

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 512.517

MSC 20H25

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ РЕГУЛЯРНОСТИ
 P -ГРУППЫ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К ВОПРОСУ ВЕРФРИЦА

С.Г. КОЛЕСНИКОВ, В.М. ЛЕОНТЬЕВ

АБСТРАКТ. We obtain a necessary condition for the regularity of a p -group in terms of segments of P. Hall's collection formula. For any prime number p such that $(p+2)/3$ is an integer, it is proved that the Sylow p -subgroup of the group $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ is not regular if $n \geq (p+2)/3$ and $m \geq 3$. We also list all regular Sylow p -subgroups of the Chevalley group of type G_2 over the ring \mathbb{Z}_{p^m} .

Keywords: regular p -group, linear group, Chevalley group.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1982 г. Б. Верфриц поставил в Коуровской тетради [1] вопрос 8.3: для каких n, m, p силовская p -подгруппа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ группы $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ над кольцом вычетов целых чисел \mathbb{Z}_{p^m} регулярна? Напомним, что конечная p -группа G называется регулярной, если для любых двух элементов $a, b \in G$ и любого $n = p^k$ имеет место равенство $(ab)^n = a^n b^n S_1^n \dots S_t^n$, где S_1, \dots, S_t – подходящие элементы коммутанта группы, порожденной элементами a и b [2, с.205]. Ответ на вопрос известен в следующих случаях: $nm - 1 < p$ (следует из работы Ю. И. Мерзлякова [3]), $n \geq p + 1$ (А. В. Ягжев [4]), $n \geq (p + 1)/2$ или $n^2 < p$ (С. Г. Колесников [5], [6]). В работе получено необходимое условие регулярности, которое позволяет частично исследовать случай $n \geq (p + 1)/3$, а также получить полное решение аналога этого вопроса для силовской p -подгруппы $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ группы Шевалле $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ для Φ типа G_2 .

КОЛЕСНИКОВ, S.G., ЛЕОНТЬЕВ, V.M., ONE NECESSARY CONDITION FOR THE REGULARITY OF A p -GROUP AND ITS APPLICATION TO WENRFRTZ'S PROBLEM.

© 2021 Колесников С.Г., Леонтьев В.М..

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

Теорема 1. Если конечная p -группа G регулярна, то для любых $a, b \in G$ существует элемент $d \in \langle a, b \rangle'$ такой, что

$$d^p = \prod R_i^{f_i(p)},$$

где произведение берётся по всем коммутаторам R_i веса $w(R_i) \geq p$ из собирательной формулы Ф. Холла. В частности, для любого целого неотрицательного числа j

$$d^p \equiv \prod_{p \leq w(R_i) \leq p+j} R_i^{f_i(p)} \pmod{G^{(p+j+1)}},$$

где $G^{(p+j+1)}$ — $(p+j+1)$ -й член нижнего центрального ряда группы G .

Из теоремы 1 и теоремы 3 в [7] вытекает

Следствие 1. Пусть G регулярная p -группа, $p > 2$, и $a, b \in G$. Предположим, что всякий коммутатор от a и b : 1) имеющий более двух взходящих b , равен 1, 2) веса больше, чем $p-1$, имеет порядок 1 или p . Тогда существует элемент $d \in \langle a, b \rangle'$ такой, что

$$d^p \equiv [b, {}_{p-1}a] [b, {}_{p-2}a, b]^{-1} \prod_{v=1}^{(p-3)/2} [[b, {}_{p-2-v}a], [b, {}_v a]]^{(-1)^{v+1}} \pmod{G^{(p+1)}}.$$

Теорема 2. Пусть p такое нечётное простое число, что число $(p+2)/3$ — целое. Тогда группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ не является регулярной, если $n \geq (p+2)/3$ и $m \geq 3$.

При этом в [8] показано, что группы $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ при $m \geq 2$, $p \geq 5$, $n \leq (p-1)/2$ удовлетворяют перечисленным в [2] условиям регулярности.

Теорема 3. Группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна тогда и только тогда, когда $p \geq 17$ или $(m, p) \in \{(1, 7), (1, 11), (1, 13), (2, 13)\}$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 И СЛЕДСТВИЯ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Докажем теорему 1. Пусть $a, b \in G$. По теореме 12.4.2 из [2], существует элемент $c \in \langle a, b \rangle'$ такой, что $(ab)^p = a^p b^p c^p$. С другой стороны, согласно [9, теорема 3.1], существует последовательность коммутаторов R_i от a и b , упорядоченных по весу, и последовательность целых чисел $f_i(p)$ такие, что

$$(ab)^p = a^p b^p \prod_{2 \leq w(R_i) < p} R_i^{f_i(p)} \prod_{w(R_i) \geq p} R_i^{f_i(p)}.$$

Так как группа G регулярна, а показатели $f_i(p)$ кратны p , когда $2 \leq w(R_i) < p$, то по следствию 12.4.1 из [2] существует элемент $u \in \langle a, b \rangle'$ такой, что

$$u^p = \prod_{2 \leq w(R_i) < p} R_i^{f_i(p)}.$$

Отсюда

$$a^p b^p c^p = a^p b^p u^p \prod_{2 \leq w(R_i) < p} R_i^{f_i(p)}$$

или

$$\prod_{2 \leq w(R_i) < p} R_i^{f_i(p)} = (u^{-1})^p c^p = d^p$$

для некоторого $d \in \langle a, b \rangle'$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Для любого целого числа m и любого целого неотрицательного числа n мы используем классическое определение биномиального коэффициента:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{1}{m!} \prod_{i=0}^{m-1} (n-i), & \text{если } m \geq 0; \\ 0, & \text{если } m < 0. \end{cases}$$

При таком определении справедливо соотношение $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$.

Докажем следствие 1. Согласно [7, теорема 3] собирательная формула Ф. Холла при условии 1) следствия редуцируется к виду

$$\begin{aligned} (ab)^n &= \\ &= a^p b^p \prod_{u=1}^{p-1} [b, {}_u a]^{\binom{p}{u+1}} \prod_{u=1}^{p-1} [b, {}_u a, b]^{p \binom{p}{u+1} - \binom{p+1}{u+2}} \prod_{1 \leq v < u \leq p-1} [[b, {}_u a], [b, {}_v a]]^{g_p(u,v)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_p(u, v) &= \\ &= \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{k=1}^v \sum_{i=v-k}^{p-m-k} \binom{i}{u-k+1} \binom{p-m-i-1}{k-1} \binom{i}{v-k} + \sum_{m=1}^{p-2} \sum_{k=m+1}^{p-1} \binom{m}{v} \binom{k}{u}. \end{aligned}$$

По условию 2) следствия все коммутаторы веса больше, чем $p-1$, имеют порядок 1 или p . Вычислим по модулю p показатели степеней всех коммутаторов веса p , входящих в собирательную формулу. Первое и второе произведения содержат по одному коммутатору веса p . Это $[b, {}_{p-1} a]$ и $[b, {}_{p-2} a, b]$ соответственно. Показатель степени первого коммутатора равен $\binom{p}{p} = 1$. Для второго имеем

$$p \binom{p}{p-1} - \binom{p+1}{p} = p^2 - p - 1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Рассмотрим последнее произведение. Коммутаторы веса p , входящие в него, следующие: $[[b, {}_{p-2-v} a], [b, {}_v a]]$, где $v = 1, \dots, (p-3)/2$. Согласно [10, теорема 1] функция $g_p(u, v)$ допускает представление

$$\begin{aligned} g_p(u, v) &= \\ &= \sum_{k=1}^v \sum_{s=0}^{v-k} \binom{u-k+1+s}{v-k} \binom{v-k}{s} \binom{p}{u+s+2} + \sum_{i=0}^{v+1} (-1)^i \binom{p+i}{u+i+1} \binom{p}{v+1-i}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} g_p(p-2-v, v) &= \\ &= \sum_{k=1}^v \sum_{s=0}^{v-k} \binom{t+s-k-1}{v-k} \binom{v-k}{s} \binom{p}{t+s} + \sum_{i=0}^{v+1} (-1)^i \binom{p+i}{t+i-1} \binom{p}{v+1-i}, \end{aligned}$$

где $t = p - v$. Из неравенства $1 \leq v \leq (p-3)/2$ следует, что $(p+3)/2 \leq p+s-v \leq p-1$ и $0 \leq v+1-i \leq (p-1)/2$. Значит, в двойной сумме биномиальный коэффициент $\binom{p}{t+s} = \binom{p}{p+s-v}$ всегда кратен p . В однократной сумме

биномиальный коэффициент $\binom{p}{v+1-i}$ не кратен p только в единственном случае, когда $v+1-i=0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} g_p(p-2-v, v) &\equiv (-1)^{v+1} \binom{p+v+1}{p} \binom{p}{0} \equiv \\ &\equiv (-1)^{v+1} \frac{(p+1) \dots (p+v+1)}{(v+1)!} \equiv (-1)^{v+1} \frac{(v+1)!}{(v+1)!} \equiv (-1)^{v+1} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Сейчас следствие 1 вытекает из теоремы 1.

Следующие два утверждения потребуются для доказательства теорем 2 и 3.

Лемма 1. Пусть G — группа, $y_1, \dots, y_s \in G$, $s \geq 2$. Предположим, что степень нильпотентности подгруппы $H = \langle y_1, \dots, y_s \rangle$ равна 2. Тогда для любого натурального числа n имеет место равенство

$$(y_1 \dots y_s)^n = y_1^n \dots y_s^n \prod_{1 \leq i < j \leq s} [y_j, y_i] \binom{n}{2}.$$

Доказательство. Индукция по n . Поскольку степень нильпотентности H равна 2, имеем

$$\begin{aligned} (y_1 \dots y_s)^{n+1} &= y_1^n \dots y_s^n \cdot \left(\prod_{1 \leq i < j \leq s} [y_j, y_i] \binom{n}{2} \right) \cdot y_1 \dots y_s = \\ &= y_1^n \dots y_s^n \cdot y_1 \dots y_s \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq s} [y_j, y_i] \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Пользуясь соотношением $y_j^n y_i = y_i y_j^n [y_j, y_i]^n$, которое следует из условий леммы, соберем в правой части по порядку y_1, \dots, y_s . Затем, учитывая перестановочность коммутаторов, преобразуем полученное выражение к виду

$$(y_1 \dots y_s)^{n+1} = y_1^{n+1} \dots y_s^{n+1} \prod_{1 \leq i < j \leq s} [y_j, y_i] \binom{n}{2} + n.$$

Равенства $\binom{n}{2} + n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$ завершают доказательство. \square

Следствие 2. Предположим, что подгруппа H из леммы 1 является p -группой, $p > 2$, с элементарным абелевым коммутантом, а число n кратно p . Тогда для любых целых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и любой перестановки π на множестве $\{1, \dots, s\}$ имеем

$$(y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s})^n = \left(y_{\pi(1)}^{\alpha_{\pi(1)}} \dots y_{\pi(s)}^{\alpha_{\pi(s)}} \right)^n = y_1^{n\alpha_1} \dots y_s^{n\alpha_s}.$$

Если для некоторого i дополнительно $y_i^n = 1$ или $y_i^p \in H'$ и α_i кратно p , то

$$(y_1^{\alpha_1} \dots y_i^{\alpha_i} \dots y_s^{\alpha_s})^n = (y_1^{\alpha_1} \dots \hat{y}_i^{\alpha_i} \dots y_s^{\alpha_s})^n.$$

Здесь значок $\hat{}$ над элементом означает отсутствие этого элемента в произведении.

3. СИЛОВСКИЕ p -ПОДГРУППЫ ГРУПП $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ И $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$

Следуя [3], определим последовательность функций f_n , $n = 1, 2, \dots$, от натуральных аргументов i, j, k , полагая

$$f_n(i, j, k) = - \left[\frac{i - j - k}{n} \right],$$

здесь $[x]$ — целая часть числа x (ближайшее к x слева целое число). Через J обозначим идеал кольца \mathbb{Z}_{p^m} , порождённый элементом p , а через E — единичную матрицу порядка n . Выделим в $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ подгруппы

$$G^{(k)} = \langle E + A \mid A = (a_{ij}), a_{ij} \in J^{f_n(i,j,k)}, 1 \leq i, j \leq n \rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь и далее по определению $J^0 = \mathbb{Z}_{p^m}$. Согласно [3], $G^{(1)}$ изоморфна группе

$$P_n(\mathbb{Z}_{p^m}) = \{E + (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}_{p^m} \text{ при } i > j; a_{ij} \in J, \text{ при } i \leq j\},$$

а ряд

$$G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \dots \supset G^{(mn-1)} \supset \langle E \rangle$$

является её нижним центральным рядом, если $p > 2$. Кроме того, при любом простом p и для любых натуральных k, l имеет место соотношение

$$(1) \quad [G^{(k)}, G^{(l)}] \subseteq G^{(k+l)}.$$

В [8, лемма 2] было показано, что если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ такие матрицы, что $a_{ij} \in J^{f_n(i,j,k)}$ и $b_{ij} \in J^{f_n(i,j,l)}$, то элементы c_{ij} матрицы $C = AB$ содержатся в идеалах $J^{f_n(i,j,k+l)}$. Отсюда и из свойств делимости биномиальных коэффициентов легко следует

Лемма 2. *Если $p > n$, то для любого натурального k имеет место включение $[G^{(k)}]^p \subseteq G^{(k+n)}$.*

Пусть Φ — произвольная приведённая неразложимая система корней. В группе Шевалле $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ выделим последовательность подгрупп ($k = 1, 2, \dots$)

$$S^{(k)} = \langle x_r(t), h_s(1+u) \mid r, s \in \Phi, t \in J^{f(r,k)}, u \in J^{f(0,k)} \rangle,$$

где функция $f(r, k)$ определена на множестве $\Phi_0 \times \mathbb{N}$, $\Phi_0 = \Phi \cup \{0\}$, равенством $f(r, k) = -[\text{ht}(r) - k]/h$. Здесь $\text{ht}(r)$ — функция высоты корня, $\text{ht}(0) = 0$, h — число Кокстера системы корней Φ . Согласно [11], группа $S^{(1)}$ изоморфна силовской p -подгруппе

$$P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m}) = \langle x_r(\mathbb{Z}_{p^m}), x_{-r}(J), h_r(1+J) \mid r \in \Phi^+ \rangle,$$

группы Шевалле $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$, а ряд

$$S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset \dots \supset S^{(mh)} = \langle 1 \rangle.$$

является её нижним центральным рядом, если число p не делит $p(\Phi)!$, где

$$p(\Phi) = \max\{(r, r)/(s, s) \mid r, s \in \Phi\}.$$

Как и выше, при любом простом p и для любых натуральных k, l имеет место соотношение

$$(2) \quad [S^{(k)}, S^{(l)}] \subseteq S^{(k+l)}.$$

Напомним, что в группе $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ выполняются соотношения: ($r, s \in \Phi$)

1) аддитивность корневых элементов:

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u), \quad t, u \in J^{f(r,1)};$$

2) мультипликативность диагональных элементов:

$$h_r(t)h_r(u) = h_r(tu), \quad t, u \in 1 + J^{f(0,1)};$$

3) соотношения между корневыми и диагональными элементами:

$$[x_r(t), h_s(u)] = x_r(t(u^{(r, h_s)} - 1)), \quad t \in J^{f(r,1)}, u \in J^{f(0,1)};$$

4) коммутаторная формула Шевалле:

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{\substack{ir + js \in \Phi, \\ i, j > 0}} x_{ir+js} \in \Phi(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad t \in J^{f(r,1)}, u \in J^{f(s,1)};$$

5) соотношения между противоположными корневыми элементами:

$$[x_r(t), x_{-r}(u)] = x_r(c^{-1}t^2u)h_r(c)x_{-r}(-c^{-1}tu^2), \quad c = 1-tu, t \in J^{f(r,1)}, u \in J^{f(-r,1)}$$

Аналогом леммы 2 для силовских p -подгрупп групп Шевалле является

Лемма 3. Если $p > h$, то для любого натурального числа k справедливо включение $[S^{(k)}]^p \subseteq S^{(k+h)}$.

Доказательство. Индукция по k . Имеем

$$[S^{(mh)}]^p \subseteq [(\langle 1 \rangle)^p] = \langle 1 \rangle = S^{(mh+h)}.$$

Пусть $1 \leq k < mh$ и $y \in S^{(k)}$. Тогда

$$y = \prod_{i=1}^l x_{r_i}(t_i) \prod_{j=1}^q h_{s_j}(1 + z_j),$$

где $r_i \in \Phi$, $t_i \in J^{f(r_i, k)}$ и $s_j \in \Pi(\Phi)$, $z_j \in J^{f(0, k)}$. Покажем, что $y^p \in S^{(k+h)}$. Согласно [2, теорема 12.3.1]

$$y^p = \prod_{i=1}^l x_{r_i}(t_i)^p \prod_{j=1}^q h_{s_j}(1 + z_j)^p \cdot c_1^{\alpha_1} \dots c_u^{\alpha_u} \cdot c_{u+1}^{\alpha_{u+1}} \dots c_{u+v}^{\alpha_{u+v}},$$

где c_1, \dots, c_u — коммутаторы веса от 2 до $p-1$, а числа $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ кратны p , веса коммутаторов c_{u+1}, \dots, c_{u+v} больше, чем $p-1$. Так как $f(r_i, k) + 1 = f(r_i, k+h)$, то

$$pt_i \in pJ^{f(r_i, k)} = J^{f(r_i, k)+1} = J^{f(r_i, k+h)}$$

и, следовательно, $x_{r_i}(t_i)^p = x_{r_i}(pt_i) \in S^{(k+h)}$.

Далее, функция $f(0, k)$ удовлетворяет неравенствам: 1) $f(0, k_1) + f(0, k_2) \geq f(0, k_1 + k_2)$ для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$; 2) $f(0, k_1) \geq f(0, k_2)$, если $k_1 \geq k_2$. Также из условия $p > h$ следует, что $kp \geq k+h$. Поэтому $f(0, k)p \geq f(0, kp) \geq f(0, k+h)$. Отсюда

$$(1 + z_j)^p = 1 + \sum_{w=1}^{p-1} \binom{p}{w} z_j^w + z_j^p \in 1 + \sum_{w=1}^{p-1} pJ^{f(0, k)w} + J^{f(0, k)p} \subseteq 1 + J^{f(0, k+h)}$$

и, значит, $h_{s_j}(1 + z_j)^p \in S^{(k+h)}$.

Коммутаторы c_1, \dots, c_u содержатся в $S^{(2k)} \subseteq S^{(k+1)}$, поэтому $c_1^{\alpha_1}, \dots, c_u^{\alpha_u} \in S^{(k+1+h)} \subseteq S^{(k+h)}$ по предположению индукции. Наконец, из соотношения (2) следует, что $c_{u+1}, \dots, c_{u+v} \in S^{(kp)} \subseteq S^{(k+h)}$. \square

Обозначим через $K_n(J^k)$ и $\Phi(J^k)$ соответственно конгруэнц-подгруппы групп $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ и $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ соответственно, которые определяются как ядра гомоморфизмов $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m}) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}_{p^{m-k}})$ и $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m}) \rightarrow \Phi(\mathbb{Z}_{p^{m-k}})$, индуцированных кольцевым гомоморфизмом $\mathbb{Z}_{p^m} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{m-k}}$. Соотношения 1) следующей леммы можно найти в [3] и [11], соотношение 2) легко устанавливается методами доказательств лемм 2 и 3.

Лемма 4. *Имеют место следующие включения*

- 1) $[K_n(J^k), K_n(J^l)] \subseteq K_n(J^{k+l}), [\Phi(J^k), \Phi(J^l)] \subseteq \Phi(J^{k+l});$
- 2) $[K_n(J^k)]^p \subseteq K_n(J^{k+1}), [\Phi(J^k)]^p \subseteq \Phi(J^{k+1}).$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

Поскольку свойство регулярности наследуется на подгруппы и фактор группы, то для доказательства теоремы 2 достаточно установить нерегулярность группы $P_{(p+2)/3}(\mathbb{Z}_{p^3})$. Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 5. *Для любых $E + X, E + Y \in P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ имеет место тождество*

$$(3) \quad [E + X, E + Y] = E + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{t=0}^{k-2} (-1)^k X^t Y^{k-t-2} (X, Y),$$

где $(X, Y) = XY - YX$.

Доказательство. Ввиду нильпотентности матриц X и Y имеем

$$[E + X, E + Y] = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-X)^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-Y)^j \right) (E + X)(E + Y).$$

Раскрыв скобки, получим сумму однородных степени k многочленов $f_k(X, Y)$, причем, очевидно, что $f_0(X, Y) = E$ и $f_1(X, Y) = O$, где O — нулевая матрица. Зафиксируем $k \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} f_k(X, Y) &= \\ &= (-X)^k + (-X)^{k-1}(-Y) + (-X)^{k-1}X + (-X)^{k-1}Y + \\ &+ \sum_{t=0}^{k-2} (-X)^t ((-Y)^{k-t} + (-Y)^{k-t-1}X + (-Y)^{k-t-1}Y + (-Y)^{k-t-2}XY) = \\ &= \sum_{t=0}^{k-2} (-1)^k X^t Y^{k-t-2} (X, Y). \end{aligned}$$

\square

Заменяя X на pX в (3), мы можем представить коммутатор $[E + pX, E + Y]$ в виде ряда по степеням p с коэффициентами, зависящими от X и Y . Далее нас будет интересовать коэффициент при p в разложении сложных коммутаторов.

Лемма 6. Пусть $E + pB, E + A \in P_n(\mathbb{Z}_p^m)$. Коэффициент при p в разложении коммутатора $[E + pB, {}_sE + A]$, $s \in \mathbb{N}$, по степеням p равен

$$(4) \quad F(s) = \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^k \binom{s-1}{j} \binom{s+k-j-1}{s-1} A^k(B, A) A^{s-j-1}.$$

Доказательство. Индукция по s . По лемме 5

$$\begin{aligned} [E + pB, E + A] &= E + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{t=0}^{k-2} (-1)^k (pB)^t A^{k-t-2} (pB, A) = \\ &= E + p \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k A^{k-2}(B, A) + \dots = E + p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k(B, A) + \dots \end{aligned}$$

Полученный коэффициент при p , очевидно, равен выражению (4), если в последнем положить $s = 1$.

Пусть $s \geq 1$. Чтобы вычислить коэффициент при p в разложении коммутатора $[E + pB, {}_{s+1}E + A]$ по степеням p воспользуемся предположением индукции и подставим вместо B в сумме

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k(B, A)$$

выражение (4). Полученную кратную сумму

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^k \binom{s-1}{j} \binom{s+k-j-1}{s-1} A^t(A^k(B, A) A^{s-j-1}, A) =$$

преобразуем, раскрыв внешний лиев коммутатор,

$$\begin{aligned} &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^{t+k} \binom{s-1}{j} \binom{s+k-j-1}{s-1} A^{t+k}(B, A) A^{s-j} + \\ &\quad + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^{t+k+1} \binom{s-1}{j} \binom{s+k-j-1}{s-1} A^{t+k+1}(B, A) A^{s-j-1}. \end{aligned}$$

Зафиксируем число j' , $0 \leq j' \leq s$, и число k' , $k' \geq j'$. Коэффициент при $A^{k'}(B, A) A^{s-j'}$ равен:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{k'} (-1)^{k'} \binom{s-1}{0} \binom{s+k'-t-1}{s-1} &= (-1)^{k'} \binom{s}{0} \sum_{t=0}^{k'} \binom{s-1+k'-t}{s-1} = \\ &= (-1)^{k'} \binom{s}{0} \binom{s+k'}{s-1} = (-1)^{k'} \binom{s}{j'} \binom{s+k'-j'}{s}, \end{aligned}$$

если $j' = 0$;

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{k'-s} (-1)^{k'} \binom{s-1}{s-1} \binom{s+k'-s-t-1}{s-1} &= \binom{s}{s} \sum_{t=0}^{k'-s} (-1)^{k'} \binom{k'-t-1}{s-1} = \\ &= (-1)^{k'} \binom{s}{s} \binom{k'}{s} = (-1)^{k'} \binom{s}{j'} \binom{s+k'-j'}{s}, \end{aligned}$$

если $j' = s$;

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{k'-j'} (-1)^{k'} \binom{s-1}{j'} \binom{s+k'-j'-t-1}{s-1} \left(\binom{s-1}{j'} + \binom{s-1}{j'-1} \right) = \\ & = (-1)^{k'} \binom{s}{j'} \sum_{t=0}^{k'-j'} \binom{s-1+k'-j'-t}{s-1} = (-1)^{k'} \binom{s}{j'} \binom{s+k'-j'}{s}, \end{aligned}$$

когда $0 < j' < s$. Таким образом, коэффициент при $A^{k'}(B, A)A^{s-j'}$ во всех случаях равен

$$(-1)^{k'} \binom{s}{j'} \binom{s+k'-j'}{s}.$$

□

Далее считаем, что $n \geq 3$. Матрицу порядка n с единицами на месте (i, j) , где $1 \leq i, j \leq n$, и нулями на остальных местах будем обозначать через e_{ij} и называть элементарной матрицей. Напомним, что справедлива следующая формула умножения элементарных матриц

$$e_{ij}e_{ts} = \delta_{jt}e_{is},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Также зафиксируем следующее соглашение: $e_{ij} = 0$, если $i \notin \{1, \dots, n\}$ или $j \notin \{1, \dots, n\}$. Сумму, у которой нижний предел больше верхнего, считаем равной нулю (нулевой матрицей).

Зафиксируем до конца параграфа следующие матрицы

$$A = e_{21} + e_{32} + \dots + e_{n,n-1}, \quad B = e_{1n}.$$

В леммах ниже вычисляется произведение из следствия 1 и исследуется коммутант группы, порожденной элементами $E + pB$ и $E + A$.

Лемма 7. *Для любого натурального s имеет место равенство*

$$F(s) = \sum_{j=0}^s \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \binom{s}{j} \binom{s+k-j-1}{s-1} e_{k+1, n-s+j}.$$

Доказательство. С учётом перечисленных выше соглашений, для любого целого неотрицательного k имеем

$$A^k = \sum_{t=k+1}^n e_{t, t-k}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & A^k(B, A)A^{s-j-1} = \\ & = \left(\sum_{t=k+1}^n e_{t, t-k} \right) (e_{1, n-1} - e_{2n}) \left(\sum_{t=s-j}^n e_{t, t-s+j+1} \right) = e_{k+1, n-s+j} - e_{k+2, n-s+j+1}. \end{aligned}$$

Подставим в (4) и разобьём на две суммы

$$F(s) = \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \binom{s-1}{j} \binom{s-1+k-j}{s-1} e_{k+1, n-s+j} - \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \binom{s-1}{j} \binom{s-1+k-j}{s-1} e_{k+2, n-s+j+1}.$$

во второй двойной сумме заменим k на $k-1$ и j на $j-1$

$$F(s) = \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \binom{s-1}{j} \binom{s-1+k-j}{s-1} e_{k+1, n-s+j} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \binom{s-1}{j-1} \binom{s-1+k-j}{s-1} e_{k+1, n-s+j}.$$

Поскольку $\binom{s-1}{s} = \binom{s-1}{-1} = 0$, распространим суммирование по j в первой сумме до s , а во второй — от 0 , и сложим их

$$F(s) = \sum_{j=0}^s \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \left[\binom{s-1}{j} + \binom{s-1}{j-1} \right] \binom{s-1+k-j}{s-1} e_{k+1, n-s+j} = \sum_{j=0}^s \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \binom{s}{j} \binom{s+k-j-1}{s-1} e_{k+1, n-s+j}.$$

□

Заметим, что произвольный элемент $E + C$ из группы $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ можно представить (конечно, не единственным образом) в виде

$$E + C = E + p^0 C_0 + p C_1 + \dots + p^{m-1} C_{m-1}.$$

Следующая простая лемма часто облегчает вычисления в $P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$.

Лемма 8. Пусть $E + pX + p^2Y, E + pU + p^2V \in P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$. Тогда

- 1) $(E + pX + p^2Y)^{-1} = E - pX - p^2Y + p^2X^2$;
- 2) $(E + pX + p^2Y)^p = E + p^2X$;
- 3) $[E + pX + p^2Y, E + pU + p^2V] = E + p^2(X, U)$.

Лемма 9. Пусть простое число p такое, что $n = (p+2)/3$ — целое число. В группе $P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & [E + pB, {}_{p-1}E + A] [E + pB, {}_{p-2}E + A, E + pB]^{-1} \times \\ & \times \prod_{s=1}^{(p-3)/2} [[E + pB, {}_{p-2-s}E + A], [E + pB, {}_sE + A]]^{(-1)^{s+1}} = \\ & = \alpha e_{n,1} - p^2 e_{n,2} - p^2 e_{n-1,1}, \end{aligned}$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_{p^3}$.

Доказательство. Сначала покажем, что $[E + pB, {}_sE + A] = E$, если $s \geq 2n$. В частности, $[E + pB, {}_{p-1}E + A] = E$, поскольку $p \geq 7$, а значит, $n \geq 3$, и, следовательно,

$$p - 1 = 3n - 3 = 2n + (n - 3) \geq 2n.$$

Введём следующие обозначения:

$$\phi(x, {}^r y) = [x, y], \quad \phi(x, {}^l y) = [y, x],$$

по индукции при $q \geq 2$ полагаем

$$\phi(x, {}^{\alpha_1} y_1, \dots, {}^{\alpha_q} y_q) = \phi(\phi(x, {}^{\alpha_1} y_1, \dots, {}^{\alpha_{q-1}} y_{q-1}), {}^{\alpha_q} y_q),$$

где $\alpha_i = r$ или $\alpha_i = l$.

Разложим матрицы $E + A$ и $E + pB$ в произведение трансвекций:

$$E + A = t_{21}(1)t_{32}(1) \dots t_{n,n-1}(1), \quad E + pB = t_{1n}(p).$$

Из коммутаторных тождеств

$$[x, yz] = [x, y][x, z], \quad [yz, x] = [z, x][z, y]$$

следует, что $[E + pB, {}_sE + A]$ раскладывается в произведение коммутаторов вида

$$(5) \quad \phi(t_{1n}(p), {}^{\alpha_1} t_{i_1, i_1-1}(1), \dots, {}^{\alpha_q} t_{i_q, i_q-1}(1)), \quad q \geq s.$$

Изучим подробнее выражение (5). Из соотношения

$$(6) \quad [t_{ij}(\alpha), t_{km}(\beta)] = (1 - \delta_{jk})(1 - \delta_{im})E + \delta_{jk}(1 - \delta_{im})t_{im}(\alpha\beta) + \delta_{im}(1 - \delta_{jk})t_{kj}(-\alpha\beta),$$

справедливого, когда $j \neq k$ или $i \neq m$, следует, что, коммутируя трансвекции с разностями между первым и вторым индексами, равными s_1 и s_2 , мы получим единичную матрицу, либо трансвекцию с разностью индексов $s_1 + s_2$. Значит, выражение (5) при $q = n - 2$ есть единичная матрица, либо трансвекция с разностью индексов, равной, -1 , т.е.

$$\phi(t_{1n}(p), {}^{\alpha_1} t_{i_1, i_1-1}(1), \dots, {}^{\alpha_{n-2}} t_{i_{n-2}, i_{n-2}-1}(1)) = t_{i, i+1}(\epsilon_i p),$$

где $\epsilon_i = 0$ или $\epsilon_i = \pm 1$ для некоторого i . Далее, используя соотношение

$$(7) \quad [t_{ij}(\alpha), t_{ji}(\beta)] = t_{ij}(c^{-1}\alpha^2\beta)d_{ij}(c)t_{ji}(-c^{-1}\alpha\beta^2),$$

где $d_{ij}(c) = E + (c - 1)e_{ii} + (c^{-1} - 1)e_{jj}$, справедливое, если элемент $c = 1 - \alpha\beta$ обратим (в нашем случае это так, поскольку $c \equiv 1 \pmod{p}$), находим

$$(8) \quad [t_{i, i-1}(\epsilon_i p), t_{i_{n-1}, i_{n-1}-1}(1)] = (1 - \delta_{i, i_{n-1}})E + \delta_{i, i_{n-1}} t_{i, i+1}(\epsilon_i^2 p^2) d_{i, i+1}(1 - \epsilon_i p) t_{i+1, i}(-\epsilon_i p(1 - \epsilon_i p)^{-1}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $p^3 = 0$ в \mathbb{Z}_{p^3} и, следовательно, $\epsilon_i^2 p^2(1 - \epsilon_i p)^{-1} = \epsilon_i^2 p^2$. Наконец, соотношения (6), (7) и

$$(9) \quad [t_{km}(\alpha), \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)] = t_{km}(\alpha(\beta_m \beta_k^{-1} - 1))$$

показывают, что коммутирование (8) с трансвекцией $t_{i_n, i_n-1}(1)$ даёт единичную матрицу, если $i_n \neq i - 1, i, i + 1$, матрицу из унитарной группы $UT_n(\mathbb{Z}_{p^3})$, если $i_n = i - 1, i + 1$, наконец, матрицу $d_{i, i+1}(1 - \epsilon_i^2 p^2)\theta$, где $\theta \in UT_n(\mathbb{Z}_{p^3})$, когда $i_n = i$. Отсюда и (9) следует, что выражение (5) при $q = n + 1$ содержится в $UT_n(\mathbb{Z}_{p^3})$ и равно E при $q = 2n$, т.к. группа $UT_n(\mathbb{Z}_{p^3})$ нильпотентна степени $n - 1$.

Заметим, что если $p > 7$, то $p - 2 \geq 2n$ и поэтому

$$[E + pB, p-2E + A, E + pB] = E.$$

Когда $p = 7$, то $n = 3$ и непосредственные вычисления показывают, что

$$[E + pB, p-2E + A] = t_{31}(-3p^2), \quad [t_{31}(-3p^2), t_{13}(p)] = E.$$

Таким образом, во всех случаях

$$[E + pB, p-1E + A][E + pB, p-2E + A, E + pB]^{-1} = E.$$

Вычислим оставшееся произведение. Согласно п. 3 леммы 8 имеем

$$(10) \quad [[E + pB, p-2-sE + A], [E + pB, sE + A]] = E + p^2 F(p-2-s)F(s).$$

Пусть $s \geq 2n - 1$. Тогда выражение

$$A^k(B, A)A^{s-j-1} = A^k B A^{s-j} + A^{k+1} B A^{s-j-1}$$

равно нулевой матрице, если $0 \leq j \leq s$ и $k \geq j$, поскольку $A^n = O$. В самом деле, когда $0 \leq j \leq n - 2$, имеем $s - j - 1 \geq n$; если $j = n - 1$, то $s - j \geq n$ и $k + 1 \geq n$; наконец, если $j \geq n$, то $k \geq n$. Отсюда и леммы 6 следует, что $F(s) = O$, когда $s \geq 2n - 1$, и $F(p-2-s) = O$, когда $p-2-s \geq 2n - 1$. Значит, коммутатор (10) отличен от E , когда

$$n - 2 \leq s \leq \min\{2n - 2, (p - 3)/2\} = (3n - 5)/2.$$

Положим $s = n - 2 + \alpha$. Тогда

$$(11) \quad \prod_{s=1}^{(p-3)/2} [[E + pB, p-2-sE + A], [E + pB, sE + A]]^{(-1)^{s+1}} = \\ = \prod_{\alpha=0}^{(n-1)/2} [[E + pB, 2n-2-\alpha E + A], [E + pB, n-2+\alpha E + A]]^{(-1)^{\alpha+1}} = \\ = E + p^2 \sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha+1} (F(2n-2-\alpha), F(n-2+\alpha)).$$

Степень нильпотентности группы $P_n(p^3)$ равна $3n - 1 = p + 1$. Поэтому произведение (11), состоящее из коммутаторов веса p , содержится в гиперцентре и равно

$$E + p^2 \theta e_{n,1} + p^2 \beta e_{n-1,1} + p^2 \gamma e_{n,2}$$

для подходящих θ, β, γ .

Вычислим коэффициент β при $e_{n-1,1}$. Для этого, используя лемму 6, выделим в разложении $F(2n-2-\alpha)$ через элементарные матрицы слагаемые с первым индексом, равным $n-1$, а в $F(n-2+\alpha)$ — слагаемые со вторым индексом, равным 1:

$$(12) \quad \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{n-2} \binom{2n-2-\alpha}{j} \binom{3n-5-\alpha-j}{2n-3-\alpha} e_{n-1, -n+2+\alpha+j},$$

$$(13) \quad \sum_{k=\alpha-1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-2+\alpha}{\alpha-1} \binom{n-2+k}{n-3+\alpha} e_{k+1,1}.$$

Заметим, что в (13) при $\alpha = 0$ и $k = -1$, не только e_{01} равна нулевой матрице, но биномиальный коэффициент $\binom{n-2+\alpha}{\alpha-1} = \binom{n-2}{-1}$ тоже равен нулю. Учитывая,

что $-n+2+\alpha+j \leq \alpha \leq k+1$, коэффициент при $e_{n-1,1}$ в произведении (12) и (13) равен

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-2+\alpha-1} \binom{2n-2-\alpha}{n-2} \binom{3n-5-\alpha-n+2}{2n-3-\alpha} \binom{n-2+\alpha}{\alpha-1} \binom{n-2+\alpha-1}{n-3+\alpha} = \\ (14) \quad & = (-1)^\alpha \binom{2n-2-\alpha}{n-2} \binom{n-2+\alpha}{n-1}. \end{aligned}$$

(При $\alpha = 0$ выражение (14), очевидно, равно нулю). Далее, выделив в разложении $F(n-2+\alpha)$ слагаемые с первым индексом $n-1$, а в $F(2n-2-\alpha)$ — слагаемые со вторым индексом 1, получим

$$(15) \quad \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{n-2} \binom{n-2+\alpha}{j} \binom{2n-5+\alpha+j}{n-3+\alpha} e_{n-1,2-\alpha+j},$$

$$(16) \quad \sum_{k=n-1-\alpha}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-2-\alpha}{n-1-\alpha} \binom{n-2+k}{2n-3-\alpha} e_{k+1,1}.$$

С учётом того, что $2-\alpha+j \leq n-\alpha \leq k+1$, коэффициент при $e_{n-1,1}$ в произведении (15) и (16) равен

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-2+n-1-\alpha} \binom{n-2+\alpha}{n-2} \binom{2n-5+\alpha-n+2}{n-3+\alpha} \binom{2n-2-\alpha}{n-1-\alpha} \binom{2n-3-\alpha}{2n-3-\alpha} = \\ (17) \quad & = (-1)^{\alpha+1} \binom{n-2+\alpha}{n-2} \binom{2n-2-\alpha}{n-1}. \end{aligned}$$

Умножив разность между (14) и (17) на $(-1)^{\alpha+1}$, а затем просуммировав по α , видим, что

$$(18) \quad \beta = - \sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} \left[\binom{2n-2-\alpha}{n-2} \binom{n-2+\alpha}{n-1} + \binom{n-2+\alpha}{n-2} \binom{2n-2-\alpha}{n-1} \right].$$

Вычислим полученную сумму. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} \binom{2n-2-\alpha}{n-2} \binom{n-2+\alpha}{n-1} = \sum_{\alpha=-(n-1)/2}^0 \binom{2n-2+\alpha}{n-2} \binom{n-2-\alpha}{n-1} = \\ & = \sum_{\alpha=n-(n-1)/2}^n \binom{n-2+\alpha}{n-2} \binom{2n-2-\alpha}{n-1} = \sum_{\alpha=(n+1)/2}^n \binom{n-2+\alpha}{n-2} \binom{2n-2-\alpha}{n-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -\beta &= \sum_{\alpha=0}^n \binom{n-2+\alpha}{n-2} \binom{2n-2-\alpha}{n-1} = \sum_{\alpha=n-2}^{2n-2} \binom{\alpha}{n-2} \binom{3n-4-\alpha}{n-1} = \\ &= \binom{3n-3}{2n-2} = \binom{p-1}{2n-2} \equiv (-1)^{2n-2} \equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\binom{3n-4-(2n-2)}{n-1} = 0$, и доказанным [10] тождеством

$$\sum_{i=b}^{n-a} \binom{n-i}{a} \binom{i}{b} = \binom{n+1}{a+b+1}.$$

Вычислим коэффициент γ . Выделим в разложении $F(2n-2-\alpha)$ слагаемые с первым индексом, равным n , а в $F(n-2-\alpha)$ — слагаемые со вторым индексом, равным 2:

$$(19) \quad \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1} \binom{2n-2-\alpha}{j} \binom{3n-4-\alpha-j}{2n-3-\alpha} e_{n,-n+2+\alpha+j},$$

$$(20) \quad \sum_{k=\alpha}^{n-1} (-1)^k \binom{n-2+\alpha}{\alpha} \binom{n-3+k}{n-3+\alpha} e_{k+1,2}.$$

Учитывая, что $-n+2+\alpha+j \leq \alpha+1 \leq k+1$, коэффициент при $e_{n,2}$ в произведении (19) и (20) равен

$$(21) \quad \begin{aligned} & (-1)^{n-1+\alpha} \binom{2n-2-\alpha}{n-1} \binom{2n-3-\alpha}{2n-3-\alpha} \binom{n-2+\alpha}{\alpha} \binom{n-3+\alpha}{n-3+\alpha} = \\ & = (-1)^\alpha \binom{2n-2-\alpha}{n-1} \binom{n-2+\alpha}{n-2}. \end{aligned}$$

Далее, выделив в разложении $F(n-2+\alpha)$ слагаемые с первым индексом n , а в $F(2n-2-\alpha)$ — слагаемые со вторым индексом 2, получим

$$(22) \quad \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1} \binom{n-2+\alpha}{j} \binom{2n-4+\alpha-j}{n-3+\alpha} e_{n,2-\alpha+j},$$

$$(23) \quad \sum_{k=n-\alpha}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-2-\alpha}{n-\alpha} \binom{n-3+k}{2n-3-\alpha} e_{k+1,2}.$$

Отметим, что в (22) при $\alpha = 0$ и $j = n-1$ матрица $e_{n,n+1}$ нулевая и биномиальный коэффициент при ней $\binom{n-2}{n-1}$ равен нулю. Сумма (23) при $\alpha = 0$ тоже по определению равна нулю. С учётом того, что $2-\alpha+j \leq n-\alpha+1 \leq k+1$, коэффициент при $e_{n,2}$ в произведении (22) и (23) равен

$$(24) \quad \begin{aligned} & (-1)^{n-1+n-\alpha} \binom{n-2+\alpha}{n-1} \binom{n-3+\alpha}{n-3+\alpha} \binom{2n-2-\alpha}{n-\alpha} \binom{2n-3-\alpha}{2n-3-\alpha} = \\ & = (-1)^{\alpha+1} \binom{n-2+\alpha}{n-1} \binom{2n-2-\alpha}{n-2}. \end{aligned}$$

(При $\alpha = 0$ выражение (24), очевидно, равно нулю). Просуммировав по α разность между (21) и (24), умноженную на $(-1)^{\alpha+1}$, снова получим выражение (18). Следовательно, $\gamma = -1$. \square

Лемма 10. *Коммутант подгруппы $H = \langle E + A, E + pB \rangle$ группы $P_n(\mathbb{Z}_p^3)$ порождается коммутаторами*

$$\begin{aligned} y_i &= [E + pB, {}_iE + A], \quad i = 1, 2, \dots, \\ y_{jl} &= [[E + pB, {}_jE + A], [E + pB, {}_lE + A]], \quad j, l = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Если $d \in H'$ и $d^p \in G^{(p)}$ ($-p$ -й член нижнего центрального ряда группы $P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$), то

$$d^p = E + \lambda p^2 e_{n,1} - \tau p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n-1,1} + \tau p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n,2}.$$

Доказательство. Заметим, что $y_i \in K_n(J)$ и $y_{jl} \in K_n(J^2)$ для любых i, j, l . Так как $K_n(J^3) = \langle E \rangle$, а по лемме 4 имеют место включения: $[K_n(J), K_n(J^2)] \subseteq K_n(J^3)$ и $[K_n(J^2)]^p \subseteq K_n(J^3)$, то $[y_i, y_{jl}] = E$ и $y_{jl}^p = E$. Таким образом, ввиду следствия 2, можем считать, что

$$d = y_1^{\tau_1} \dots y_{3n-1}^{\tau_{3n-1}}.$$

Далее, если $i \geq 2n-1$, то $y_i \in G^{(2n)} \subseteq K_n(J^2)$ и поэтому $y_i^p = E$. Значит, произведение $y_{2n-1}^{\tau_{2n-1}} \dots y_{3n-1}^{\tau_{3n-1}}$ в разложении d тоже можно отбросить.

Пусть $1 \leq i \leq 2n-4$. Тогда $y_i \in G^{(i+1)}$ и по лемме 4 имеем $y_i^p \in G^{(i+n+1)}$. Покажем, что $y_i^p \notin G^{(i+n+2)}$. Действительно, если $1 \leq i \leq n-1$, то используем леммы 4 и 8, находим

$$\begin{aligned} y_i^p &= (E + pF(i) + p^2Q(i))^p = E + p^2F(i) = \\ &= E + \dots + (-1)^0 \binom{i}{0} \binom{i-1}{i-1} p^2 e_{1,n-i} + \dots = E + \dots + p^2 e_{1,n-i} + \dots \end{aligned}$$

В тоже время

$$f_n(1, n-i, i+n+2) = - \left[\frac{1 - (n-i) - (i+n+2)}{n} \right] = 3,$$

что означает, что элемент, стоящий на позиции $(i, n-i)$, произвольной матрицы из $G^{(i+n+2)}$ лежит в идеале J^3 . Аналогично, если $n \leq i \leq 2n-4$, то

$$y_i^p = E + \dots + (-1)^{i+1-n} \binom{i}{i+1-n} \binom{i-1}{i-1} p^2 e_{i+2-n,1} + \dots$$

и $\binom{i}{i+1-n} \not\equiv 0 \pmod{p}$, а с другой стороны,

$$f_n(i+2-n, 1, i+n+2) = - \left[\frac{i+2-n-1 - (i+2+n)}{n} \right] = 3.$$

Значит, $y_i^p \notin G^{(i+n+2)}$. Отсюда и включения $d^p \in G^p = G^{(3n-2)}$ следует, что коммутаторы y_1, \dots, y_{2n-4} должны входить в разложение d в степенях кратных p , а потому тоже могут быть отброшены. Следовательно, можем считать, что $d = y_{2n-3}^{\tau} y_{2n-2}^{\mu}$. Снова используя следствие 2 и лемму 7, находим

$$\begin{aligned} d^p &= y_{2n-3}^{p\tau} y_{2n-2}^{p\mu} = (E + p^2F(2n-3))^{\tau} (E + p^2F(2n-2))^{\mu} = \\ &= \left(E + p^2(2n-3) \binom{2n-3}{n-2} e_{n,1} - p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n-1,1} + p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n,2} \right)^{\tau} \times \\ &\quad \times \left(E + p^2 \binom{2n-2}{n-1} e_{n,1} \right)^{\mu} = \\ &= E + \gamma p^2 e_{n,1} - \tau p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n-1,1} + \tau p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n,2}. \end{aligned}$$

□

Докажем теорему 2. Из лемм 9 и 10 следует, что в случае регулярности подгруппы H должны быть одновременно разрешимы сравнения

$$-\tau \binom{2n-3}{n-2} \equiv -1 \pmod{p}, \quad \tau \binom{2n-3}{n-2} \equiv -1 \pmod{p}$$

относительно τ . Складывая их, получим $0 \equiv -2 \pmod{p}$, противоречие. Следовательно, группа $P_{\frac{p+2}{3}}(\mathbb{Z}_{p^3})$ не является регулярной. Теорем 2 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Всюду далее a, b — простые корни системы корней типа G_2 , причем $|a| < |b|$. Как и выше, вычисления, необходимые для доказательства теоремы, вынесем в отдельные утверждения. Список всех нетривиальных коммутаторных формул Шевалле приведён в приложении 2. Числа $C_{ij,rs}$ в формулах выражены через структурные константы $\epsilon_1 = N_{a,b}$, $\epsilon_2 = N_{a,a+b}$, $\epsilon_3 = N_{a,2a+b}$, $\epsilon_4 = N_{b,3a+b}$, соответствующие экстраспециальным парам (a, b) , $(a, a+b)$, $(a, 2a+b)$, $(b, 3a+b)$. В вычислениях мы всюду считаем $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1$.

Лемма 11. Пусть

$$g = x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(\gamma) x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon) \in PG_2(\mathbb{Z}_p).$$

Имеют место следующие равенства:

$$g^{x_a(1)} = x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta - \alpha) x_{2a+b}(\gamma + \alpha - 2\beta) x_{3a+b}(\delta - \alpha + 3\beta - 3\gamma) x_{3a+2b}(\epsilon - \alpha^2 - 3\beta^2 + 3\alpha\beta),$$

$$g^{x_b(1)} = x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(\gamma) x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon - \delta).$$

Доказательство. Используя тождество $xy = yx[x, y]$ и коммутаторную формулу Шевалле (формулы (29), (28), (27), (31) приложения 2) будем переставлять элемент $x_a(1)$ с каждым сомножителем из g в произведении $g x_a(1)$:

$$\begin{aligned} g x_a(1) &= x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(\gamma) x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon) x_a(1) \\ &= x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(\gamma) x_a(1) x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon) \\ &= x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_a(1) x_{2a+b}(\gamma) [x_{2a+b}(\gamma), x_a(1)] x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon) \\ &= x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_a(1) x_{2a+b}(\gamma) x_{3a+b}(-3\gamma) x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon) \\ &= x_b(\alpha) x_a(1) x_{a+b}(\beta) [x_{a+b}(\beta), x_a(1)] x_{2a+b}(\gamma) x_{3a+b}(\delta - 3\gamma) x_{3a+2b}(\epsilon) \\ &= x_a(1) x_b(\alpha) [x_b(\alpha), x_a(1)] x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(-2\beta) x_{3a+b}(3\beta) \times \\ &\quad x_{3a+2b}(-3\beta^2) x_{2a+b}(\gamma), x_{3a+b}(\delta - 3\gamma) x_{3a+2b}(\epsilon) \\ &= x_a(1) x_b(\alpha) x_{a+b}(-\alpha) x_{2a+b}(\alpha) x_{3a+b}(-\alpha) x_{3a+2b}(-\alpha^2) x_{a+b}(\beta) \times \\ &\quad x_{2a+b}(\gamma - 2\beta) x_{3a+b}(\delta + 3\beta - 3\gamma) x_{3a+2b}(\epsilon - 3\beta^2) \\ &= x_a(1) x_{a+b}(\beta - \alpha) x_{2a+b}(\gamma + \alpha - 2\beta) x_{3a+b}(\delta - \alpha + 3\beta - 3\gamma) \times \\ &\quad x_{3a+2b}(\epsilon - \alpha^2 - 3\beta^2 + 3\alpha\beta). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$g x_a(1) = x_a(1) x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta - \alpha) \times x_{2a+b}(\gamma + \alpha - 2\beta) x_{3a+b}(\delta - \alpha - 3\beta - 3\gamma) x_{3a+2b}(\epsilon - \alpha^2 - 3\beta^2 + 3\alpha\beta),$$

откуда следует требуемое равенство.

Аналогично,

$$\begin{aligned}
g x_b(1) &= x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(\gamma) x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon) x_b(1) \\
&= x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(\gamma) x_b(1) x_{3a+b}(\delta) [x_{3a+b}(\delta), x_b(1)] x_{3a+2b}(\epsilon) \\
&= x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(\gamma) x_b(1) x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon - \delta) \\
&= x_b(1) x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta) x_{2a+b}(\gamma) x_{3a+b}(\delta) x_{3a+2b}(\epsilon - \delta).
\end{aligned}$$

□

Лемма 12. Пусть

$$g = x_{a+b}(\alpha) x_{2a+b}(\beta) x_{3a+b}(\gamma) x_{3a+2b}(\delta) \in PG_2(\mathbb{Z}_p).$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство:

$$g^n = x_{a+b}(n\alpha) x_{2a+b}(n\beta) x_{3a+b}(n\gamma) x_{3a+2b}(n\delta + 3\binom{n}{2}\alpha\beta).$$

Доказательство. Индукция по n и формула (29) приложения 2.

$$\begin{aligned}
g^{n+1} &= g^n g \\
&= x_{a+b}(n\alpha) x_{2a+b}(n\beta) x_{3a+b}(n\gamma) x_{3a+2b}(n\delta + 3\binom{n}{2}\alpha\beta) \times \\
&\quad x_{a+b}(\alpha) x_{2a+b}(\beta) x_{3a+b}(\gamma) x_{3a+2b}(\delta) \\
&= x_{a+b}((n+1)\alpha) x_{2a+b}((n+1)\beta) x_{3a+b}((n+1)\gamma) \times \\
&\quad x_{3a+2b}((n+1)\delta + 3\binom{n}{2}\alpha\beta + 3n\alpha\beta) \\
&= x_{a+b}((n+1)\alpha) x_{2a+b}((n+1)\beta) x_{3a+b}((n+1)\gamma) \times \\
&\quad x_{3a+2b}((n+1)\delta + 3\binom{n+1}{2}\alpha\beta).
\end{aligned}$$

□

Лемма 13. В группе $PG_2(\mathbb{Z}_p)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
(x_a(1) x_b(1))^2 &= x_a(2) x_b(2) x_{a+b}(-1) x_{2a+b}(1) x_{3a+b}(-1), \\
(x_a(1) x_b(1))^3 &= x_a(3) x_b(3) x_{a+b}(-3) x_{2a+b}(5) x_{3a+b}(-9) x_{3a+2b}(-4), \\
(x_a(1) x_b(1))^4 &= x_a(4) x_b(4) x_{a+b}(-6) x_{2a+b}(14) x_{3a+b}(-36) x_{3a+2b}(-31), \\
(x_a(1) x_b(1))^5 &= x_a(5) x_b(5) x_{a+b}(-10) x_{2a+b}(30) x_{3a+b}(-100) x_{3a+2b}(-127).
\end{aligned}$$

Доказательство. Положим $D = x_a(1) x_b(1)$ и воспользуемся леммой 11.

$$\begin{aligned}
(D)^2 &= x_a(1) x_b(1) x_a(1) x_b(1) \\
&= x_a(2) x_b(1) [x_b(1), x_a(1)] x_b(1) \\
&= x_a(2) x_b(1) x_{a+b}(-1) x_{2a+b}(1) x_{3a+b}(-1) x_{3a+2b}(-1) x_b(1) \\
&= x_a(2) x_b(2) x_{a+b}(-1) x_{2a+b}(1) x_{3a+b}(-1). \\
(D)^3 &= x_a(2) x_b(2) x_{a+b}(-1) x_{2a+b}(1) x_{3a+b}(-1) x_a(1) x_b(1) \\
&= x_a(3) x_b(2) x_{a+b}(-3) x_{2a+b}(5) x_{3a+b}(-9) x_{3a+2b}(-13) x_b(1) \\
&= x_a(3) x_b(3) x_{a+b}(-3) x_{2a+b}(5) x_{3a+b}(-9) x_{3a+2b}(-4). \\
(D)^4 &= x_a(3) x_b(3) x_{a+b}(-3) x_{2a+b}(5) x_{3a+b}(-9) x_{3a+2b}(-4) x_a(1) x_b(1) \\
&= x_a(4) x_b(3) x_{a+b}(-6) x_{2a+b}(14) x_{3a+b}(-36) x_{3a+2b}(-67) x_b(1) \\
&= x_a(4) x_b(4) x_{a+b}(-6) x_{2a+b}(14) x_{3a+b}(-36) x_{3a+2b}(-31).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D)^5 &= x_a(4) x_b(4) x_{a+b}(-6) x_{2a+b}(14) x_{3a+b}(-36) x_{3a+2b}(-31) x_a(1) x_b(1) \\
 &= x_a(5) x_b(4) x_{a+b}(-10) x_{2a+b}(30) x_{3a+b}(-100) x_{3a+2b}(-227) x_b(1) \\
 &= x_a(5) x_b(5) x_{a+b}(-10) x_{2a+b}(30) x_{3a+b}(-100) x_{3a+2b}(-127).
 \end{aligned}$$

□

Лемма 14. В группе $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ для $i = 1, \dots, 12$ имеют место равенства

$$V_i = [x_{-3a-2b}(p), {}_i x_a(1) x_b(1)] = W_{i+1} Y_{i+2}, \quad Y_{i+2} \in S^{(i+2)},$$

где

i	W_i	i	W_i	i	W_i	i	W_i
2	$x_{-3a-b}(p)$	5	$x_{-a}(-2p) x_{-b}(6p)$	8	$x_{a+b}(28p)$	11	$x_{3a+2b}(-168p)$
3	$x_{-2a-b}(p)$	6	$h_{-a}(1+2p) h_{-b}(1-6p)$	9	$x_{2a+b}(-56p)$	12	1
4	$x_{-a-b}(2p)$	7	$x_a(10p) x_b(-18p)$	10	$x_{3a+b}(168p)$	13	1

Доказательство. Случай $i = 1$. Формула (44) приложения 2:

$$V_1 = [x_{-3a-2b}(p), x_b(1)] = x_{-3a-b}(p).$$

Случай $i = 2$. Формула (40) приложения 2:

$$V_2 = [x_{-3a-b}(p), x_a(1)x_b(1)] \equiv [x_{-3a-b}(p), x_a(1)] \equiv x_{-2a-b}(p) \pmod{S^{(4)}}.$$

Случай $i = 3$. Формула (39) приложения 2:

$$V_3 = [x_{-2a-b}(p) Y_4, x_a(1)x_b(1)] \equiv [x_{-2a-b}(p), x_a(1)] \equiv x_{-a-b}(2p) \pmod{S^{(5)}}.$$

Случай $i = 4$. Формулы (13) и (18) приложения 2:

$$\begin{aligned}
 V_4 &= [x_{-a-b}(2p) Y_5, x_a(1)x_b(1)] \equiv \\
 &\equiv [x_{-a-b}(2p), x_b(1)] [x_{-a-b}(2p), x_a(1)] \equiv x_{-a}(-2p) x_{-b}(6p) \pmod{S^{(6)}}.
 \end{aligned}$$

Случай $i = 5$. Соотношение 5) п 3.:

$$\begin{aligned}
 V_5 &= [x_{-a}(-2p) x_{-b}(6p) Y_6, x_a(1)x_b(1)] \equiv \\
 &\equiv [x_{-a}(-2p), x_a(1)] [x_{-b}(6p), x_b(1)] \equiv h_{-a}(1+2p) h_{-b}(1-6p) \pmod{S^{(7)}}.
 \end{aligned}$$

Случай $i = 6$. Соотношение 3) п 3 и таблица 2 приложения 1:

$$\begin{aligned}
 V_6 &= [h_{-a}(1+2p) h_{-b}(1-6p) Y_7, x_a(1)x_b(1)] \equiv \\
 &\equiv [h_{-a}(1+2p) h_{-b}(1-6p), x_b(1)] [h_{-a}(1+2p) h_{-b}(1-6p), x_a(1)] \equiv \\
 &\equiv x_a(10p) x_b(-18p) \pmod{S^{(8)}}.
 \end{aligned}$$

Случай $i = 7$. Формулы (26) и (27) приложения 2:

$$\begin{aligned}
 V_7 &= [x_a(10p) x_b(-18p) Y_8, x_a(1)x_b(1)] \equiv \\
 &\equiv [x_a(10p), x_b(1)] [x_b(-18p), x_a(1)] \equiv x_{a+b}(28p) \pmod{S^{(9)}}.
 \end{aligned}$$

Случай $i = 8$. Формула (28) приложения 2:

$$\begin{aligned}
 V_8 &= [x_{a+b}(28p) Y_9, x_a(1)x_b(1)] \equiv \\
 &\equiv [x_{a+b}(28p), x_a(1)] \equiv x_{2a+b}(-56p) \pmod{S^{(10)}}.
 \end{aligned}$$

Случай $i = 9$. Формула (29) приложения 2:

$$\begin{aligned} V_9 &= [x_{2a+b}(-56p)Y_{10}, x_a(1)x_b(1)] \equiv \\ &\equiv [x_{2a+b}(-56p), x_a(1)] \equiv x_{3a+b}(168p) \pmod{S^{(11)}}. \end{aligned}$$

Случай $i = 10$. Формула (30) приложения 2:

$$\begin{aligned} V_{10} &= [x_{3a+b}(168p)Y_{11}, x_a(1)x_b(1)] \equiv \\ &\equiv [x_{3a+b}(168p), x_b(1)] \equiv x_{3a+2b}(-168p) \pmod{S^{(12)}}. \end{aligned}$$

Случай $i = 11$. Имеем

$$V_{11} = [x_{3a+2b}(-168p)Y_{12}, x_a(1)x_b(1)] \equiv [Y_{12}, x_a(1)x_b(1)] \in S^{(13)}.$$

Случай $i = 12$. Очевиден. \square

Лемма 15. В группе $PG_2(\mathbb{Z}_p^m)$ для $i = 1, \dots, 5$ имеют место равенства

$$U_i = [[x_{-3a-2b}(p), {}_{11-i}x_a(1)x_b(1)], [x_{-3a-2b}(p), {}_i x_a(1)x_b(1)]] = P_i Q_i,$$

где $Q_i \in S^{(14)}$, $P_1 = x_b(-168p^2)$ и

i	2	3	4	5
P_i	$x_a(168p^2)$	$x_a(-224p^2)$	$x_a(168p^2)x_b(168p^2)$	$x_a(-100p^2)x_b(-324p^2)$

Доказательство. Воспользуемся леммой 14, заметив, что $W_i \in S^{(i)}$.

Случай $i = 1$. Формула (66) приложения 2:

$$\begin{aligned} U_1 &= [x_{3a+2b}(-168p)Y_{12}, x_{-3a-b}(p)Y_3] \equiv \\ &\equiv [x_{3a+2b}(-168p), x_{-3a-b}(p)] = x_b(-168p^2) \pmod{S^{(14)}}. \end{aligned}$$

Случай $i = 2$. Формула (60) приложения 2:

$$\begin{aligned} U_2 &= [x_{3a+b}(168p)Y_{11}, x_{-2a-b}(p)Y_4] \equiv \\ &\equiv [x_{3a+b}(168p), x_{-2a-b}(p)] \equiv x_a(168p^2) \pmod{S^{(14)}}. \end{aligned}$$

Случай $i = 3$. Формула (52) приложения 2:

$$\begin{aligned} U_3 &= [x_{2a+b}(-56p)Y_{10}, x_{-a-b}(2p)Y_5] \equiv \\ &\equiv [x_{2a+b}(-56p), x_{-a-b}(2p)] \equiv x_a(-224p^2) \pmod{S^{(14)}}. \end{aligned}$$

Случай $i = 4$. Формулы (45) и (47) приложения 2:

$$\begin{aligned} U_4 &= [x_{a+b}(28p)Y_9, x_{-a}(-2p)x_{-b}(6p)Y_6] \equiv \\ &\equiv [x_{a+b}(28p), x_{-a}(-2p)][x_{a+b}(28p), x_{-b}(6p)] \equiv \\ &\equiv x_b(168p^2)x_a(168p^2) \pmod{S^{(14)}}. \end{aligned}$$

Случай $i = 5$. Соотношения 3) п.3 и таблица 2 приложения 1:

$$\begin{aligned} U_5 &= [x_a(10p)x_b(-18p)Y_8, h_{-a}(1+2p)h_{-b}(1-6p)Y_7] \equiv \\ &\equiv [x_a(10p), h_{-a}(1+2p)h_{-b}(1-6p)][x_b(-18p), h_{-a}(1+2p)h_{-b}(1-6p)] \equiv \\ &\equiv x_a(-100p^2)x_b(-324p^2) \pmod{S^{(14)}}. \end{aligned}$$

\square

Докажем теорему 3. Согласно [11], степень нильпотентности силовской p -подгруппы $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ равна $mh - 1 = 6m - 1$, поэтому она регулярна, когда $6m - 1 < p$. С другой стороны, в [6] показано, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна, если $p > |G_2| + |\Pi(G_2)| = 12 + 2 = 14$, то есть когда $p \geq 17$. Таким образом, нам остаётся исследовать случаи, когда $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Сначала покажем, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_p)$ не является регулярной при $p = 2, 3, 5$. Заметим, что этих случаях $PG_2(\mathbb{Z}_p)$ совпадает с унипотентной подгруппой $UG_2(\mathbb{Z}_p)$ группы Шевалле $G_2(\mathbb{Z}_p)$. Коммутант $UG_2(\mathbb{Z}_p)$, согласно [11], содержится в подгруппе

$$H = \langle x_{a+b}(1), x_{2a+b}(1), x_{3a+b}(1), x_{3a+2b}(1) \rangle,$$

каждый элемент g которой единственным образом представляется в виде

$$g = x_{a+b}(\alpha) x_{2a+b}(\beta) x_{3a+b}(\gamma) x_{3a+2b}(\delta), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_p.$$

Положим $A = x_a(1)$ и $B = x_b(1)$. Очевидно, что $[\langle A, B \rangle, \langle A, B \rangle]^p \subseteq H^p$.

Случай $p = 2$. По лемме 13 в $PG_2(\mathbb{Z}_2)$ имеет место равенство

$$C = B^{-2}A^{-2}(AB)^2 = x_{a+b}(1) x_{2a+b}(1) x_{3a+b}(1).$$

Ввиду леммы 12 $H^2 \subseteq x_{3a+2b}(\mathbb{Z}_p)$, поэтому $C \notin H^2$. Значит, группа $PG_2(\mathbb{Z}_2)$ нерегулярна. Поскольку она служит гомоморфным образом $PG_2(\mathbb{Z}_{2^m})$ для любого $m \geq 2$, то отсюда заключаем, что $PG_2(\mathbb{Z}_{2^m})$ нерегулярна при $m \geq 1$.

Случаи $p = 3, 5$. По лемме 12 в обоих случаях $H^p = 1$. В тоже время, по лемме 13 $(AB)^3 = A^3B^3 \cdot x_{2a+b}(2) x_{3a+2b}(2)$ в $PG_2(\mathbb{Z}_3)$ и $(AB)^5 = A^5B^5 \cdot x_{3a+2b}(2)$ в $PG_2(\mathbb{Z}_5)$. Значит, группы $PG_2(\mathbb{Z}_{3^m}), PG_2(\mathbb{Z}_{5^m})$ нерегулярны при $m \geq 1$.

Случаи $p = 7, 11$. Докажем, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^2})$ не является регулярной при указанных p . Положим $A = x_a(1)x_b(1)$ и $B = x_{-3a-2b}(p)$. Элемент B содержится в конгруэнц-подгруппе $G_2(J)$, которая нормальна в $PG_2(\mathbb{Z}_{p^2})$ и является элементарной абелевой p -группой. Поэтому любой коммутатор от элементов A и B лежит в $G_2(J)$ и равен единице в степени, кратной p . Следовательно, $[\langle A, B \rangle]^p = 1$. С другой стороны, любой коммутатор от A и B , имеющий более двух вхождений B , равен единице, поэтому

$$B^{-p}A^{-p}(AB)^p = [B, A]^{(p)} \dots [B, {}_{p-1}A]^{(p)} = [B, {}_{p-1}A].$$

По лемме 14 коммутатор $[B, {}_{p-1}A]$ равен $x_a(10p)x_b(-18p)Y_8 \neq 1$ в $PG_2(\mathbb{Z}_{7^2})$ и равен $x_{3a+2b}(-168p) \neq 1$ в $PG_2(\mathbb{Z}_{11^2})$. Значит, группы $PG_2(\mathbb{Z}_{7^2}), PG_2(\mathbb{Z}_{11^2})$ не являются регулярными. Отсюда вытекает нерегулярность групп $PG_2(\mathbb{Z}_{7^m})$ и $PG_2(\mathbb{Z}_{11^m})$ при любом $m \geq 2$.

Случай $p = 13$. Докажем, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_{13^3})$ не является регулярной. Положим $A = x_a(1)x_b(1)$ и $B = x_{-3a-2b}(p)$. Элементы A и B удовлетворяют условия 1) и 2) следствия 1. Действительно, всякий коммутатор от A и B веса больше 12 или, имеющие два вхождения B , содержится в элементарной абелевой p -группе $G_2(J^2)$, которая централизуется элементом B .

Предположим, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^3})$ регулярна. Тогда по следствию 1 найдется элемент $d \in \langle A, B \rangle'$ такой, что

$$(25) \quad d^p \equiv [B, {}_{12}A][B, {}_{11}A, B]^{-1} \prod_{i=1}^5 [[B, {}_{11-i}A], [B, {}_iA]]^{(-1)^{i+1}} \pmod{S^{(14)}}.$$

Группа $\langle A, B \rangle'$ порождается коммутаторами $y_i = [B, {}_iA]$, $i = 1, 2, \dots$, и $y_{ij} = [y_i, y_j]$, $i, j = 1, 2, \dots$, которые удовлетворяют лемме 1 и следствию 2. Причем,

$y_{i,j}^p = 1$ для любых i, j , а $y_i^p = 1$, когда $i \geq 12$. Поэтому в силу следствия 1 можем считать, что

$$d = [B, A]^{\alpha_1} \dots [B,_{11}A]^{\alpha_{11}}$$

для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_{11}$. Элемент $[B,_{i}A]^p$ лежит в $S^{(i+7)}$, но не лежит в $S^{(i+8)}$ для $i = 1, \dots, 10$. Действительно, используя леммы 14 и 1, получаем

$$[B,_{i}A]^p = W_{i+1}^p Y_{i+2}^p [W_{i+1}, Y_{i+2}]^{\binom{p}{2}}.$$

По лемме 4 $y_{i+2}^p \in S^{(i+9)}$, $[W_{i+1}, Y_{i+2}]^{\binom{p}{2}} \in S^{(2i+9)}$, $W_{i+1}^p \in S^{(i+7)}$, но, очевидно, что $W_{i+1}^p \notin S^{(i+8)}$. Поскольку правая часть (25) содержится в $S^{(13)}$, а

$$d^p = [B, A]^{p\alpha_1} \dots [B,_{11}A]^{p\alpha_{11}},$$

то числа $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ должны быть кратны p . Поэтому можем считать, что

$$d = [B,_{7}A]^{\alpha_7} \dots [B,_{11}A]^{\alpha_{11}}.$$

Наконец, $[B,_{i}A]^p \in S^{(14)}$ при $i \geq 8$, поэтому

$$d^p \equiv [B,_{7}A]^{\alpha_7} \equiv x_a(10\alpha_7 p^2) x_b(-18\alpha_7 p^2) \pmod{S^{(14)}}.$$

С другой стороны, используя леммы 14 и 15, находим

$$\begin{aligned} & [B,_{12}A] [B,_{11}A, B]^{-1} \prod_{i=1}^5 [[B,_{11-i}A], [B,_{i}A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv \\ & \equiv 1 \cdot 1 \cdot x_b(-168p^2) (x_a(168p^2))^{-1} x_a(-224p^2) (x_b(168p^2) x_a(168p^2))^{-1} \times \\ & \times x_a(-100p^2) x_b(-324p^2) \equiv x_a(-660p^2) x_b(-212p^2) \pmod{S^{(14)}}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что оба равенства $10\alpha_7 p^2 = 9p^2$ и $8\alpha_7 p^2 = 3p^2$ одновременно не удовлетворяются в кольце \mathbb{Z}_{13^3} ни при каком α_7 . Значит, группа $PG_2(\mathbb{Z}_{13^3})$, а вместе с ней и группы $PG_2(\mathbb{Z}_{13^m})$, $m \geq 3$, не являются регулярными. Теорема 3 доказана.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Следуя [13, с.319], в трехмерном евклидовом пространстве с ортонормированной базой $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ выберем два вектора

$$a = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad b = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Тогда множество векторов

$-3a - 2b, -3a - b, -2a - b, -a - b, -a, -b, a, b, a + b, 2a + b, 3a + b, 3a + 2b$ образуют систему корней типа G_2 , а корни

$$a, b, a + b, 2a + b, 3a + b, 3a + 2b$$

— её подсистему положительных корней. Корни a и b образуют фундаментальную систему корней.

Структурные константы алгебры Ли типа G_2 указаны в следующей лемме.

Лемма 16. *Положим*

$$N_{a,b} = \varepsilon_1, \quad N_{a,a+b} = 2\varepsilon_2, \quad N_{a,2a+b} = 3\varepsilon_3, \quad N_{b,3a+b} = \varepsilon_4$$

и пусть $\varepsilon_5 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_4}$. Тогда ненулевые константы $N_{r,s}$ имеют вид, указанный в следующей таблице:

Таблица 1.

$N_{r,s}$	$-3a-2b$	$-3a-b$	$-2a-b$	$-a-b$	$-a$	$-b$	a	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$3a+2b$
$-3a-2b$								ϵ_4	$-\epsilon_5$	ϵ_5	$-\epsilon_4$	
$-3a-b$						ϵ_4	ϵ_3			$-\epsilon_3$		$-\epsilon_4$
$-2a-b$				$-3\epsilon_5$	$3\epsilon_3$		$2\epsilon_2$		$-2\epsilon_2$		$-\epsilon_3$	ϵ_5
$-a-b$			$3\epsilon_5$		$2\epsilon_2$		$3\epsilon_1$	$-\epsilon_1$		$-2\epsilon_2$		$-\epsilon_5$
$-b$		$-\epsilon_4$			ϵ_1				$-\epsilon_1$			ϵ_4
$-a$			$-3\epsilon_3$	$-2\epsilon_2$		$-\epsilon_1$			$3\epsilon_1$	$2\epsilon_2$	ϵ_3	
a		$-\epsilon_3$	$-2\epsilon_2$	$-3\epsilon_1$				ϵ_1	$2\epsilon_2$	$3\epsilon_3$		
b	$-\epsilon_4$			ϵ_1			$-\epsilon_1$				ϵ_4	
$a+b$	ϵ_5		$2\epsilon_2$		$-3\epsilon_1$	ϵ_1	$-2\epsilon_2$				$-3\epsilon_5$	
$2a+b$	$-\epsilon_5$	ϵ_3		$2\epsilon_2$			$-3\epsilon_3$		$3\epsilon_5$			
$3a+b$	ϵ_4		ϵ_3		$-\epsilon_3$			$-\epsilon_4$				
$3a+2b$		ϵ_4	$-\epsilon_5$	ϵ_5		$-\epsilon_4$						

Доказательство. Согласно [12, теорема 4.2.2.] структурные константы простой алгебры Ли типа Φ над \mathbb{C} удовлетворяют следующим соотношениям:

- (i) $N_{s,r} = -N_{r,s}$, $r, s \in \Phi$;
- (ii) $\frac{N_{r_1,r_2}}{(r_3,r_3)} = \frac{N_{r_2,r_3}}{(r_1,r_2)} = \frac{N_{r_3,r_1}}{(r_2,r_2)}$, если $r_1, r_2, r_3 \in \Phi$ и $r_1 + r_2 + r_3 = 0$;
- (iii) $N_{r,s}N_{-r,-s} = -(p+1)^2$, $r, s, r+s \in \Phi$;
- (iv) $\frac{N_{r_1,r_2}N_{r_3,r_4}}{(r_1+r_2,r_1+r_3)} + \frac{N_{r_2,r_3}N_{r_1,r_4}}{(r_2+r_3,r_2+r_3)} + \frac{N_{r_3,r_1}N_{r_2,r_4}}{(r_3+r_1,r_3+r_1)} = 0$,

если $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \Phi$, $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$ и среди корней r_1, r_2, r_3, r_4 нет пар противоположных.

Из равенств

$$b + (-a - b) + a = 0, \quad (a + b) + (-2a - b) + a = 0,$$

$$(2a + b) + (-3a - b) + a = 0, \quad (3a + b) + (-3a - 2b) + b = 0$$

и п. (ii) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{N_{b,-a-b}}{2} = \frac{N_{-a-b,a}}{6} = \frac{N_{a,b}}{2} = \frac{\epsilon_1}{2}, \quad \frac{N_{a+b,-2a-b}}{2} = \frac{N_{-2a-b,a}}{2} = \frac{N_{a,a+b}}{2} = \epsilon_2, \\ \frac{N_{2a+b,-3a-b}}{2} = \frac{N_{-3a-b,a}}{2} = \frac{N_{a,2a+b}}{6} = \frac{\epsilon_3}{2}, \\ \frac{N_{3a+b,-3a-2b}}{6} = \frac{N_{-3a-2b,b}}{6} = \frac{N_{b,3a+b}}{6} = \frac{\epsilon_4}{6}. \end{aligned}$$

Далее, из равенства

$$(a + b) + (2a + b) + (-b) + (-3a - b) = 0$$

и п. (iv) следует, что

$$\frac{N_{a+b,2a+b}N_{-b,-3a-b}}{6} + \frac{N_{-b,a+b}N_{2a+b,-3a-b}}{2} = 0,$$

откуда

$$N_{a+b,2a+b} = -3 \frac{N_{-b,a+b}N_{2a+b,-3a-b}}{N_{-b,-3a-b}} = -3 \frac{(-\epsilon_1)\epsilon_3}{-\epsilon_4} = -3 \frac{\epsilon_1\epsilon_3}{\epsilon_4} = -3\epsilon_5.$$

Наконец, из равенства

$$(2a + b) + (-3a - 2b) + (a + b) = 0$$

вытекает, что

$$\frac{N_{2a+b, -3a-2b}}{2} = \frac{N_{-3a-2b, a+b}}{2} = \frac{N_{a+b, 2a+b}}{6} = -\frac{\epsilon_5}{2}.$$

Оставшиеся структурные константы $N_{r,s}$ определяются из соотношений:

$$N_{r,s} = N_{-s,-r} = -N_{s,r} = -N_{-r,-s}.$$

□

В следующей таблице приведены значения скалярного произведения (h_s, r) .

Таблица 2.

$h_r \setminus s$	a	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$3a+2b$
h_a	2	-3	-1	1	3	0
h_b	-1	2	1	0	-1	1
h_{a+b}	-1	3	2	1	0	3
h_{2a+b}	1	0	1	2	3	3
h_{3a+b}	1	-1	0	1	2	1
h_{3a+2b}	0	1	1	1	1	2

7. ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Коммутаторные формулы Шевалле для типа G_2

Пусть Φ — приведённая неразложимая система корней, K — поле или ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Согласно [12, теорема 5.2.2] коммутатор

$$[x_s(u), x_r(t)] = x_s(u)^{-1} x_r(t)^{-1} x_s(u) x_r(t),$$

где $r, s \in \Phi$ и $u, t \in K$, равен единице, если $r+s \notin \Phi$ и $r \neq -s$, и раскладывается в произведение корневых элементов по формуле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{\substack{ir+jr \in \Phi, \\ i, j > 0}} x_{ir+jr}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j),$$

если $r+s \in \Phi$. Сомножители произведения расположены в соответствии с возрастанием суммы $i+j$, а константы $C_{ij,rs}$ являются целыми числами и определяются из формул [12, теорема 5.2.2]:

$$C_{i1,rs} = M_{r,s,i}, \quad C_{1j,rs} = (-1)^j M_{s,r,j}, \quad C_{32,rs} = \frac{1}{3} M_{r+s,r,2}, \quad C_{23,rs} = -\frac{2}{3} M_{s+r,s,2}.$$

В свою очередь, числа $M_{r,s,i}$ выражаются через структурные константы $N_{r,s}$ соответствующей алгебры Ли по формуле [12, с. 61]

$$M_{r,s,i} = \frac{1}{i!} N_{r,s} N_{r,r+s} \cdots N_{r,(i-1)r+s},$$

Список формул.

Положительные корни

$$(26) \quad [x_b(u), x_a(t)] = x_{a+b}(-\epsilon_1 t u) x_{2a+b}(\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u) x_{3a+b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t^3 u) x_{3a+2b}(-\epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u^2),$$

$$(27) \quad [x_a(u), x_b(t)] = \\ = x_{a+b}(\epsilon_1 tu) x_{2a+b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 t u^2) x_{3a+b}(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t u^3) x_{3a+2b}(-2\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u^3),$$

$$(28) \quad [x_{a+b}(u), x_a(t)] = x_{2a+b}(-2\epsilon_2 tu) x_{3a+b}(3\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u) x_{3a+2b}(-3\epsilon_2 \epsilon_5 t u^2),$$

$$(29) \quad [x_{2a+b}(u), x_a(t)] = x_{3a+b}(-3\epsilon_3 tu),$$

$$(30) \quad [x_{3a+b}(u), x_b(t)] = x_{3a+2b}(-\epsilon_4 tu),$$

$$(31) \quad [x_{2a+b}(u), x_{a+b}(t)] = x_{3a+2b}(3\epsilon_5 tu),$$

Отрицательные корни

$$(32) \quad [x_{-b}(u), x_{-a}(t)] = \\ = x_{-a-b}(\epsilon_1 tu) x_{-2a-b}(\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u) x_{-3a-b}(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t^3 u) x_{-3a-2b}(-\epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u^2),$$

$$(33) \quad [x_{-a}(u), x_{-b}(t)] = \\ = x_{-a-b}(-\epsilon_1 tu) x_{-2a-b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 t u^2) x_{-3a-b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t u^3),$$

$$(34) \quad [x_{-a-b}(u), x_{-a}(t)] = x_{-2a-b}(2\epsilon_2 tu) x_{-3a-b}(3\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u) x_{-3a-2b}(-3\epsilon_2 \epsilon_5 t u^2),$$

$$(35) \quad [x_{-2a-b}(u), x_{-a}(t)] = x_{-3a-b}(3\epsilon_3 tu),$$

$$(36) \quad [x_{-3a-b}(u), x_{-b}(t)] = x_{-3a-2b}(\epsilon_4 tu),$$

$$(37) \quad [x_{-2a-b}(u), x_{-a-b}(t)] = x_{-3a-2b}(-3\epsilon_5 tu),$$

Смешанные корни

$$(38) \quad [x_{-a-b}(u), x_a(t)] = x_{-b}(3\epsilon_1 tu),$$

$$(39) \quad [x_{-2a-b}(u), x_a(t)] = x_{-a-b}(2\epsilon_2 tu) x_{-b}(3\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u) x_{-3a-2b}(3\epsilon_2 \epsilon_5 t u^2),$$

$$(40) \quad [x_{-3a-b}(u), x_a(t)] = \\ = x_{-2a-b}(\epsilon_3 tu) x_{-a-b}(\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u) x_{-b}(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t^3 u) x_{-3a-2b}(\epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u^2),$$

$$(41) \quad [x_a(u), x_{-3a-b}(t)] = \\ = x_{-2a-b}(-\epsilon_3 tu) x_{-a-b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 t u^2) x_{-b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t u^3) x_{-3a-2b}(2\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u^3),$$

$$(42) \quad [x_b(u), x_{-a-b}(t)] = \\ = x_{-a}(\epsilon_1 tu) x_{-2a-b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u) x_{-3a-2b}(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u) x_{-3a-b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 t^3 u^2),$$

$$(43) \quad [x_{-a-b}(u), x_b(t)] = \\ = x_{-a}(-\epsilon_1 tu) x_{-2a-b}(\epsilon_1 \epsilon_2 t u^2) x_{-3a-2b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t u^3) x_{-3a-b}(-2\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u^3),$$

$$(44) \quad [x_{-3a-2b}(u), x_b(t)] = x_{-3a-b}(\epsilon_4 tu),$$

$$(45) \quad [x_{-a}(u), x_{a+b}(t)] = x_b(3\epsilon_1 tu),$$

- (46) $[x_{-b}(u), x_{a+b}(t)] =$
 $= x_a(-\epsilon_1 t u) x_{2a+b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u) x_{3a+2b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u) x_{3a+b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 t^3 u^2),$
- (47) $[x_{a+b}(u), x_{-b}(t)] =$
 $= x_a(\epsilon_1 t u) x_{2a+b}(\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u) x_{3a+2b}(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u) x_{3a+b}(-2\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u^3),$
- (48) $[x_{-2a-b}(u), x_{a+b}(t)] = x_{-a}(-2\epsilon_2 t u) x_b(-3\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u) x_{-3a-b}(3\epsilon_2 \epsilon_3 t u^2),$
- (49) $[x_{-3a-2b}(u), x_{a+b}(t)] =$
 $= x_{-2a-b}(-\epsilon_5 t u) x_{-a}(\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u) x_b(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u) x_{3a+b}(\epsilon_2 \epsilon_3 t^3 u^2),$
- (50) $[x_{a+b}(u), x_{-3a-2b}(t)] =$
 $= x_{-2a-b}(\epsilon_5 t u) x_{-a}(-\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u) x_b(-\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u) x_{3a+b}(2\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u^3),$
- (51) $[x_{-a}(u), x_{2a+b}(t)] = x_{a+b}(2\epsilon_2 t u) x_{3a+2b}(-3\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u) x_b(-3\epsilon_1 \epsilon_2 t u^2),$
- (52) $[x_{-a-b}(u), x_{2a+b}(t)] = x_a(-2\epsilon_2 t u) x_{3a+b}(-3\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u) x_{-b}(3\epsilon_1 \epsilon_2 t u^2),$
- (53) $[x_{-3a-b}(u), x_{2a+b}(t)] =$
 $= x_{-a}(-\epsilon_3 t u) x_{a+b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u) x_{3a+2b}(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u) x_b(-\epsilon_1 \epsilon_2 t^3 u^2),$
- (54) $[x_{2a+b}(u), x_{-3a-b}(t)] =$
 $= x_{-a}(\epsilon_3 t u) x_{a+b}(\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u) x_{3a+2b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 t^3 u) x_b(-2\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u^3),$
- (55) $[x_{-3a-2b}(u), x_{2a+b}(t)] =$
 $= x_{-a-b}(\epsilon_5 t u) x_a(-\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u) x_{3a+b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 t^3 u) x_{-b}(\epsilon_1 \epsilon_2 t^3 u^2),$
- (56) $[x_{2a+b}(u), x_{-3a-2b}(t)] =$
 $= x_{-a-b}(-\epsilon_5 t u) x_a(\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u) x_{3a+b}(\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 t^3 u) x_{-b}(2\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u^3),$
- (57) $[x_{-a}(u), x_{3a+b}(t)] =$
 $= x_{2a+b}(\epsilon_3 t u) x_{a+b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 t u^2) x_b(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t u^3) x_{3a+2b}(2\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u^3),$
- (58) $[x_{3a+b}(u), x_{-a}(t)] =$
 $= x_{2a+b}(-\epsilon_3 t u) x_{a+b}(\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u) x_b(-\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 t^3 u) x_{3a+2b}(\epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u^2),$
- (59) $[x_{-2a-b}(u), x_{3a+b}(t)] =$
 $= x_a(-\epsilon_3 t u) x_{-a-b}(\epsilon_2 \epsilon_3 t u^2) x_{-3a-2b}(\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 t^3 u) x_{-b}(-2\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u^3),$
- (60) $[x_{3a+b}(u), x_{-2a-b}(t)] =$
 $= x_a(\epsilon_3 t u) x_{-a-b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u) x_{-3a-2b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 t^3 u) x_{-b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 t^3 u^2),$
- (61) $[x_{-3a-2b}(u), x_{3a+b}(t)] = x_{-b}(-\epsilon_4 t u),$

$$(62) \quad [x_{-a-b}(u), x_{3a+2b}(t)] = \\ = x_{2a+b}(-\epsilon_5 t u) x_a(-\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u^2) x_{-b}(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u^3) x_{3a+b}(2\epsilon_2 \epsilon_3 t^2 u^3),$$

$$(63) \quad [x_{3a+2b}(u), x_{-a-b}(t)] = \\ = x_{2a+b}(\epsilon_5 t u) x_a(\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u^2) x_{-b}(-\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_5 t^3 u^3) x_{3a+b}(\epsilon_2 \epsilon_3 t^3 u^2),$$

$$(64) \quad [x_{-2a-b}(u), x_{3a+2b}(t)] = \\ = x_{a+b}(\epsilon_5 t u) x_{-a}(\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u^2) x_{-3a-b}(-\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 t^3 u^3) x_b(2\epsilon_1 \epsilon_2 t^2 u^3),$$

$$(65) \quad [x_{3a+2b}(u), x_{-2a-b}(t)] = \\ = x_{a+b}(-\epsilon_5 t u) x_{-a}(-\epsilon_2 \epsilon_5 t^2 u^2) x_{-3a-b}(\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_5 t^3 u^3) x_b(\epsilon_1 \epsilon_2 t^3 u^2),$$

$$(66) \quad [x_{-3a-b}(u), x_{3a+2b}(t)] = x_{a+b}(-\epsilon_4 t u).$$

REFERENCES

- [1] V.D. Mazurov, E.I. Huhro, *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, 16-e izdanie, Novosibirsk, 2006
- [2] M. Hall, *Theory of groups*, Inostrannaya literatura, 1962.
- [3] Yu.I. Merzlyakov, *Central series and series of commutators of matrix groups*, Algebra i logika, **3**:4 (1964), 49–58.
- [4] A.V. Yagzhev, *Regularity of Sylow p -subgroups of general linear groups over residue rings*, Matem. zametki, **56**:6 (1994), 106–116.
- [5] S.G. Kolesnikov, *Regularity of Sylow p -subgroups of groups $GL_n(\mathbb{Z}_p^m)$* , Issl. po matem. analizu i algebre, **3** (2001), 117–124.
- [6] S.G. Kolesnikov, *Regularity of Sylow p -subgroups of Chevalley groups over the ring \mathbb{Z}_p^m* , Sib. matem. zhurnal, **46**:6 (2006), 1289–1295.
- [7] S.G. Kolesnikov, V.M. Leontiev, G.P. Egorychev, *Two collection formulas*, J. Group Theory, **23**:4 (2020), 607–628.
- [8] S.G. Kolesnikov, *On the necessary conditions for regularity a Sylow p -subgroup of the group $GL_n(\mathbb{Z}_p^m)$* , Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika, **6**:2 (2013), 18–25.
- [9] P. Hall, *A contribution to the theory of groups of prime-power order*, Proc. Lond. Math. Soc. **36** (1934), 29–95.
- [10] V.M. Leontiev, *On Divisibility of Some Sums of Binomial Coefficients Arising From Collection Formulas*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **11**:5 (2018), 603–614.
- [11] V.M. Levchuk, *Commutator structure of some subgroups of Chevalley groups*, Ukr. matem. zhurnal, **44**:6 (1992), 786–795.
- [12] Carter.R. Simple groups of Lie type.-Ney York: Wiley and Sons, 1972. 458c.
- [13] N. Burbaki, *Lie groups and algebras*, Mir, 1972.

SERGEY GENNADIEVICH KOLESNIKOV
 SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,
 PR. SVOBODNY, 79,
 660041, KRASNOYRSK, RUSSIA
E-mail address: sklsnkv@mail.ru

VLADIMIR MARKOVICH LEONTIEV
 SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,
 PR. SVOBODNY, 79,
 660041, KRASNOYRSK, RUSSIA
E-mail address: v.m.leontiev@outlook.com