S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1075–1082 (2021) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2021.18.82 MSC 05C25

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ ТЕРВИЛЛИГЕРА С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{50,42,1;1,2,50\}$ И $\{50,42,9;1,2,42\}$ НЕ СУЩЕСТВУЮТ

А.А. МАХНЕВ, М.С. НИРОВА

Abstract. Let Γ be a distance-regular graph and its local subgraphs are isomorphic the Hoffman-Singleton graph. A.L. Gavrilyuk and A.A. Makhnev proved that Γ is the Terwilliger graph with intersection array $\{50,42,9;1,2,42\}$ or $\{50,42,1;1,2,50\}$. In this paper we prove that Terwilliger graphs with intersection arrays $\{50,42,1;1,2,50\}$ and $\{50,42,9;1,2,42\}$ do not exist.

Keywords: distance-regular graph, Terwilliger graph, triple intersection numbers.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup[a]$. Пусть Γ — граф диаметра d, $i\in\{1,2,3,...,d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u,w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u,w)=i$.

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\dots,b_{d-1};c_1,\dots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят

Makhnev, A.A., Nirova, M.S., Distance-regular Terwilliger graphs with intersection arrays $\{50,42,1;1,2,50\}$ and $\{50,42,9;1,2,42\}$ do not exist.

Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований-ГФЕН Китая (проект № 20-51-53013).

Поступила 11 декабря 2020 г., опубликована 20 октября 2021 г.

от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ [1]. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{b_0, b_1; 1, c_2\}$ на v вершинах является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), где $k = b_0$, $\lambda = k - b_1 - 1, \mu = c_2$. Графом Хоффмана-Синглтона называется сильно регулярный граф с параметрами $(50, 7, 0, 1)$.

Неполный граф Γ называется *графом Тервиллигера* (с параметром μ), если пересечение окрестностей любых двух его вершин на расстоянии 2 является μ-кликой.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором локальные подграфы (окрестности вершин) изоморфны графу Хоффмана-Синглтона. Тогда Γ является графом Тервиллигера [2] и имеет массив пересечений $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$ или $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ [3]. Ввиду [1, теорема 1.16.3] в дистанционно регулярном графе Тервиллигера с массивом пересечений $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$ или $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ локальные подграфы изоморфны графу Хоффмана-Синглтона.

В [1, p. 36] сформулирована проблема существования дистанционно регулярных графов Тервиллигера с массивами пересечений $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$ и $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$. В [4] найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярных графов Тервиллигера с массивами пересечений $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$ и $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$. Оказалось, что группа автоморфизмов любого из этих графов имеет нечетный порядок.

В данной работе доказано несуществование этих дистанционно регулярных графов Тервиллигкра.

В теореме 1 удалось получить более сильный результат — доказано несуществование произвольного дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ *не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф Тервиллигера с массивом пересечений* $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$ *не существует.*

1. Тройные числа пересечений

В работе используются тройные числа пересечений [5].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right] = |\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}|$. Числа $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако, в [5] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда имеем $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей, получим:

$$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh], \sum_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h], \sum_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0]\,(+).$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$, $[ijh]' = \left[{uvw \atop ihj} \right]$, $[ijh]^* = \left[{uvw \atop jih} \right]$ и $[ijh]^\sim = \left[{uvw \atop hji} \right]$. В случаях $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$ или $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 3$ вычисление чисел $[ijh]' = \left[{uwv \atop ihj} \right]$, $[ijh]^* = \left[{vuw \atop jih} \right]$ и $[ijh]^\sim = \left[{wvu \atop hji} \right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений, аналогичная симметризации тензоров в тензорной алгебре) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Доказательство теоремы 1

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$. Тогда граф имеет спектр $50^1, 10^{357}, -1^{50}, -5^{714}$, $1+50+1050+21 = 1122$ вершин, Γ_3 — объединение 51 изолированных 22-клик, и дуальная матрица собственных значений равна

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 357 & 50 & 714 \\ 1 & \frac{357}{5} & -1 & -\frac{357}{5} \\ 1 & -\frac{17}{5} & -1 & \frac{17}{5} \\ 1 & -17 & 50 & -34 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для чисел пересечений графа* Γ *верны равенства*

(1) $p^1_{11} = 7$, $p^1_{21} = 42$, $p^1_{32} = 21$, $p^1_{22} = 987$, $p^1_{33} = 0$;

(2) $p^2_{11} = 2$, $p^2_{12} = 47$, $p^2_{13} = 1$, $p^2_{22} = 982$, $p^2_{23} = 20$, $p^2_{33} = 0$;

(3) $p^3_{12} = 50$, $p^3_{13} = 0$, $p^3_{22} = 1000$, $p^3_{23} = 0$, $p^3_{33} = 20$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Зафиксируем вершины u, v, w графа Γ и положим $\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Положим $\Delta = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени $p^2_{22} = 982$ на $k_2 = 1050$ вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 1$. *Тогда для* $r_3 = [322]$ *и* $r_4 = [212]$ *верны равенства:*

(1) $[111] = -r_3 + r_4 - 20$, $[112] = [121] = r_3 - r_4 + 22$, $[122] = -r_3 + r_4 + 24$, $[123] = [132] = 1$;

(2) $[211] = -r_4 + 46$, $[212] = [221] = r_4$, $[222] = -r_4 + 962$, $[223] = [232] = 20$;
(3) $[311] = r_3 - 19$, $[312] = [321] = -r_3 + 20$, $[322] = r_3$,
где $r_3 \in \{19, 20\}$, $r_4 \in \{39, 40, ..., 42\}$.

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+) и вводя независимые переменные $r_3 = [322]$ и $r_4 = [212]$, получим равенства из заключения леммы. Учитывая неотрицательность тройных чисел пересечений, получим включения $r_3 \in \{19, 20\}$, $r_4 \in \{39, 40, ..., 42\}$. □

По лемме 2 имеем $920 \leq [222] = -r_4 + 962 \leq 923$.

Параметры r_1 (возникает при вычислении тройных чисел пересечений для вершин с $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 1$) и r_2 (возникает при вычислении тройных чисел пересечений для вершин с $d(u,v) = 2, d(u,w) = d(v,w) = 1$) в работе не используются.

Лемма 3. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 3$. *Тогда верны равенства:*
(1) $[112] = [121] = 2$, $[122] = 45$, $[133] = 1$;
(2) $[212] = [221] = 47$, $[222] = 935$, $[233] = 19$;
(3) $[312] = [321] = 1$, $[322] = 19$.

Доказательство. Упрощение формул (+). □

По лемме 3 имеем $[222] = 935$.

Лемма 4. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда для* $r_5 = [221]$, $r_6 = [212]$, $r_7 = [112]$ *и* $r_8 = [111]$ *верны равенства:*
(1) $[111] = r_8$, $[112] = r_7$, $[113] = -r_7 - r_8 + 2$, $[121] = -r_5 + r_6 + r_7$, $[122] = r_5 - r_6 - 2r_7 - r_8 + 48$, $[123] = r_7 + r_8 - 1$, $[131] = r_5 - r_6 - r_7 - r_8 + 2$, $[132] = -r_5 + r_6 + r_7 + r_8 - 1$;
(2) $[211] = -r_6 - r_7 - r_8 + 48$, $[212] = r_6$, $[213] = r_7 + r_8 - 1$, $[221] = r_5$, $[222] = -r_5 + r_7 + r_8 + 960$, $[223] = -r_7 - r_8 + 21$, $[231] = -r_5 + r_6 + r_7 + r_8 - 1$, $[232] = r_5 - r_6 - r_7 - r_8 + 21$;
(3) $[311] = r_6 + r_7 - 46$, $[312] = [321] = -r_6 - r_7 + 47$, $[322] = r_6 + r_7 - 27$,
где $r_5, r_6 \in \{44, 45, 46, 47\}$, $r_7, r_8 \in \{0, 1, 2\}$.

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 2. □

По лемме 4 имеем $913 \leq [222] = -r_5 + r_7 + r_8 + 960 \leq 920$.

Так как $p^2_{12} = 47$, $p^2_{23} = 20$, то ввиду лемм 2, 3 для числа ребер e между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ в графе Λ имеем неравенства $61940 = 47 \cdot 920 + 20 \cdot 935 \leq e \leq 47 \cdot 923 + 20 \cdot 935 = 62081$. По аналогии с прямоугольным соотношением $k(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\mu$ для вполне регулярного графа с параметрами (v, k, λ, μ) получим равенство $e = 982(981 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $63.07 \leq 981 - \lambda \leq 63.22$ и $917.78 \leq \lambda \leq 917.93$. Здесь среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$ равно $\sum_i [222]^i/982$.

Симметризация для вершин u, v, w с $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. Имеем $[111] = r_8 = r'_8 = r^*_8 = r^{\sim}_8$, $[112] = r_7 = r^*_7$, $[212] = r_6 = r^{\sim}_6$, $[221] = r_5 = r^*_5$ и $r'_6 = r_5$.

Так как $[112] = r_7 = r^*_7$, то $r'_7 = (r^{\sim}_7)^*$, поэтому $[121] = -r_5 + r_6 + r_7 = [211]^* = -r^*_6 - r^*_7 - r^*_8 + 48$ и $r_6 + r_7 + r^*_6 + r^*_7 + r^*_8 = r_5 + 48$. Аналогично, $[212] = r_6 = r^{\sim}_6$, $r'_6 = (r^*_{17})^{\sim}$, поэтому $[221]^{\sim} = r^{\sim}_5 = [122] = r_5 - r_6 - 2r_7 - r_8 + 48$ и $r_6 + 2r_7 + r_8 + r^{\sim}_5 = r_5 + 48$. Сравнивая с $r_6 + r_7 + r^*_6 + r^*_7 + r^*_8 = r_5 + 48$, получим $r^*_6 = r^{\sim}_5$

Наконец, $[221]=r_5=r_5^*$, $r_5'=(r_5^\sim)^*$, поэтому $[212]^*=r_6^*=[122]=r_5-r_6-2r_7-r_8+48$ и $r_6^*+r_6+2r_7+r_8=r_5+48$, $[131]=r_5-r_6-r_7-r_8+2=[113]'=-r_7'-r_8'+2$, поэтому $r_5-r_6=r_7-r_7'$.

Лемма 5. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $r_6+r_7=46$, то $r_5=r_6=45$, $r_7=r_8=1$ и мы имеем симметризованный массив*

$[111]=[112]=[121]=1$, $[113]=[131]=0$, $[122]=45$, $[123]=[132]=1$*;*

$[211]=1$, $[212]=[221]=45$, $[213]=[231]=1$, $[222]=917$, $[223]=[232]=19$*;*

$[311]=0$, $[312]=[321]=1$, $[322]=19$*;*

(2) *если $r_6+r_7=47$, то $r_5=r_6=45$, $r_7=r_8=1$ и*

$[111]=0$, $[112]=2$, $[113]=0$, $[121]=1$, $[122]=45$, $[123]=1$, $[131]=1$, $[132]=0$*;*

$[211]=1$, $[212]=45$, $[213]=1$, $[221]=46$, $[222]=916$, $[223]=19$, $[231]=0$, $[232]=20$*;*

$[311]=1$, $[312]=[321]=0$, $[322]=20$.

Доказательство. По лемме 4 имеем $46\le r_6+r_7\le 47$.

Пусть $r_6+r_7=46$. Так как $[311]=r_6+r_7-46=0$, $[131]=r_5-r_8-44$, $[113]=-r_7-r_8+2$, $[121]=-r_5+r_6+r_7$, то $44+r_8\le r_5\le 46$, $0=[131]^*=r_5^*-r_8^*-44=r_5-r_8-44$ и $r_5=r_8+44$. Отсюда $r_5=r_5'=[212]=r_6$ и $r_5=r_5^\sim=[122]=r_5-r_7-r_8+2$, поэтому $r_7+r_8=2$, $r_7=r_8=1$ и выполняются равенства из утверждения (1) леммы.

Пусть $r_6+r_7=47$. Тогда $[312]=[321]=-r_6-r_7+47=0$. Далее, $[231]=[132]=-r_5+r_8+46$. Отсюда $r_5=r_5^\sim=[122]=r_5-r_7-r_8+2$ и $r_7+r_8=2$. Теперь $0=[123]^\sim=r_7^\sim+r_8^\sim-1=r_7^\sim+r_8^\sim-1$ и $r_7^\sim+r_8=1$. Сравнивая с $r_7+r_8=2$, получим $r_7-r_7^\sim=1$. Если $r_7=r_8=1$, то $0=r_7^\sim=[211]=-r_6+46$, противоречие. Значит, $r_7=2, r_8=0$, $r_6=45$, $r_5=46$ и

(1) $[111]=0$, $[112]=2$, $[113]=0$, $[121]=1$, $[122]=45$, $[123]=1$, $[131]=1$, $[132]=0$;

(2) $[211]=1$, $[212]=45$, $[213]=1$, $[221]=46$, $[222]=916$, $[223]=19$, $[231]=0$, $[232]=20$;

(3) $[311]=1$, $[312]=[321]=0$, $[322]=20$, $\square$

По лемме 5 имеем $[222]\in\{916,917\}$. Противоречие с тем, что среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$, найденное после леммы 4, больше 917.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф Тервиллигера с массивом пересечений $\{50,42,9;1,2,42\}$. Тогда граф имеет спектр $50^1, 11^{350}, -1^{390}$, -6^{585}, $1+50+1050+225=1326$ вершин, и дуальная матрица собственных значений равна

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 350 & 390 & 585\\ 1 & 77 & -\frac{39}{5} & -\frac{351}{5}\\ 1 & -1 & -\frac{39}{5} & \frac{39}{5}\\ 1 & -14 & \frac{182}{5} & -\frac{117}{5}\end{pmatrix}.$$

Лемма 6. *Для чисел пересечений графа Γ верны равенства*

(1) $p^1_{11}=7$, $p^1_{21}=42$, $p^1_{32}=189$, $p^1_{22}=819$, $p^1_{33}=36$;
(2) $p^2_{11}=2$, $p^2_{12}=39$, $p^2_{13}=9$, $p^2_{22}=830$, $p^2_{23}=180$, $p^2_{33}=36$;
(3) $p^3_{12}=42$, $p^3_{13}=8$, $p^3_{22}=840$, $p^3_{23}=168$, $p^3_{33}=48$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Зафиксируем вершины u,v,w графа Γ и положим $\{ijh\}=\left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh]=\left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Положим $\Delta=\Gamma_2(u)$, $\Lambda=\Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени $p^2_{22}=830$ на $k_2=1050$ вершинах.

Лемма 7. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=1$. Тогда верны равенства:*
(1) $[111]=-s_8+2$, $[112]=[121]=s_8$, $[122]=-s_5-s_8+39$, $[123]=[132]=s_5$ $[133]=-s_5+9$;
(2) $[211]=s_7+s_8-4$, $[212]=[221]=-s_7-s_8+42$, $[222]=s_5-s_6+s_8+779$, $[223]=[232]=-s_5+s_6+s_7+9$, $[233]=s_5-s_6-s_7+171$;
(3) $[311]=-s_7+9$, $[312]=[321]=s_7$, $[322]=s_6$, $[323]=[332]=-s_6-s_7+180$, $[333]=s_6+s_7-144$,
где $s_5\in\{0,1,...,9\}$, $s_6\in\{135,136,...,178\}$, $s_7\in\{2,3,...,9\}$, $s_8\in\{0,1,2\}$.

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+), и вводя независимые переменные $s_5=[123]$,$s_6=[322]$, $s_7=[312]$, и $s_8=[112]$, получим равенства из заключения леммы. Учитывая неотрицательность тройных чисел пересечений, получим включения $s_5\in\{0,1,...,9\}$, $s_6\in\{135,136,...,178\}$, $s_7\in\{2,3,...,9\}$, $s_8\in\{0,1,2\}$. □

По лемме 7 имеем $601\le[222]=s_5-s_6+s_8+779\le 655$. Так как $\{v,w\}\cup\Lambda(v)\cup\Lambda(w)$ содержит $1662-[222]$ вершин, то $612\le[222]$.

Лемма 8. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=3$. Тогда для $s_{23}=[312]$, $s_{24}=[222]$, $s_{25}=[231]$, $s_{26}=[212]$, $s_{27}=[121]$ и $s_{28}=[113]$ верны равенства:*
(1) $[112]=-s_{23}-s_{26}+42$, $[113]=s_{23}+s_{26}-40$, $[121]=s_{27}$, $[122]=s_{23}+s_{26}-s_{27}+s_{28}-10$, $[123]=-s_{23}-s_{26}-s_{28}+49$, $[131]=-s_{27}+2$, $[132]=s_{27}-s_{28}+7$, $[133]=s_{28}$;
(2) $[212]=s_{26}$, $[213]=-s_{26}+39$, $[221]=-s_{25}+39$, $[222]=s_{24}$, $[223]=-s_{24}+s_{25}+791$, $[231]=s_{25}$, $[232]=-s_{24}-s_{26}+830$, $[233]=s_{24}-s_{25}+s_{26}-651$;
(3) $[312]=s_{23}$, $[313]=-s_{23}+9$, $[321]=s_{25}-s_{27}+3$, $[322]=-s_{23}-s_{24}-s_{26}+s_{27}-s_{28}+849$, $[323]=s_{23}+s_{24}-s_{25}+s_{26}+s_{28}-672$, $[331]=-s_{25}+s_{27}+6$, $[332]=s_{24}+s_{26}-s_{27}+s_{28}-669$, $[333]=-s_{24}+s_{25}-s_{26}-s_{28}+699$,
где $s_{23}\in\{1,2,...,9\}$, $s_{24}\in\{623,624,...,676\}$, $s_{25}\in\{0,1,...,8\}$, $s_{26}\in\{31,32,...,39\}$, $s_{27}\in\{0,1,2\}$, $s_{28}\in\{0,1,...,9\}$.

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 7. □

По лемме 8 имеем $623\le[222]=s_{24}\le 676$.

Лемма 9. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=2$. Тогда для $s_{15}=[222]$, $s_{16}=[311]$, $s_{17}=[113]$, $s_{18}=[333]$, $s_{19}=[122]$, $s_{20}=[112]$, $s_{21}=[231]$ и $s_{22}=[321]$ верны равенства:*
(1) $[111]=-s_{17}-s_{20}+2$, $[112]=s_{20}$, $[113]=s_{17}$, $[121]=-s_{16}+s_{17}+s_{20}+s_{21}-s_{22}$, $[122]=s_{19}$, $[123]=s_{16}-s_{17}-s_{19}-s_{20}-s_{21}+s_{22}+39$, $[131]=s_{16}-s_{21}+s_{22}$, $[132]=-s_{19}-s_{20}+39$, $[133]=-s_{16}+s_{19}+s_{20}+s_{21}-s_{22}-30$;

(2) $[211] = -s_{16} + s_{17} + s_{20}$, $[212] = -s_{15} + s_{16} - s_{18} - s_{19} - s_{20} + s_{22} + 715$, $[213] = s_{15} - s_{17} + s_{18} + s_{19} - s_{22} - 676$, $[221] = s_{16} - s_{17} - s_{20} - s_{21} + 39$, $[222] = s_{15}$, $[223] = -s_{15} - s_{16} + s_{17} + s_{20} + s_{21} + 790$, $[231] = s_{21}$, $[232] = -s_{16} + s_{18} + s_{19} + s_{20} - s_{22} + 114$, $[233] = s_{16} - s_{18} - s_{19} - s_{20} - s_{21} + s_{22} + 66$;

(3) $[311] = s_{16}$, $[312] = s_{15} - s_{16} + s_{18} + s_{19} - s_{22} - 676$, $[313] = -s_{15} - s_{18} - s_{19} + s_{22} + 685$, $[321] = s_{22}$, $[322] = -s_{15} - s_{19} + 829$, $[323] = s_{15} + s_{19} - s_{22} - 649$, $[331] = -s_{16} - s_{22} + 9$, $[332] = s_{16} - s_{18} + s_{22} + 27$, $[333] = s_{18}$,

где $s_{15} \in \{610, 611, ..., 666\}$, $s_{16}, s_{17}, s_{20} \in \{0, 1, ..., 2\}$, $s_{18} \in \{0, 1, ..., 36\}$, $s_{19} \in \{28, 29, ..., 39\}$, $s_{21}, s_{22} \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 7. □

По лемме 9 имеем $s_{16} \le s_{17} + s_{20} \le 2$ и $610 \le [222] = s_{15} \le 666$.

Симметризация. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда $[112] = s_{20} = s_{20}^*$, $[113] = s_{17} = s_{17}^*$, $[122] = s_{19} = s_{19}'$, $[222] = s_{15} = s_{15}' = s_{15}^* = s_{15}^\sim$, $[311] = s_{16} = s_{16}'$, $[333] = s_{18} = s_{18}' = s_{18}^* = s_{18}^\sim$, $[231] = s_{21} = [321]^* = s_{22}^*$ и $[111] = -s_{17} - s_{20} + 2$, поэтому $s_{17} + s_{20} = s_{17}' + s_{20}' = s_{17}^\sim + s_{20}^\sim$.

Далее, $[113] = s_{17} = [311]^\sim = s_{16}^\sim$, $[121] = -s_{16} + s_{17} + s_{20} + s_{21} - s_{22} = [112]' = s_{20}'$, поэтому $s_{17} + s_{20} + s_{21} = s_{16} + s_{20}' + s_{22}$. С учетом равенства $s_{17} + s_{20} = s_{17}' + s_{20}'$ получим $s_{17}' + s_{21} = s_{16} + s_{22}$. Аналогично, $[112] = s_{20} = s_{20}^*$ влечет $s_{20}' = (s_{20}^\sim)^*$, поэтому $[121] = -s_{16} + s_{17} + s_{20} + s_{21} - s_{22} = [211]^* = -s_{16}^* + s_{17}^* + s_{20}^*$ и $s_{21} - s_{22} = s_{16} - s_{16}^*$.

Так как $[122] = s_{19} = s_{19}'$, то $s_{19}^* = (s_{19}^\sim)'$, поэтому $[212] = -s_{15} + s_{16} - s_{18} - s_{19} - s_{20} + s_{22} + 715 = [221]' = s_{16}' - s_{17}' - s_{20}' - s_{21}' + 39$ и $s_{15} + s_{18} + s_{19} = s_{17} + s_{21}' + s_{22} + 676$. Имеем $[311] = s_{16} = s_{16}'$, $s_{16}^* = (s_{16}^\sim)'$, поэтому $[131] = s_{16} - s_{21} + s_{22} = [113]' = s_{17}'$.

Лемма 10. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. *Если* $s_{17} + s_{20} = 0$, *то* $s_{16} = 0$, $s_{21} = s_{22} = 0$, $s_{19} = 39$, $s_{15} + s_{18} + s_{19} = 676$ *и мы имеем симметризованный массив*

$[111] = 2$, $[112] = [113] = [121] = [131] = 0$, $[122] = s_{19}$, $[123] = [132] = 0$, $[133] = 9$;

$[211] = 0$, $[212] = [221] = 39$, $[213] = [231] = 0$, $[222] = s_{15}$, $[223] = [232] = -s_{15} + 790$, $[233] = s_{15} - 610$;

$[311] = [312] = [321] = 0$, $[313] = [331] = 9$, $[322] = -s_{15} + 790$, $[323] = [332] = s_{15} - 610$, $[333] = 637 - s_{15}$.

Доказательство. Пусть $s_{17} + s_{20} = 0$. Тогда $[111] = 2$ и $[112] = [121] = [211] = 0$. Отсюда $[211] = -s_{16} = 0$ и $s_{21} = s_{22}$. Так как $[123] = -s_{19} + s_{22} + 39 = [132]' = -s_{19}' + 39$, то $s_{22} = 0$. Далее, $[213]' = s_{15}' + s_{18}' + s_{19}' - 676 = [231] = 0$, поэтому $s_{15}' + s_{18}' + s_{19}' = s_{15} + s_{18} + s_{19} = 676$. Наконец, $[323] = s_{15} + s_{19} - 649 = s_{15}^\sim + s_{19}^\sim - 649$, поэтому $s_{19} = s_{19}^\sim$, из равенств $0 = [321] = [123]^\sim = -s_{19}^\sim + 39$ следует, что $s_{19} = 39$ и мы имеем симметризованный массив

$[111] = 2$, $[112] = [113] = [121] = [131] = 0$, $[122] = s_{19}$, $[123] = [132] = 0$, $[133] = 9$;

$[211] = 0$, $[212] = [221] = 39$, $[213] = [231] = 0$, $[222] = s_{15}$, $[223] = [232] = -s_{15} + 790$, $[233] = s_{15} - 610$;

$[311] = [312] = [321] = 0$, $[313] = [331] = 9$, $[322] = -s_{15} + 790$, $[323] = [332] = s_{15} - 610$, $[333] = 637 - s_{15}$. □

Завершим доказательство теоремы 2. Зафиксируем ребро $\{y, z\}$ из Γ. Так как окрестности вершин в Γ изоморфны графу Хофмана-Синглтона, то $[y] \cap [z] = \{u_1, ..., u_7\}$ является кокликой. Применим лемму 10 к тройке вершин (u_1, u_i, u_j) вместо (u, v, w). Заметим, что $[u_1] \cap [u_i] = [u_1] \cap [u_j] = \{y, z\}$, поэтому $[112] = s_{20} = [113] = s_{17} = 0$. По лемме 10 подграф $[u_1]$ содержит 9 вершин из $\Gamma_3(u_i) \cap \Gamma_3(u_j)$. Напомним, что $b_2 = 9$, следовательно, $[u_1]$ содержит 9 вершин из $\Gamma_3(u_2) \cap ... \cap \Gamma_3(u_7)$. Отсюда $\Gamma_3(u_6) \cap \Gamma_3(u_7)$ содержит по 9 вершин из $[u_1], ..., [u_5]$, всего 45 вершин из $[u_1] \cup ... \cup [u_5]$. Противоречие с тем, что $p^2_{33} = 36$.

Теорема 2 доказана.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag. Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073

[2] A.A. Makhnev, *Graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Hoffman-Singleton graph*, Proc. Steklov Inst. Math., **267**, Suppl. **1** (2009), S128-S148. Zbl 1237.05059

[3] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On distance-regular graphs in which the neighborhood of each vertex is isomorphic to the Hoffman-Singleton graph*, Dokl. Math., **80**:2 (2009), 665–668. Zbl 1285.05153

[4] A.L. Gavrilyuk, Wenbin Guo, A.A. Makhnev, *Automorphisms of Terwilliger graphs with* $\mu = 2$, Algebra Logik, **47**:5 (2008), 330–339. Zbl 1164.05466

[5] K. Coolsaet, A. Jurišić, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Ser. A, **115**:6 (2008), 1086–1095. Zbl 1182.05132

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
16, S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
Email address: makhnev@imm.uran.ru

Marina Sefovna Nirova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
175, Chernyshevsky str.,
Nalchik, 360004, Russia
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
16, S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
Email address: nirova_m@mail.ru