЕНАСЫЩАЕМОСТЬ И ХОРОШАЯ ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ.

Примечательной особенностью ненасыщаемых квадратурных формул является способность автоматически подстраиваться к любым естественным для

задачи классам гладкости подынтегральных функций. С точки зрения существующих в компьютерной практике представлений такая способность квадратурной формулы выглядит несколько необычно. Возникает тогда вопрос, как в условиях, например, достаточной гладкости подынтегральной функции представить себе на практике ненасыщаемый вычислительный процесс?

Для начала рассмотрим хорошо известную формулу трапеций:

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = \frac{1}{n} \left[f(-1) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right) + f(1) \right] + \varrho_n(f). \quad (1)$$

Она точна на линейных функциях и, если функция $f(t)$ имеет ограниченную вторую производную, то порядок приближения этой формулы равен $\varrho_n(f) = O(n^{-2})$. Известно также, что, если f имеет на самом деле ограниченную производную более высокого порядка, например, пятого или даже сотого, то это обстоятельство в случае формулы трапеций само по себе никак не вызывает улучшения порядка приближения. Следовательно, если функция f имеет производную более высокого порядка, чем 2, — пусть она будет даже аналитической, — все равно при применении для вычисления интеграла формулы (1), мы заведомо не сможем получить лучший эффект в смысле порядка приближения, сравнительно с тем, который имеет место для функций, обладающих производной 2-го порядка. Другими словами, как бы ни была хороша функция f , если она не многочлен первой степени, порядок приближения интеграла при применении формулы трапеций (1) заведомо не может стать лучше, чем $O(n^{-2})$. Иначе говоря, вычислительный процесс, построенный на основе формулы трапеций (1), “не гибок” или — с насыщением. И, следовательно, формула трапеций (1) — насыщаема.

Впрочем, на практике нужно ясно всегда осознавать, что сам по себе порядок производной дает представление только о том, как будет вести себя приближение, если увеличивать число узлов n в формуле (1) до бесконечности. Но в реальных вычислениях приходится довольствоваться только определенными и фиксированными значениями n . И потому для действительной оценки приближения при фиксированном n решающую роль играет знание не только порядка приближения, но и абсолютные значения производных подынтегральной функции f .

Обратив на это внимание, введём несколько определений.

Пусть $C \equiv C[I]$ и $C^k \equiv C^k[I]$ ($k > 0$ — целое) — пространства вещественных непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $I = [-1, 1]$ функций f ; $\|f\| = \max_{t \in I} |f(t)|$ — чебышёвская норма. Пусть $\mathcal{P}^n \subset C$ — подпространство алгебраических многочленов степени не выше $n - 1$ ($n > 0$ — целое), $E_n(f) = \inf_{P_n \in \mathcal{P}^n} \|f - P_n\| = \|f - Q_{n-1}\|$ — наилучшее чебышёвское приближение функции f многочленом Q_{n-1} ; $r(t)$ — весовая функция, суммируемая со степенью $1 < p < \infty$, т.е. $r(t)$ принадлежит пространству $L_p[I]$. Далее, пусть X — компакт в C .

Зададимся вопросом. Насколько глубина представлений о дифференциальной природе подынтегральной функции f способна внести нечто существенно новое в процедуру эффективной организации квадратурного процесса? Более того, как следует поступать в том случае, когда информации о гладкости функции f достаточно, но само её использование или невозможно или, что почти то

же самое, очень трудоёмко? Как это ни парадоксально, но ответы на вопросы могут оказаться простыми, если заранее позаботиться о том, чтобы конструкция квадратурной формулы оказалась без насыщения.

В качестве примера, демонстрирующего продуктивность идеи ненасыщаемости, построим квадратурную формулу, точную на подпространстве алгебраических многочленов \mathcal{P}^n степени не выше $n - 1$, $n > 0$. Для этого по фиксированным и несовпадающим узлам t_1, t_2, \dots, t_n из I определим многочлен $\pi_n(t) = (t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_n)$, а затем по значениям $Jf = (f(t_1), \dots, f(t_n))$ функции f в этих узлах построим интерполяционный многочлен в форме Лагранжа:

$$p_n(t; Jf) = \sum_{k=1}^n f(t_k) l_{nk}(t), \quad l_{nk}(t) = \frac{\pi_n(t)}{\pi_n'(t_k)(t - t_k)}, \quad l_{nk}(t_j) = \delta_{kj}. \quad (2)$$

Вычислив весовые коэффициенты

$$c_k = \int_{-1}^{+1} r(t) l_{nk}(t) dt = \frac{1}{\pi_n'(t_k)} \int_{-1}^{+1} r(t) \frac{\pi_n(t)}{t - t_k} dt, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

построим квадратурную формулу:

$$\int_{-1}^{+1} r(t) f(t) dt = \sum_{k=1}^n c_k f(t_k) + \varphi_n(f), \quad r \in L_p[I], \quad f \in C[I]. \quad (4)$$

Здесь вещественные параметры t_k, c_k ($1 \leq k \leq n$) — это соответственно узлы и коэффициенты (веса) квадратурной формулы (4), а выражение

$$\varphi_n(f) = \int_{-1}^{+1} r(t) f(t) dt - \sum_{k=1}^n c_k f(t_k), \quad (5)$$

характеризующее точность представления интеграла конечной суммой, — функционал погрешности, корректно определённый на компакте $X \subset C$. Узлы и веса задаются либо явно, либо как итог вполне определенной последовательности вычислений.

Практическая ценность формулы (4) определяется порядком убывания к нулю с ростом числа узлов n функционала погрешности $\varphi_n(f)$. Причём выбор формулы (4) мотивируется желанием достичь нужной точности при наименьшем числе узлов n .

Квадратурную формулу (4) с коэффициентами (3) назовём интерполяционной формулой (или квадратурой); назовём её сходящейся (или допустимой) на элементе f из C , если $\varphi_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Формулы, не удовлетворяющие этому условию никогда, видимо, не используются на практике. При этом, если $\varphi_n(g) = 0$, то интерполяционная квадратурная формула (4) точна на g и g из $\ker \varphi_n = \{f \in C \mid \varphi_n(f) = 0\}$.

Обратим внимание, что ввиду произвольности функции f функционал погрешности $\varphi_n(f)$ формулы (4) в нуль никогда не обращается. Поэтому вычисление интеграла квадратурой (4) всегда осуществляется приближённо и с конечной точностью, достигаемой при конечном числе узлов n .

Итак, вычислить определённый интеграл приближённо — это значит, предъявив квадратурную сумму (4) из класса допустимых, построить значение интеграла с наперёд заданной точностью, измеряемой величиной $|\wp_n(f)|$ функционала погрешности (5).

При этом ясно, что сам факт сходимости квадратурной формулы (4) ещё не даёт нам право на приближённую замену интеграла конечной суммой: требуется квалифицированная оценка величины погрешности $|\wp_n(f)|$, получающаяся из-за прерывания бесконечного процесса суммирования. Такая оценка позволяет убедиться в достаточном для этого количестве слагаемых n в квадратурной сумме (4). Поэтому, если функционал $\wp_n(f)$ убывает к нулю с ростом n медленно, то тогда количество n слагаемых в сумме (4), требуемое для достижения заданной точности, может оказаться слишком большим и потому неприемлемым для реальных вычислений. Вследствие этого качество квадратурной суммы (4) определяется скоростью, с которой раскрываются заложенные в ней потенции, выражаемые законом убывания функционала погрешности $\wp_n(f)$ к нулю с ростом числа узлов n . Причём порядок убывания $\wp_n(f)$ к нулю зависит, как от конструктивных особенностей самой формулы (4), так и от наличия информации о “запасе” гладкости подынтегральной функции f .

Величина функционала погрешности $\wp_n(f)$ в силу равенства

$$\begin{aligned} \wp_n(f) &\equiv \int_{-1}^{+1} r(t) f(t) dt - \sum_{k=1}^n c_k f(t_k) = \\ &= \int_{-1}^{+1} r(t) [f(t) - Q_{n-1}(t)] dt - \sum_{k=1}^n c_k [f(t_k) - Q_{n-1}(t_k)] \end{aligned}$$

и определения величин $E_n(f)$ подынтегральной функции f оценивается так

$$|\wp_n(f)| \leq \|\wp_n\| E_n(f), \quad \|\wp_n\| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt + \sum_{k=1}^n |c_k|. \quad (6)$$

Замечательность оценки (6) — в её факторизуемости в произведение двух фактически независимых сомножителей $\|\wp_n\|$ и $E_n(f)$. Причём, если первый — $\|\wp_n\|$ связан с выбором базиса в \mathcal{P}^n , то второй — $E_n(f)$ от выбора базиса в \mathcal{P}^n не зависит и определяется исключительно гладкостью подынтегральной функции f . Оценка (6) в целом правильно отражает все особенности функционирования интерполяционного квадратурного процесса (4), хотя роль каждого из сомножителей в нём с ростом числа узлов n будет ощущаться по-разному.

Из оценки (6) следует, что свойства сходимости квадратурного процесса (4) существенно зависят не только от выбора узлов, но и от природы весовой функции $r(t)$. Причём наиболее благоприятными для цифровых вычислений окажутся как раз те формулы (4), сумма модулей весовых коэффициентов которых ограничена некоторым числом A , не зависящим от параметра n . В сущности, ограниченность множителя $\|\wp_n\|$ в оценке (6) и определяет границы практической применимости интерполяционной квадратурной формулы (4). Таким образом, оценивая величину $\|\wp_n\|$ заранее мы этим как бы стремимся предвидеть качество будущих цифровых вычислений, прежде чем они будут

фактически проделаны по формулам (4). При этом предварительное выяснение условий, при которых будет справедлива оценка $\|\varphi_n\| \leq A$ с постоянной $A > 0$, не зависящей от параметра n , носит принципиальный характер в оценке общей пригодности квадратурной формулы (4) для реальных вычислений.

Возникают, однако, вопросы. Насколько следует быть осмотрительным в отборе узлов в (4), если изменяется вес $r(t)$? И можно ли узлы в квадратурной формуле (4) подобрать так, чтобы выполнение оценки $\|\varphi_n\| \leq A$ (A — абсолютная постоянная), гарантировалось с достаточно произвольным весом $r(t)$?

Попробуем сначала разобраться с выбором базиса в подпространстве \mathcal{P}^n или что то же самое с выбором узлов на отрезке $I = [-1, 1]$. На практике часто используются квадратурные формулы, у которых сумма модулей их коэффициентов растёт неограниченно с ростом числа их узлов n [2]. При этом верхняя граница роста этой суммы определяется, судя по оценке

$$\sum_{k=1}^n |c_k| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{-1}^{+1} r(t) l_{nk}(t) dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{-1}^{+1} |r(t)| |l_{nk}(t)| dt \leq \|p_n\| \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt,$$

порядком роста констант Лебега $\|p_n\| = \max_{t \in I} \sum_{k=1}^n |l_{nk}(t)|$ к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Здесь $l_{nk}(t)$ — фундаментальные многочлены лагранжевой интерполяции (2), образующие базис в подпространстве \mathcal{P}^n .

Константы Лебега $\|p_n\|$ весьма чувствительны к разбиениям отрезка I , т.е. к выбору базиса в \mathcal{P}^n , квалифицирующего положение по отношению к нему подынтегральной функции f , определяемое системой чисел $J : C \rightarrow R^n$, $Jf = (f(t_1), \dots, f(t_n))$, — координатами подынтегральной функции f в \mathcal{P}^n .

Некоторое представление обо всём этом можно получить, исходя, например, из разбиений отрезка I нулями следующих классических многочленов:

- 1) Чебышёва первого рода $T_n(t) = \cos(n \arccos t) : \|p_n\| \asymp \ln n$ (см. [3, § 3, 2]);
- 2) Чебышёва второго рода $U_{n-1}(t) = \sin(n \arccos t) / \sqrt{1-t^2} : \|p_n\| \asymp n$ (см. [6, дополнение IX, формула 3]);
- 3) $(t^2 - 1)U_{n-1}(t) : \|p_n\| \asymp \ln n$ (см. [3, § 3, 2]);
- 4) Лежандра $P_n(t) : \|p_n\| \asymp \sqrt{n}$ (см. [6, XIV, § 4]);
- 5) Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, $(\alpha, \beta > -1) : \|p_n\| \asymp n^{\gamma+1/2}$ при $\gamma = \max(\alpha, \beta) > -1/2$ (см. [6, XIV, § 4]);
- 6) равномерное разбиение отрезка $I : \|p_n\| \asymp 2^n$ (см. [3, § 3, 2]).

(здесь $p_n \asymp g_n$ означает слабую эквивалентность, т.е. наличие двух констант c_1 и c_2 , $0 < c_1 \leq c_2$, не зависящих от параметра n , и таких, что $c_1 \leq p_n/g_n \leq c_2$).

Из приведённых оценок совершенно ясно, что с ростом параметра n характер изменения констант Лебега напрямую зависит от выбора базиса в \mathcal{P}^n . Причём порядок роста $\|p_n\|$, указывая, в силу теоремы Мюнца (см. [3]) на степень “переполненности” степенных базисов в \mathcal{P}^n , обнаруживает истинную их ценность в проблеме приближённого вычисления интеграла интерполяционной квадратурной формулой (4). Так что на практике отдавать предпочтение следует базисам, наиболее стесняющим рост констант Лебега, т.е. характеризующим близостью $\|p_n\|$ к абсолютной нижней границе $(1/8\sqrt{\pi}) \ln n$ (см. [7]).

Как видим, наиболее близкими к нижней границе роста констант Лебега $\|p_n\|$ являются разбиения отрезка I нулями следующих многочленов $T_n(t)$ и $(t^2 - 1)U_{n-1}(t)$. Другой выбор разбиений I ведёт к большему росту величин $\|p_n\|$ и тем самым к ухудшению с ростом числа узлов n оценки (6).

Можно ли предвидеть заранее, что интерполяционная квадратурная формула (4) определяет хорошо обусловленный вычислительный процесс и с некоторой точки зрения может характеризовать его наилучшим образом?

Постановка проблемы в такую плоскость отвечает насущным потребностям вычислительной практики и кардинально меняет взгляд, как на роль имеющейся информации о подынтегральной функции, так и на отбор узлов в интерполяционной квадратурной формуле (4): узлы, взятые наугад, для компьютерных расчётов не годятся.

Следующий результат, оставляя сравнительно мало возможностей для конкретного выбора узлов на отрезке I , выстраивает разрешения этой проблемы.

Теорема 1 (см. [4]) *Если $r(t)$ — суммируемая на отрезке I функция и, кроме того, $r(t)$ принадлежит L_p ($1 < p < \infty$), то интерполяционная квадратурная формула (4), построенная по нулям $t_k = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n}$, $1 \leq k \leq n$ многочлена Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ хорошо обусловлена, т.е. существует абсолютная, не зависящая от n , константа A и $\|\varphi_n\| \leq A$.*

Квадратурная формула как метод приближенного вычисления интеграла от непрерывной функции должна обладать свойством устойчивости к ошибкам округлений. Под этим подразумевается, что результат осуществляемых по формуле (4) вычислений должен слабо зависеть от вариации как узлов, так и значений в них подынтегральной функции $f(t)$. В литературе результаты о распространении ошибок округления в задании весовых коэффициентов в квадратурных формулах представлены фрагментарно и очень скупо. По традиции и мы остановимся только на вариации значений функции $f(t)$ в узлах [1].

Итак, приняв формулу (4) в качестве способа приближенного вычисления интеграла, мы значение числа её узлов n должны выбирать в зависимости от той точности $\varepsilon > 0$, с которой желаем получить ответ. Учитывая это и то, что реальные вычисления всегда производятся с конечным числом значащих цифр, с определенной точностью $\delta > 0$ следует задавать в узлах и значения самой непрерывной подынтегральной функции f . Оценку снизу допускаемой при этом ошибки получим, исходя из следующих соображений. Поскольку принятый способ вычисления интеграла состоит в замене интеграла квадратурной суммой (4), минимально допускаемая ошибка функции f в узлах не может быть меньше величины $E_n(f)$, так как это свидетельствовало бы о том, что принятый способ аппроксимации функции “плох”: не может быть полиномиального приближения непрерывной функции лучше наилучшего. И, стало быть, задавать в узлах значения f с точностью, меньшей $E_n(f)$, просто нецелесообразно. В связи с этим стоит принять $\delta = E_n(f)$, но тогда $\varepsilon > E_n(f) \sum_{k=1}^n |c_k|$. Из проведенного анализа ясно, что при вычислении интеграла по формуле (4) накопление ошибок округления существенно зависит от весовых коэффициентов $|c_k|$, $1 \leq k \leq n$. Поэтому на практике предпочтение следует отдавать тем квадратурам, у которых величина $\sum_{k=1}^n |c_k|$ имеет минимальное значение. Отсюда ясно, что величина суммы $\sum_{k=1}^n |c_k|$ имеет существенное значение для практики, ибо в конечном итоге определяет, сколько битов нам нужно удерживать в представлении $f(t_k)$ в виде двоичного числа в формуле (4). Полученное неравенство $\varepsilon > E_n(f) \sum_{k=1}^n |c_k|$ позволяет уже рационально решать вопрос о точности вычисления интеграла с помощью квадратурной формулы (4).

В одном частном случае значение этой суммы легко вычисляется. Так, если вес $r(t) > 0$, то, в силу условия $1 \in \ker \varphi_n$, минимальное значение суммы

$\sum_{k=1}^n |c_k|$ достигается тогда, когда все коэффициенты c_k в формуле (4) положительны. Действительно, если вес $r(t)$ суммируем и неотрицателен, то условие $1 \in \ker \wp_n$ равносильно следующему равенству

$$\sum_{k=1}^n c_k = \int_{-1}^{+1} r(t) dt, \quad \text{если } r(t) > 0.$$

Из которого с помощью множителей Лагранжа находим, что сумма $\sum_{k=1}^n |c_k|$ имеет наименьшее значение лишь в том случае, когда все коэффициенты c_k в формуле (4) положительны, т.е. $c_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. В результате получаем $\|\wp_n\| = 2 \int_{-1}^{+1} r(t) dt$. Итак, квадратурные формулы с положительными весовыми коэффициентами c_k наиболее благоприятны для компьютерных расчётов.

Напротив, наличие в квадратурной формуле (4) отрицательных коэффициентов служит серьёзным предупреждением о том, что существует опасность нарушения правильности её работы. Действительно, из условия $1 \in \ker \wp_n$ следует, что, если среди коэффициентов c_k есть отрицательные, то при всех n заведомо выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n |c_k| \geq \int_{-1}^{+1} r(t) dt$. Вследствие этого величина $\sum_{k=1}^n |c_k|$ может оказаться значительной (и даже зависящей от n), что является большим дефектом интерполяционной квадратурной формулы (4).

Следующий результат дополняет представление о том, насколько следует быть осмотрительным в отборе узлов в интерполяционной квадратуре (4).

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |c_k| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $K, K_n : C \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченные операторы

$$Kf = \int_{-1}^{+1} r(t) f(t) dt, \quad K_n f = \sum_{k=1}^n c_k f(t_k), \quad f \in X \subset C$$

с соответствующими нормами:

$$\|K\| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt, \quad \|K_n\| = \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Предлагаемый метод доказательства, в отличие от доказательства в [8], зиждется на теории регулярных возмущений линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве [9]. Согласно этой теории возмущение оператора K связывается с равномерной (по норме) сходимостью последовательности приближающих его операторов K_n .

Установление факта сходимости K_n по норме обычно встречает затруднение принципиального характера, связанное с выявлением условий, обеспечивающих выполнение предельного соотношения

$$\|K - K_n\| = \sup_{\|g\| \leq 1} \|Kg - K_n g\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Здесь *sup* берётся по единичному шару, т.е. по некомпактному в C множеству.

В рассматриваемом случае указанную трудность удаётся преодолеть, ориентируясь на ключевые свойства последовательности $\{K_n\}$: равномерную ограниченность $\|K_n\| \leq A$ и сильную [10] сходимость $\|Kg - K_n g\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, из равномерной ограниченности K_n в $G = \{g \in C \mid \|g\| \leq 1\}$ следует, что замыкание объединения $\bigcup_{n \geq 0} K_n(G)$ компактно. И потому, если равенство (8) не выполняется, т.е. существуют $\varepsilon > 0$ и некоторая последовательность $\{m_j\} \rightarrow \infty$ такие, что $\|K - K_{m_j}\| > \varepsilon$, то, поскольку K_n сходятся к K сильно, найдётся подпоследовательность $\{n_i\} \subseteq \{m_j\}$ такая, что $\|K - K_{n_i}\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$; получаем противоречие с ранее сделанным допущением.

Наряду с этим известно [9], что при “малых” возмущениях ограниченного оператора K , поведение спектрального радиуса $\rho(K) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|K^m\|^{1/m}$ является полунепрерывной сверху функцией, т.е. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|K_n\| \leq \rho(K) \leq \|K\|$. С другой стороны, из равномерной ограниченности $\|K_n\|$ и условия (8) следует, что $\|K\| \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|K_n\|$. В результате, получаем $\|K\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n\|$. \square

Полученный результат чрезвычайно важен на практике, поскольку ещё до начала вычислений мы должны быть уверены в том, что в интерполяционном квадратурном процессе (4) ошибки округления не накапливаются. Так как иначе нельзя будет ручаться, что числовой компьютерный ответ конструируется с достаточной точностью.

Замечание 1. Пусть $r(t) > 0$. Тогда из (7) и условия $1 \in \ker \wp_n$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |c_k| - \sum_{k=1}^n c_k \right) = 0.$$

Последнее означает асимптотическую с ростом числа узлов n положительность коэффициентов c_k в интерполяционной квадратурной формуле (4). Причём вклад отрицательных c_k в сумму $\sum_{k=1}^n |c_k|$ будет произвольно мал для достаточно больших n . Иными словами, для неотрицательных весовых функций $r(t)$ наличие отрицательных весовых коэффициентов в (4) действительно может быть, но сам их вклад в сумму $\sum_{k=1}^n |c_k|$ будет стремиться к нулю с ростом числа узлов n , т.е. весовые коэффициенты c_k таких формул являются положительными асимптотически.

Исследуем теперь также подробно характеристику $E_n(f)$ в оценке (6). Покажем, что асимптотика значений $E_n(f)$ с ростом параметра n обнаруживает закономерности в убывании к нулю величины $|\wp_n(f)|$ функционала погрешности квадратурной формулы (4) в зависимости от свойств гладкости подынтегральной функции f . Функция f становится при этом носителем информации о сходимости квадратурного процесса (4) на классах гладких функций из $C[I]$.

В самом деле, ряд дифференциальных свойств непрерывных на отрезке I функций определяется характером их возможной аппроксимации алгебраическими многочленами из \mathcal{P}^n . Так, классическая задача чебышёвского интерполирования функции f из C состоит в отыскании многочлена Q_{n-1} из \mathcal{P}^n такого, что $E_n(f) = \|f - Q_{n-1}\|$. При этом числовые характеристики $E_n(f)$ ($n > 0$) принадлежат к числу объектов, которыми обладает любая непрерывная функция f , и $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) \rightarrow 0$ (теорема Вейерштрасса). Более того, при

фиксированном n функция f представима в C многочленом Q_{n-1} с точностью $E_n(f)$, тем более высокой, чем выше гладкость самой f (теорема Джексона). Позитивный вывод из всего сказанного состоит в том, что в вопросах конструирования квадратурных формул следует стремиться к формулам, способным максимально полно сохранять информацию о гладкости подынтегральной функции f , т.е. квадратурная формула (4) должна быть точна на возможно более широком из подпространств $\mathcal{P}^m \subseteq \ker \varphi_n, m \leq n$. Фундаментальное при этом значение имеет открытие Джексоном возможности существенного уточнения классической теоремы Вейерштрасса и новая её формулировка в форме неравенств Джексона-Зинвела [11]:

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \min_{0 \leq k \leq n} \frac{a^k \|f^{(k)}\|}{n^k}, \text{ где } 1 < a < e, a \text{ — абсолютная константа.} \quad (8)$$

Из неравенства (8) нами будут извлечены факты, играющие определяющее значение для понимания феномена ненасыщаемости интерполяционной квадратурной формулы (4) в процессе изменения числа её узлов n .

Действительно, предположим, что функция f в (4) принадлежит гладкой шкале пространств $\cup_{k \geq 0} C^k[I]$ ($k \geq 0$ — целое) и, в частности,

$$f \in C^\infty[I], f \notin \mathcal{P}^n, \|f\| = c = G(0) \neq 0, \|f^{(k)}\| \leq G(k) \text{ и } \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty.$$

Введём пару функций числового аргумента x из $[0, \infty)$:

$$\lambda(x) = \begin{cases} G(0) & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ \inf_{0 \leq k \leq x} \frac{G(k)}{x^k} & \text{при } x \geq 1, \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ \max \left\{ k \mid 1 \leq k \leq x \ \& \ \lambda(x) = \frac{G(k)}{x^k} \right\}, & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Причём справедливы следующие соотношения:

$$\lambda(x) = \min_{0 \leq k \leq x} \frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\theta(x)]}{x^{\theta(x)}} \text{ и } E_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \lambda\left(\frac{n}{a}\right) \quad (1 < a < e < 3). \quad (9)$$

Указанные классы C^∞ -гладких функций не пусты: им принадлежат известные классы Жеврея, имеющие мажоранту $G(k) = cA^k k^{\alpha k}$ ($c > 0, \alpha \geq 1, A \geq 1$ — константы). Причём функции $\lambda(n)$ и $\theta(n)$ этих классов ведут себя с ростом n :

$$\lambda(n) \asymp e^{-\varrho \sqrt[n]{n}}, \quad \theta(n) \asymp [\varrho \sqrt[n]{n}], \quad n \rightarrow \infty, \quad \varrho > 0 \text{ — константа.} \quad (10)$$

(здесь $[x]$ — целая часть числа x , а отношение $f(n) \asymp g(n)$ означает слабую эквивалентность, т.е. наличие двух констант c_1 и c_2 , $0 < c_1 \leq c_2$, таких, что $c_1 \leq f(n)/g(n) \leq c_2$).

Справедлива следующая

Теорема 3. (см. [4]) *При $x \geq 1$ функция $\theta(x)$ целочисленна и неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с x . Функция $\lambda(x)$ строго монотонно убывает, непрерывна справа и стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. Функция $\lambda(x)$ терпит разрывы слева в тех и только*

тех точек x_i , которые являются точками разрыва функции $\theta(x)$. При этом справедливо равенство

$$\lambda(x) = c \cdot e^{-\int_1^x \frac{\theta(t)}{t} dt - \sum_{e^{-1} < r_i \leq x} |\sigma_i|}, \quad x \geq 1. \tag{11}$$

Здесь $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_i = \ln \lambda(x_i - 0) - \ln \lambda(x_i)$ для всех $i > 0$.

Следствие 1. Функция $\lambda(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ быстрее любой степени x , т.е. $\forall l \geq 0$ справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} x^l \lambda(x) = 0$.

Следствие 2. Функционал погрешности интерполяционной квадратурной формулы (4) на классе C^∞ -гладких функций оценивается таким способом

$$|\varphi_n(f)| \leq \frac{\pi}{2} \|\varphi_n\| \lambda\left(\frac{n}{a}\right), \quad \|\varphi_n\| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt + \sum_{k=1}^n |c_k| \leq 2 \int_{-1}^{+1} |r(t)| dt \quad (1 < a < 3). \tag{12}$$

Теорема 3 играет первостепенную роль в выяснении свойства ненасыщаемости интерполяционной квадратурной формулы (4). Простота зафиксированных в ней фактов обусловлена особой формой оценки погрешности (12), позволившей посредством теоремы Джексона-Зинвела (9) вместить серьезную мысль об эффективности квадратурного процесса (4), взглянув на наличие в нём экстраординарного запаса гладкости у подынтегральной функции f под особым —ненасыщаемым— углом зрения. В самом деле, найти оценку (12) было бы трудно, если изначально не руководствоваться стремлением построить квадратурную формулу (4), максимально точную на подпространстве многочленов $\mathcal{P}^n \subseteq C$. Это и привело к введению функции $\theta(n)$, намеренно вобравшей тот максимальный порядок $k = \theta(n)$ производной подынтегральной функции f , на котором реализуется, участвующий в определении $\lambda(n)$ минимум. В результате нелинейный механизм учёта запаса гладкости f в квадратурном процессе (4) объясняется, в силу теоремы 3, отчасти намеренной “хитростью”, допущенной нами в определении $\theta(n)$, отчасти следующих из нее свойств $\lambda(n)$ в (12). Таким образом квадратура (4) в отличие от формулы трапеций (1) обладает замечательной особенностью: её погрешность $\varphi_n(f)$ зависит лишь от гладкости f , и ее величина $|\varphi_n(f)|$ автоматически с ростом числа узлов n прослеживает дифференциальные свойства подынтегральной функции f , настраиваясь по фактической гладкости f на оптимальную для данного n оценку погрешности (12). Таким образом различные запасы гладкости f порождают и различные возможности развития квадратурного процесса (4). Иными словами, квадратурная формула (4) в отличие от формулы трапеций (1) оказалась “гибкой” в процессе вычислений, т.е. ненасыщаемой. И, стало быть, отличие формулы (4) от формулы трапеций (1) состоит в следующем: порядок k сходимости квадратуры (4) — переменный и его величина $k = \theta(n)$ формируется в процессе вычислений автоматически на основе информации о запасае гладкости подынтегральной функции f . При этом величина $\theta(n)$ представляет собой неубывающую функцию числа узлов n и лишена всякого конкретного содержания вне свойств гладкости f . Но в каждой конкретной ситуации совокупность состояний $\theta(n)$ отличается от совокупности каких бы то ни было произвольных, но

заранее отобранных значений, как это бывает в насыщаемых квадратурах, набор величин порядков сходимости которых всегда заранее зафиксирован и в случае формулы трапеций (1) он не превышает значения 2. Таким образом вопреки сложившимся в вычислительной практике представлениям, интерполяционный квадратурный процесс (4), перестаёт быть пассивным потребителем информации о запасе гладкости подынтегральной функции f . Его конструкция уже изначально способна вмещать, образно говоря, бесконечное множество вычислительных методов, сосредоточенных, так сказать, в ней одной. И потому в условиях экстраординарной гладкости f теорема 3 обнаруживает новый нелинейный механизм эффективного управления интерполяционным квадратурным процессом (4). Причём каким бы ни оказался сам механизм строго монотонного с ростом числа узлов n убывания к нулю функционала погрешности $|\varphi_n(f)|$ на классе бесконечно гладких функций, сам факт его существования уже наполняет идею ненасыщаемости значительным для вычислительной практики содержанием: аккомпанируя каждому узлу, добавленному в формулу (4), неведомый до этого нелинейный механизм учёта дифференциальных возможностей подынтегральной функции f обеспечивает квадратуре (4) строго монотонное с переменным шагом $\theta(n)$ восхождение по ступеням точности к конструируемому числовому ответу. При этом даже незначительное изменение в (4) числа узлов n в сторону увеличения неотвратно ведёт к возрастанию точности вычислений. Таким образом одним из неожиданных свойств интерполяционной квадратурной формулы (4), принципиально отличающей её от формулы трапеций (1), является отсутствие у неё главного члена погрешности. В этом характеристическом свойстве ненасыщаемого квадратурного процесса (4) и содержится тайна его эффективности в цифровых вычислениях [3].

Замечание 2. Обратим внимание на то, что применение на практике гауссовских квадратурных формул и метода быстрого преобразования Фурье, входящих в “джентельменский” набор численных алгоритмов любого современного вычислителя-практика, выявляет немало загадочных свойств и качеств [2], приводящих при всей их необъяснимости существующими представлениями, к построению ответа всегда эффективно и легко. Впрочем, было бы удивительно, если бы все обстояло не так: на основании теоремы 3 гауссовские квадратурные формулы и метод быстрого преобразования Фурье просто ненасыщаемы.

Таким образом информация о C^∞ -гладкости подынтегральной функции f в (4), перестав быть бесполезной теоретической тонкостью, в рамках свойства ненасыщаемости численного метода обретает исключительно важное для практики значение: никогда прежде вычислитель не останавливался перед проблемой её использования для нужд реальных (компьютерных) вычислений.

Конечно, наиболее трудной в указанном подходе является проблема вычисления квадратурных коэффициентов c_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Не останавливаясь на этой проблеме подробно, ввиду её нетривиальности, укажем только, что рекомендации по этому поводу имеются в работе [12].

В заключение отметим, что проведённое нами исследование показало, что если при построении квадратурных формул с главным членом погрешности, т.е. насыщаемых, приходится иметь дело со сравнительно простыми фактами математического анализа, то обращение к конструированию ненасыщаемых квадратурных формул немедленно демонстрирует насколько иная ситуация

складывается в этом случае. И связано это прежде всего с тем, что современный компьютер — это лишь необходимый, но далеко не достаточный инструмент для конструирования достоверного компьютерного числового ответа: разрешить проблему доверия качеству компьютерного числового ответа можно лишь с опорой на интеллектуальный ресурс исследуемой задачи. В этой связи построение компьютерного числового ответа гарантированного качества становится занятием в гораздо бóльшей степени интеллектуальным, нежели чисто техническим, аппаратным.

REFERENCES

- [1] V.L. Vaskevich, *Guaranteed accuracy of the calculation of multidimensional integrals*, D. Sc. dissertation, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk 2003.
- [2] N.S. Bachvalov, *Numerical methods. Analysis, algebra, ordinary differential equations*, Mir, Moscow 1976. Zbl 0361.65003
- [3] K.I. Babenko, *Foundations of numerical analysis*, Nauka, Moscow, 1986, Zbl 0624.65001 (2nd ed., *Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika*, Moscow-Izhevsk 2002.
- [4] V.N. Belykh, *Nonsaturable quadrature formulas on an interval (on Babenko's problem)*, Dokl. Math., **93**:2 (2016), 197–201. Zbl 1350.41033
- [5] S.K. Godunov, A.G. Antonov, O.P. Kirilyuk, V.I. Kostin, *Guaranteed accuracy in numerical linear algebra*, Math. Appl., **252**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993. Zbl 0793.65014
- [6] G. Szego, *Orthogonal polynomials*, Fizmatlit, Moscow 1962. Zbl 0100.28405
- [7] I.K. Daugavet, *Introduction in the classical theory of function approximation*, St Petersburg State University, St Petersburg, 2011.
- [8] V.N. Belykh, *Peculiarities of the numerical realization of nonsaturable quadrature formulas on a finite interval*, Sib. Math. J., **58**:5 (2017), 778–785. Zbl 1382.65068
- [9] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1966. Zbl 0148.12601
- [10] A.K. Varma, P. Vertesi, *Some Erdős-Feldheim type teorems on mean convergence of Lagrange interpolation*, J. Math. Anal. Appl., **91** (1983), 68–79. Zbl 0577.41006
- [11] H.F. Sinwel, *Uniform approximation of differentiable functions by algebraic polynomials*, J. Approx. Theory., **32**:1 (1981), 1–8. Zbl 0471.41010
- [12] V.N. Belykh, *The problem of constructing unsaturated quadrature formulas on an interval*, Sb. Math., **210**:1 (2019), 24–58. Zbl 7043913

ВЛАДИМИР НИКИТИЧ БЕЛЫХ
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
 Email address: belykh@math.nsc.ru