S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 512.517
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 20H25

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ РЕГУЛЯРНОСТИ P-ГРУППЫ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К ВОПРОСУ ВЕРФРИЦА

С.Г. КОЛЕСНИКОВ, В.М. ЛЕОНТЬЕВ

Abstract. We obtain a necessary condition for the regularity of a p-group in terms of segments of P. Hall's collection formula. For any prime number p such that $(p+2)/3$ is an integer, it is proved that the Sylow p-subgroup of the group $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ is not regular if $n \geqslant (p+2)/3$ and $m \geqslant 3$. We also list all regular Sylow p-subgroups of the Chevalley group of type G_2 over the ring $\mathbb{Z}_{p^m}$.

Keywords: regular p-group, linear group, Chevalley group.

1. Введение

В 1982 г. Б. Верфриц поставил в Коуровской тетради [1] вопрос 8.3: для каких n, m, p силовская p-подгруппа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ группы $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ над кольцом вычетов целых чисел $\mathbb{Z}_{p^m}$ регулярна? Ответ известен в следующих случаях: $nm-1<p$ (следует из работы Ю. И. Мерзлякова [2]), $n \geqslant p+1$ (А. В. Ягжев [3]), $n \geqslant (p+1)/2$ или $n^2<p$ (С. Г. Колесников [4], [5]). В работе получено необходимое условие регулярности, которое позволяет частично исследовать случай $n \geqslant (p+1)/3$, а также получить полное решение аналога этого вопроса для силовской p-подгруппы $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ группы Шевалле $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ для Φ типа G_2.

Теорема 1. *Если конечная p-группа G регулярна, то для любых $a, b \in G$ существует элемент $d \in \langle a, b\rangle'$ такой, что*

$$d^p = \prod R_i^{f_i(p)},$$

Kolesnikov, S.G., Leontiev, V.M., One necessary condition for the regularity of a p-group and its application to Wehrfritz's problem.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

где произведение берётся по всем коммутаторам R_i веса $w(R_i) \geqslant p$ из собирательной формулы Ф. Холла.

В частности, для любого целого неотрицательного числа j

$$d^p \equiv \prod_{p \leqslant w(R_i) \leqslant p+j} R_i^{f_i(p)} \pmod{G^{(p+j+1)}},$$

где $G^{(p+j+1)}$ — $(p+j+1)$-й член нижнего центрального ряда группы G.

Из теоремы 1 и теоремы 3 в [6] вытекает

Следствие 1. *Пусть G регулярная p-группа, $p > 2$, и $a, b \in G$. Предположим, что всякий коммутатор от a и b : 1) имеющий более двух вхождений b, равен 1, 2) веса больше, чем $p-1$, имеет порядок 1 или p. Тогда существует элемент $d \in \langle a, b\rangle'$ такой, что*

$$d^p \equiv [b, {}_{p-1}a]\,[b, {}_{p-2}a, b]^{-1} \prod_{v=1}^{(p-3)/2} [[b, {}_{p-2-v}a], [b, {}_v a]]^{(-1)^{v+1}} \pmod{G^{(p+1)}}.$$

Теорема 2. *Пусть p такое нечётное простое число, что число $(p+2)/3$ — целое. Тогда группа $P_{\frac{p+2}{3}}(\mathbb{Z}_{p^3})$ не является регулярной.*

Поскольку свойство регулярности наследуется на подгруппы и фактор группы из теоремы 2 следует нерегулярность групп $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$, когда $n \geqslant (p+2)/3$ и $m \geqslant 3$. С другой стороны, в [7] показано, что группы $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ при $m \geqslant 2$, $p \geqslant 5$, $n \leqslant (p-1)/2$ удовлетворяют перечисленным в [8] условиям регулярности.

Теорема 3. *Группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна тогда и только тогда, когда $p \geqslant 17$ или $6m \leqslant p \leqslant 13$.*

2. Доказательство теоремы 1 и следствия 1. Вспомогательные утверждения

Докажем теорему 1. Пусть $a, b \in G$. По теореме 12.4.2 из [8], существует элемент $c \in \langle a, b\rangle'$ такой, что $(ab)^p = a^p b^p c^p$. С другой стороны, согласно [9, теорема 3.1], существует последовательность коммутаторов R_i от a и b, упорядоченных по весу, и последовательность целых чисел $f_i(p)$ такие, что

$$(ab)^p = a^p b^p \prod_{2 \leqslant w(R_i) < p} R_i^{f_i(p)} \prod_{w(R_i) \geqslant p} R_i^{f_i(p)}.$$

Так как группа G регулярна, а показатели $f_i(p)$ кратны p, когда $2 \leqslant w(R_i) < p$, то по следствию 12.4.1 из [8] существует элемент $u \in \langle a, b\rangle'$ такой, что

$$u^p = \prod_{2 \leqslant w(R_i) < p} R_i^{f_i(p)}.$$

Отсюда

$$a^p b^p c^p = a^p b^p u^p \prod_{2 \leqslant w(R_i) < p} R_i^{f_i(p)}$$

или

$$\prod_{2 \leqslant w(R_i) < p} R_i^{f_i(p)} = (u^{-1})^p c^p = d^p$$

для некоторого $d \in \langle a, b\rangle'$. Теорема 1 доказана.

Замечание. *Для любого целого числа m и любого целого неотрицательного числа n мы используем классическое определение биномиального коэффициента:*

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{1}{m!}\prod\limits_{i=0}^{m-1}(n-i), & \textit{если } m \geqslant 0; \\ 0, & \textit{если } m < 0. \end{cases}$$

При таком определении справедливо соотношение $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$.

Докажем следствие 1. Согласно [6, теорема 3] собирательная формула Ф. Холла при условии 1) следствия редуцируется к виду

$$(ab)^n =$$

$$= a^p b^p \prod_{u=1}^{p-1} [b, {}_u a]^{\binom{p}{u+1}} \prod_{u=1}^{p-1} [b, {}_u a, b]^{p\binom{p}{u+1} - \binom{p+1}{u+2}} \prod_{1 \leqslant v < u \leqslant p-1} [[b, {}_u a], [b, {}_v a]]^{g_p(u,v)},$$

где

$$g_p(u, v) =$$

$$= \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{v} \sum_{i=v-k}^{p-m-k} \binom{i}{u-k+1} \binom{p-m-i-1}{k-1} \binom{i}{v-k} + \sum_{m=1}^{p-2} \sum_{k=m+1}^{p-1} \binom{m}{v} \binom{k}{u}.$$

По условию 2) следствия все коммутаторы веса больше, чем $p-1$, имеют порядок 1 или p. Вычислим по модулю p показатели степеней всех коммутаторов веса p, входящих в собирательную формулу. Первое и второе произведения содержат по одному коммутатору веса p. Это $[b, {}_{p-1} a]$ и $[b, {}_{p-2} a, b]$ соответственно. Показатель степени первого коммутатора равен $\binom{p}{p} = 1$. Для второго имеем

$$p\binom{p}{p-1} - \binom{p+1}{p} = p^2 - p - 1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Рассмотрим последнее произведение. Коммутаторы веса p, входящие в него, следующие: $[[b, {}_{p-2-v} a], [b, {}_v a]]$, где $v = 1, \ldots, (p-3)/2$. Согласно [10, теорема 1] функция $g_p(u, v)$ допускает представление

$$g_p(u, v) =$$

$$= \sum_{k=1}^{v} \sum_{s=0}^{v-k} \binom{u-k+1+s}{v-k} \binom{v-k}{s} \binom{p}{u+s+2} + \sum_{i=0}^{v+1} (-1)^i \binom{p+i}{u+i+1} \binom{p}{v+1-i}.$$

Поэтому

$$g_p(p-2-v, v) =$$

$$= \sum_{k=1}^{v} \sum_{s=0}^{v-k} \binom{t+s-k-1}{v-k} \binom{v-k}{s} \binom{p}{t+s} + \sum_{i=0}^{v+1} (-1)^i \binom{p+i}{t+i-1} \binom{p}{v+1-i},$$

где $t = p - v$. Из неравенства $1 \leqslant v \leqslant (p-3)/2$ следует, что $(p+3)/2 \leqslant p + s - v \leqslant p - 1$ и $0 \leqslant v + 1 - i \leqslant (p-1)/2$. Значит, в двойной сумме биномиальный коэффициент $\binom{p}{t+s} = \binom{p}{p+s-v}$ всегда кратен p. В однократной сумме биномиальный коэффициент $\binom{p}{v+1-i}$ не кратен p только в единственном случае, когда $v+1-i=0$. Следовательно,

$$g_p(p-2-v,v) \equiv (-1)^{v+1}\binom{p+v+1}{p}\binom{p}{0} \equiv$$
$$\equiv (-1)^{v+1}\frac{(p+1)\dots(p+v+1)}{(v+1)!} \equiv (-1)^{v+1}\frac{(v+1)!}{(v+1)!} \equiv (-1)^{v+1} \pmod p.$$

Сейчас следствие 1 вытекает из теоремы 1.

Следующие два утверждения потребуются для доказательства теорем 2 и 3.

Лемма 1. *Пусть G — группа, $y_1,\dots,y_s \in G$, $s \geqslant 2$. Предположим, что ступень нильпотентности подгруппы $H = \langle y_1,\dots,y_s\rangle$ равна 2. Тогда для любого натурального числа n имеет место равенство*

$$(y_1\dots y_s)^n = y_1^n\dots y_s^n \prod_{1\leqslant i<j\leqslant s}[y_j,y_i]^{\binom{n}{2}}.$$

Доказательство. Индукция по n. Поскольку ступень нильпотентности H равна 2, имеем

$$(y_1\dots y_s)^{n+1} = y_1^n\dots y_s^n\cdot\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant s}[y_j,y_i]^{\binom{n}{2}}\right)\cdot y_1\dots y_s =$$
$$= y_1^n\dots y_s^n\cdot y_1\dots y_s\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant s}[y_j,y_i]^{\binom{n}{2}}.$$

Пользуясь соотношением $y_j^n y_i = y_i y_j^n [y_j,y_i]^n$, которое следует из условий леммы, соберем в правой части по порядку $y_1,\dots,y_s$. Затем, учитывая перестановочность коммутаторов, преобразуем полученное выражение к виду

$$(y_1\dots y_s)^{n+1} = y_1^{n+1}\dots y_s^{n+1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant s}[y_j,y_i]^{\binom{n}{2}+n}.$$

Равенства $\binom{n}{2}+n=\binom{n}{2}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$ завершают доказательство. □

Следствие 2. *Предположим, что подгруппа H из леммы 1 является p-группой, $p>2$, с элементарным абелевым коммутантом, а число n кратно p. Тогда для любых целых чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ и любой перестановки π на множестве $\{1,\dots,s\}$ имеем*

$$(y_1^{\alpha_1}\dots y_s^{\alpha_s})^n = \left(y_{\pi(1)}^{\alpha_{\pi(1)}}\dots y_{\pi(s)}^{\alpha_{\pi(s)}}\right)^n = y_1^{n\alpha_1}\dots y_s^{n\alpha_s}.$$

Если для некоторого i дополнительно $y_i^n=1$ или $y_i^p\in H'$ и α_i кратно p, то

$$(y_1^{\alpha_1}\dots y_i^{\alpha_i}\dots y_s^{\alpha_s})^n = (y_1^{\alpha_1}\dots \hat{y}_i^{\alpha_i}\dots y_s^{\alpha_s})^n.$$

Здесь значок $\hat{}$ над элементом означает отсутствие этого элемента в произведении.

3. Силовские p-подгруппы групп $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ и $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$

Следуя [2], определим последовательность функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, от натуральных аргументов i, j, k, полагая

$$f_n(i, j, k) = -\left[\frac{i-j-k}{n}\right],$$

здесь $[x]$ — целая часть числа x (ближайшее к x слева целое число). Через J обозначим идеал кольца $\mathbb{Z}_{p^m}$, порождённый элементом p, а через E — единичную матрицу порядка n. Выделим в $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ подгруппы

$$G^{(k)} = \langle E + A \mid A = (a_{ij}),\ a_{ij} \in J^{f_n(i,j,k)},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\rangle, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Согласно [2], $G^{(1)}$ изоморфна группе $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$, а ряд

$$G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots \supset G^{(mn-1)} \supset \langle E\rangle$$

является её нижним центральным рядом, если $p > 2$. Кроме того, при любом простом p и для любых натуральных k, l имеет место соотношение

$$\left[G^{(k)}, G^{(l)}\right] \subseteq G^{(k+l)}. \tag{1}$$

В [7, лемма 2] было показано, что если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ такие матрицы, что $a_{ij} \in J^{f_n(i,j,k)}$ и $b_{ij} \in J^{f_n(i,j,l)}$, то элементы c_{ij} матрицы $C = AB$ содержатся в идеалах $J^{f_n(i,j,k+l)}$. Отсюда и из свойств делимости биномиальных коэффициентов легко следует

Лемма 2. *Если $p > n$, то для любого натурального k имеет место включение $\left[G^{(k)}\right]^p \subseteq G^{(k+n)}$.*

Пусть Φ — произвольная приведённая неразложимая система корней. В группе Шевалле $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ выделим последовательность подгрупп ($k = 1, 2, \ldots$)

$$S^{(k)} = \langle x_r(t), h_s(1+u) \mid r, s \in \Phi,\ t \in J^{f(r,k)}, u \in J^{f(0,k)}\rangle,$$

где функция $f(r, k)$ определена на множестве $\Phi_0 \times \mathbb{N}$, $\Phi_0 = \Phi \cup \{0\}$, равенством $f(r, k) = -[(\mathrm{ht}(r) - k)/h]$. Здесь $\mathrm{ht}(r)$ — функция высоты корня, $\mathrm{ht}(0) = 0$, h — число Кокстера системы корней Φ. Согласно [11], группа $S^{(1)}$ изоморфна силовской p-подгруппе $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ группы Шевалле $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$, а ряд

$$S^{(1)} \supset S^{(2)} \ldots \supset S^{(mh)} = \langle 1\rangle.$$

является её нижним центральным рядом, если число p не делит $p(\Phi)!$, где

$$p(\Phi) = \max\{(r, r)/(s, s) \mid r, s \in \Phi\}.$$

Как и выше, при любом простом p и для любых натуральных k, l имеет место соотношение

$$\left[S^{(k)}, S^{(l)}\right] \subseteq S^{(k+l)}. \tag{2}$$

Напомним, что в группе $P\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ выполняются соотношения: ($r, s \in \Phi$)

1) *аддитивность корневых элементов:*

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u), \qquad t, u \in J^{f(r,1)};$$

2) *мультипликативность диагональных элементов:*

$$h_r(t)h_r(u) = h_r(tu), \qquad t, u \in 1 + J^{f(0,1)};$$

3) *соотношения между корневыми и диагональными элементами:*

$$[x_r(t), h_s(u)] = x_r(t(u^{(r,h_s)} - 1)), \qquad t \in J^{f(r,1)}, u \in J^{f(0,1)};$$

4) *коммутаторная формула Шевалле:*

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{\substack{ir+js \in \Phi,\\ i,j>0}} x_{ir+js\in\Phi}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad t \in J^{f(r,1)}, u \in J^{f(s,1)};$$

5) *соотношения между противоположными корневыми элементами:*

$$[x_r(t), x_{-r}(u)] = x_r(c^{-1}t^2u)h_r(c)x_{-r}(-c^{-1}tu^2), \quad c = 1-tu, t \in J^{f(r,1)}, u \in J^{f(-r,1)}$$

Аналогом леммы 2 для силовских p-подгрупп групп Шевалле является

Лемма 3. *Если $p > h$, то для любого натурального числа k справедливо включение $\left[S^{(k)}\right]^p \subseteq S^{(k+h)}$.*

Доказательство. Индукция по k. Имеем

$$\left[S^{(mh)}\right]^p \subseteq [\langle 1\rangle]^p = \langle 1\rangle = S^{(mh+h)}.$$

Пусть $1 \leqslant k < mh$ и $y \in S^{(k)}$. Тогда

$$y = \prod_{i=1}^{l} x_{r_i}(t_i) \prod_{j=1}^{q} h_{s_j}(1+z_j),$$

где $r_i \in \Phi$, $t_i \in J^{f(r_i,k)}$ и $s_j \in \Pi(\Phi)$, $z_j \in J^{f(0,k)}$. Покажем, что $y^p \in S^{(k+h)}$. Согласно [8, теорема 12.3.1]

$$y^p = \prod_{i=1}^{l} x_{r_i}(t_i)^p \prod_{j=1}^{q} h_{s_j}(1+z_j)^p \cdot c_1^{\alpha_1} \dots c_u^{\alpha_u} \cdot c_{u+1}^{\alpha_{u+1}} \dots c_{u+v}^{\alpha_{u+v}},$$

где $c_1, \dots, c_u$ — коммутаторы веса от 2 до $p-1$, а числа $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ кратны p, веса коммутаторов $c_{u+1}, \dots, c_{u+v}$ больше, чем $p-1$. Так как $f(r_i,k)+1 = f(r_i,k+h)$, то

$$pt_i \in pJ^{f(r_i,k)} = J^{f(r_i,k)+1} = J^{f(r_i,k+h)}$$

и, следовательно, $x_{r_i}(t_i)^p = x_{r_i}(pt_i) \in S^{(k+h)}$.

Далее, функция $f(0,k)$ удовлетворяет неравенствам: 1) $f(0,k_1) + f(0,k_2) \geqslant f(0,k_1+k_2)$ для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$; 2) $f(0,k_1) \geqslant f(0,k_2)$, если $k_1 \geqslant k_2$. Также из условия $p > h$ следует, что $kp \geqslant k+h$. Поэтому $f(0,k)p \geqslant f(0,kp) \geqslant f(0,k+h)$. Отсюда

$$(1+z_j)^p = 1 + \sum_{w=1}^{p-1} \binom{w}{p} z_j^w + z_j^p \in 1 + \sum_{w=1}^{p-1} pJ^{f(0,k)w} + J^{f(0,k)p} \subseteq 1 + J^{f(0,k+h)}$$

и, значит, $h_{s_j}(1+z_j)^p \in S^{(k+h)}$.

Коммутаторы $c_1, \dots, c_u$ содержатся в $S^{(2k)} \subseteq S^{(k+1)}$, поэтому $c_1^{\alpha_1}, \dots, c_u^{\alpha_u} \in S^{(k+1+h)} \subseteq S^{(k+h)}$ по предположению индукции. Наконец, из соотношения (2) следует, что $c_{u+1}, \dots c_{u+v} \in S^{(kp)} \subseteq S^{(k+h)}$. $\square$

Обозначим через $K_n(J^k)$ и $\Phi(J^k)$ соответственно конгруэнц-подгруппы групп $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ и $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m})$ соответственно, которые определяются как ядра гомоморфизмов $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m}) \to GL_n(\mathbb{Z}_{p^{m-k}})$ и $\Phi(\mathbb{Z}_{p^m}) \to \Phi(\mathbb{Z}_{p^{m-k}})$, индуцированных кольцевым гомоморфизмом $\mathbb{Z}_{p^m} \to \mathbb{Z}_{p^{m-k}}$. Соотношения 1) следующей леммы можно найти в [2] и [11], соотношения 2) легко устанавливается методами доказательств лемм 2 и 3.

Лемма 4. *Имеют место следующие включения*

1) $[K_n(J^k), K_n(J^l)] \subseteq K_n(J^{k+l}), \ \ [\Phi(J^k), \Phi(J^l)] \subseteq \Phi(J^{k+l})$;

2) $\left[K_n(J^k)\right]^p \subseteq K_n(J^{k+1}), \ \ \left[\Phi(J^k)\right]^p \subseteq \Phi(J^{k+1})$.

4. Доказательство теоремы 2.

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 5. *Для любых* $E+X, E+Y \in P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ *имеет место тождество*

$$[E+X, E+Y] = E + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{t=0}^{k-2}(-1)^k X^t Y^{k-t-2}(X,Y), \tag{3}$$

где $(X,Y) = XY - YX$.

Доказательство. Ввиду нильпотентности матриц X и Y имеем

$$[E+X, E+Y] = \left(\sum_{i=0}^{\infty}(-X)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-Y)^j\right)(E+X)(E+Y).$$

Раскрыв скобки, получим сумму однородных степени k многочленов $f_k(X,Y)$, причем, очевидно, что $f_0(X,Y) = E$ и $f_1(X,Y) = O$, где O — нулевая матрица. Зафиксируем $k \geqslant 2$. Тогда

$$f_k(X,Y) =$$

$$= (-X)^k + (-X)^{k-1}(-Y) + (-X)^{k-1}X + (-X)^{k-1}Y +$$

$$+\sum_{t=0}^{k-2}(-X)^t\left((-Y)^{k-t} + (-Y)^{k-t-1}X + (-Y)^{k-t-1}Y + (-Y)^{k-t-2}XY\right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{k-2}(-1)^k X^t Y^{k-t-2}(X,Y).$$

□

Заменив X на pX в (3), мы можем представить коммутатор $[E+pX, E+Y]$ в виде ряда по степеням p с коэффициентами, зависящими от X и Y. Далее нас будет интересовать коэффициент при p в разложении сложных коммутаторов.

Лемма 6. *Пусть* $E+pB, E+A \in P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$. *Коэффициент при* p *в разложении коммутатора* $[E+pB, {}_sE+A]$, $s \in \mathbb{N}$, *по степеням* p *равен*

$$F(s) = \sum_{j=0}^{s-1}\sum_{k=j}^{\infty}(-1)^k\binom{s-1}{j}\binom{s+k-j-1}{s-1}A^k(B,A)A^{s-j-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Индукция по s. По лемме 5

$$[E+pB,E+A]=E+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{t=0}^{k-2}(-1)^k(pB)^tA^{k-t-2}(pB,A)=$$
$$=E+p\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^kA^{k-2}(B,A)+\ldots=E+p\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^k(B,A)+\ldots.$$

Полученный коэффициент при p, очевидно, равен выражению (4), если в последнем положить $s=1$.

Пусть $s\geqslant 1$. Чтобы вычислить коэффициент при p в разложении коммутатора $[E+pB,_{s+1}E+A]$ по степеням p воспользуемся предположением индукции и подставим вместо B в сумме

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^k(B,A)$$

выражение (4). Полученную кратную сумму

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{k=j}^{\infty}(-1)^k\binom{s-1}{j}\binom{s+k-j-1}{s-1}A^t(A^k(B,A)A^{s-j-1},A)=$$

преобразуем, раскрыв внешний лиев коммутатор,

$$=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{k=j}^{\infty}(-1)^{t+k}\binom{s-1}{j}\binom{s+k-j-1}{s-1}A^{t+k}(B,A)A^{s-j}+$$
$$+\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{k=j}^{\infty}(-1)^{t+k+1}\binom{s-1}{j}\binom{s+k-j-1}{s-1}A^{t+k+1}(B,A)A^{s-j-1}.$$

Зафиксируем число j', $0\leqslant j'\leqslant s$, и число k', $k'\geqslant j'$. Коэффициент при $A^{k'}(B,A)A^{s-j'}$ равен:

$$\sum_{t=0}^{k'}(-1)^{k'}\binom{s-1}{0}\binom{s+k'-t-1}{s-1}=(-1)^{k'}\binom{s}{0}\sum_{t=0}^{k'}\binom{s-1+k'-t}{s-1}=$$
$$=(-1)^{k'}\binom{s}{0}\binom{s+k'}{s-1}=(-1)^{k'}\binom{s}{j'}\binom{s+k'-j'}{s},$$

если $j'=0$;

$$\sum_{t=0}^{k'-s}(-1)^{k'}\binom{s-1}{s-1}\binom{s+k'-s-t-1}{s-1}=\binom{s}{s}\sum_{t=0}^{k'-s}(-1)^{k'}\binom{k'-t-1}{s-1}=$$
$$=(-1)^{k'}\binom{s}{s}\binom{k'}{s}=(-1)^{k'}\binom{s}{j'}\binom{s+k'-j'}{s},$$

если $j' = s$;

$$\sum_{t=0}^{k'-j'} (-1)^{k'} \binom{s-1}{j'} \binom{s+k'-j'-t-1}{s-1} \left(\binom{s-1}{j'} + \binom{s-1}{j'-1} \right) =$$

$$= (-1)^{k'} \binom{s}{j'} \sum_{t=0}^{k'-j'} \binom{s-1+k'-j'-t}{s-1} = (-1)^{k'} \binom{s}{j'} \binom{s+k'-j'}{s},$$

когда $0 < j' < s$. Таким образом, коэффициент при $A^{k'}(B,A)A^{s-j'}$ во всех случаях равен

$$(-1)^{k'} \binom{s}{j'} \binom{s+k'-j'}{s}.$$

□

Далее считаем, что $n \geqslant 3$. Матрицу порядка n с единицами на месте (i,j), где $1 \leqslant i,j \leqslant n$, и нулями на остальных местах будем обозначать через e_{ij} и называть элементарной матрицей. Напомним, что справедлива следующая формула умножения элементарных матриц

$$e_{ij}e_{ts} = \delta_{jt}e_{is},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Также зафиксируем следующее соглашение: $e_{ij} = O$, если $i \notin \{1,\ldots,n\}$ или $j \notin \{1,\ldots,n\}$. Сумму, у которой нижний предел больше верхнего, считаем равной нулю (нулевой матрицей).

Зафиксируем до конца параграфа следующие матрицы

$$A = e_{21} + e_{32} + \ldots + e_{n,n-1}, \qquad B = e_{1n}.$$

В леммах ниже вычисляется произведение из следствия 1 и исследуется коммутант группы, порожденной элементами $E + pB$ и $E + A$.

Лемма 7. *Для любого натурального s имеет место равенство*

$$F(s) = \sum_{j=0}^{s} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \binom{s}{j} \binom{s+k-j-1}{s-1} e_{k+1,n-s+j}.$$

Доказательство. С учётом перечисленных выше соглашений, для любого целого неотрицательного k имеем

$$A^k = \sum_{t=k+1}^{n} e_{t,t-k}.$$

Отсюда

$$A^k(B,A)A^{s-j-1} =$$

$$= \left(\sum_{t=k+1}^{n} e_{t,t-k} \right) (e_{1,n-1} - e_{2n}) \left(\sum_{t=s-j}^{n} e_{t,t-s+j+1} \right) = e_{k+1,n-s+j} - e_{k+2,n-s+j+1}.$$

Подставим в (4) и разобьём на две суммы

$$F(s)=\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{k=j}^{n-1}(-1)^k\binom{s-1}{j}\binom{s-1+k-j}{s-1}e_{k+1,n-s+j}-$$
$$-\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{k=j}^{n-1}(-1)^k\binom{s-1}{j}\binom{s-1+k-j}{s-1}e_{k+2,n-s+j+1}.$$

во второй двойной сумме заменим k на $k-1$ и j на $j-1$

$$F(s)=\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{k=j}^{n-1}(-1)^k\binom{s-1}{j}\binom{s-1+k-j}{s-1}e_{k+1,n-s+j}+$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=j}^{n-1}(-1)^k\binom{s-1}{j-1}\binom{s-1+k-j}{s-1}e_{k+1,n-s+j}.$$

Поскольку $\binom{s-1}{s}=\binom{s-1}{-1}=0$, распространим суммирование по j в первой сумме до s, а во второй — от 0, и сложим их

$$F(s)=\sum_{j=0}^{s}\sum_{k=j}^{n-1}(-1)^k\left[\binom{s-1}{j}+\binom{s-1}{j-1}\right]\binom{s-1+k-j}{s-1}e_{k+1,n-s+j}=$$
$$=\sum_{j=0}^{s}\sum_{k=j}^{n-1}(-1)^k\binom{s}{j}\binom{s+k-j-1}{s-1}e_{k+1,n-s+j}.$$

□

Заметим, что произвольный элемент $E+C$ из группы $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ можно представить (конечно, не единственным образом) в виде

$$E+C=E+p^0C_0+pC_1+\ldots+p^{m-1}C_{m-1}.$$

Следующая простая лемма часто облегчает вычисления в $P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$.

Лемма 8. *Пусть $E+pX+p^2Y, E+pU+p^2V\in P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$. Тогда*

1) $(E+pX+p^2Y)^{-1}=E-pX-p^2Y+p^2X^2$;

2) $(E+pX+p^2Y)^p=E+p^2X$;

3) $[E+pX+p^2Y,E+pU+p^2V]=E+p^2(X,U)$.

Лемма 9. *Пусть простое число p такое, что $n=(p+2)/3$ — целое число. В группе $P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$ имеет место равенство*

$$[E+pB,{}_{p-1}E+A]\,[E+pB,{}_{p-2}E+A,E+pB]^{-1}\times$$
$$\times\prod_{s=1}^{(p-3)/2}[[E+pB,{}_{p-2-s}E+A],[E+pB,{}_sE+A]]^{(-1)^{s+1}}=$$
$$=\alpha e_{n,1}-p^2e_{n,2}-p^2e_{n-1,1},$$

где $\alpha\in\mathbb{Z}_{p^3}$.

Доказательство. Сначала покажем, что $[E+pB,{}_sE+A]=E$, если $s\geqslant 2n$. В частности, $[E+pB,{}_{p-1}E+A]=E$, поскольку $p\geqslant 7$, а значит, $n\geqslant 3$, и, следовательно,

$$p-1=3n-3=2n+(n-3)\geqslant 2n.$$

Введём следующие обозначения:

$$\phi(x,{}^ry)=[x,y],\quad \phi(x,{}^ly)=[y,x],$$

по индукции при $q\geqslant 2$ полагаем

$$\phi(x,{}^{\alpha_1}y_1,\dots,{}^{\alpha_q}y_q)=\phi(\phi(x,{}^{\alpha_1}y_1,\dots,{}^{\alpha_{q-1}}y_{q-1}),{}^{\alpha_q}y_q),$$

где $\alpha_i=r$ или $\alpha_i=l$.

Разложим матрицы $E+A$ и $E+pB$ в произведение трансвекций:

$$E+A=t_{21}(1)t_{32}(1)\dots t_{n,n-1}(1),\quad E+pB=t_{1n}(p).$$

Из коммутаторных тождеств

$$[x,yz]=[x,y][x,y,z][x,z],\quad [yz,x]=[z,x][z,[x,y]][y,x]$$

следует, что $[E+pB,{}_sE+A]$ раскладывается в произведение коммутаторов вида

$$\phi(t_{1n}(p),{}^{\alpha_1}t_{i_1,i_1-1}(1),\dots,{}^{\alpha_q}t_{i_q,i_q-1}(1)),\qquad q\geqslant s. \tag{5}$$

Изучим подробнее выражение (5). Из соотношения

$$\begin{aligned}(6)\quad &[t_{ij}(\alpha),t_{km}(\beta)]=\\ &=(1-\delta_{jk})(1-\delta_{im})E+\delta_{jk}(1-\delta_{im})t_{im}(\alpha\beta)+\delta_{im}(1-\delta_{jk})t_{kj}(-\alpha\beta),\end{aligned}$$

справедливого, когда $j\neq k$ или $i\neq m$, следует, что, коммутируя трансвекции с разностями между первым и вторым индексами, равными s_1 и s_2, мы получим единичную матрицу, либо трансвекцию с разностью индексов s_1+s_2. Значит, выражение (5) при $q=n-2$ есть единичная матрица, либо трансвекция с разностью индексов, равной, -1, т.е.

$$\phi(t_{1n}(p),{}^{\alpha_1}t_{i_1,i_1-1}(1),\dots,{}^{\alpha_{n-2}}t_{i_{n-2},i_{n-2}-1}(1))=t_{i,i+1}(\epsilon_ip),$$

где $\epsilon_i=0$ или $\epsilon_i=\pm1$ для некоторого i. Далее, используя соотношение

$$[t_{ij}(\alpha),t_{ji}(\beta)]=t_{ij}(c^{-1}\alpha^2\beta)d_{ij}(c)t_{ji}(-c^{-1}\alpha\beta^2), \tag{7}$$

где $d_{ij}(c)=E+(c-1)e_{ii}+(c^{-1}-1)e_{jj}$, справедливое, если элемент $c=1-\alpha\beta$ обратим (в нашем случае это так, поскольку $c\equiv 1\pmod p$), находим

$$\begin{aligned}(8)\quad &[t_{i,i-1}(\epsilon_ip),t_{i_{n-1},i_{n-1}-1}(1)]=\\ &=(1-\delta_{i,i_{n-1}})E+\delta_{i,i_{n-1}}t_{i,i+1}(\epsilon_i^2p^2)d_{i,i+1}(1-\epsilon_ip)t_{i+1,i}(-\epsilon_ip(1-\epsilon_ip)^{-1}).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $p^3=0$ в $\mathbb{Z}_{p^3}$ и, следовательно, $\epsilon_i^2p^2(1-\epsilon_ip)^{-1}=\epsilon_i^2p^2$. Наконец, соотношения (6), (7) и

$$[t_{km}(\alpha),\mathrm{diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)]=t_{km}(\alpha(\beta_m\beta_k^{-1}-1)) \tag{9}$$

показывают, что коммутирование (8) с трансвекцией $t_{i_n,i_n-1}(1)$ даёт единичную матрицу, если $i_n\neq i-1,i,i+1$, матрицу из унитреугольной группы $UT_n(\mathbb{Z}_{p^3})$, если $i_n=i-1,i+1$, наконец, матрицу $d_{i,i+1}(1-\epsilon_i^2p^2)\theta$, где $\theta\in UT_n(\mathbb{Z}_{p^3})$, когда $i_n=i$. Отсюда и (9) следует, что выражение (5) при $q=n+1$ содержится в $UT_n(\mathbb{Z}_{p^3})$ и равно E при $q=2n$, т.к. группа $UT_n(\mathbb{Z}_{p^3})$ нильпотентна ступени $n-1$.

Заметим, что если $p > 7$, то $p-2 \geqslant 2n$ и поэтому

$$[E+pB,{}_{p-2}E+A,E+pB]=E.$$

Когда $p=7$, то $n=3$ и непосредственные вычисления показывают, что

$$[E+pB,{}_{p-2}E+A]=t_{31}(-3p^2), \quad [t_{31}(-3p^2),t_{13}(p)]=E.$$

Таким образом, во всех случаях

$$[E+pB,{}_{p-1}E+A]\,[E+pB,{}_{p-2}E+A,E+pB]^{-1}=E.$$

Вычислим оставшееся произведение. Согласно п. 3 леммы 8 имеем

$$[[E+pB,{}_{p-2-s}E+A],[E+pB,{}_{s}E+A]]=E+p^2F(p-2-s)F(s). \tag{10}$$

Пусть $s \geqslant 2n-1$. Тогда выражение

$$A^k(B,A)A^{s-j-1}=A^kBA^{s-j}+A^{k+1}BA^{s-j-1}$$

равно нулевой матрице, если $0 \leqslant j \leqslant s$ и $k \geqslant j$, поскольку $A^n=O$. В самом деле, когда $0 \leqslant j \leqslant n-2$, имеем $s-j-1 \geqslant n$; если $j=n-1$, то $s-j \geqslant n$ и $k+1 \geqslant n$; наконец, если $j \geqslant n$, то $k \geqslant n$. Отсюда и леммы 6 следует, что $F(s)=O$, когда $s \geqslant 2n-1$, и $F(p-2-s)=O$, когда $p-2-s \geqslant 2n-1$. Значит, коммутатор (10) отличен от E, когда

$$n-2 \leqslant s \leqslant \min\{2n-2,(p-3)/2\}=(3n-5)/2.$$

Положим $s=n-2+\alpha$. Тогда

$$\prod_{s=1}^{(p-3)/2}[[E+pB,{}_{p-2-s}E+A],[E+pB,{}_{s}E+A]]^{(-1)^{s+1}}= \tag{11}$$

$$=\prod_{\alpha=0}^{(n-1)/2}[[E+pB,{}_{2n-2-\alpha}E+A],[E+pB,{}_{n-2+\alpha}E+A]]^{(-1)^{\alpha+1}}=$$

$$=E+p^2\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}(-1)^{\alpha+1}(F(2n-2-\alpha),F(n-2+\alpha)).$$

Ступень нильпотентности группы $P_n(p^3)$ равна $3n-1=p+1$. Поэтому произведение (11), состоящее из коммутаторов веса p, содержится в гиперцентре и равно

$$E+p^2\theta e_{n,1}+p^2\beta e_{n-1,1}+p^2\gamma e_{n,2}$$

для подходящих θ,β,γ.

Вычислим коэффициент β при $e_{n-1,1}$. Для этого, используя лемму 6, выделим в разложении $F(2n-2-\alpha)$ через элементарные матрицы слагаемые с первым индексом, равным $n-1$, а в $F(n-2-\alpha)$ — слагаемые со вторым индексом, равным 1:

$$\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^{n-2}\binom{2n-2-\alpha}{j}\binom{3n-5-\alpha-j}{2n-3-\alpha}e_{n-1,-n+2+\alpha+j}, \tag{12}$$

$$\sum_{k=\alpha-1}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-2+\alpha}{\alpha-1}\binom{n-2+k}{n-3+\alpha}e_{k+1,1}. \tag{13}$$

Заметим, что в (13) при $\alpha=0$ и $k=-1$, не только e_{01} равна нулевой матрице, но биномиальный коэффициент $\binom{n-2+\alpha}{\alpha-1}=\binom{n-2}{-1}$ тоже равен нулю. Учитывая, что $-n+2+\alpha+j \leqslant \alpha \leqslant k+1$, коэффициент при $e_{n-1,1}$ в произведении (12) и (13) равен

$$(-1)^{n-2+\alpha-1}\binom{2n-2-\alpha}{n-2}\binom{3n-5-\alpha-n+2}{2n-3-\alpha}\binom{n-2+\alpha}{\alpha-1}\binom{n-2+\alpha-1}{n-3+\alpha}=$$

$$=(-1)^{\alpha}\binom{2n-2-\alpha}{n-2}\binom{n-2+\alpha}{n-1}. \tag{14}$$

(При $\alpha=0$ выражение (14), очевидно, равно нулю). Далее, выделив в разложении $F(n-2+\alpha)$ слагаемые с первым индексом $n-1$, а в $F(2n-2-\alpha)$ — слагаемые со вторым индексом 1, получим

$$\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^{n-2}\binom{n-2+\alpha}{j}\binom{2n-5+\alpha+j}{n-3+\alpha}e_{n-1,2-\alpha+j}, \tag{15}$$

$$\sum_{k=n-1-\alpha}^{n-1}(-1)^{k}\binom{2n-2-\alpha}{n-1-\alpha}\binom{n-2+k}{2n-3-\alpha}e_{k+1,1}. \tag{16}$$

С учётом того, что $2-\alpha+j \leqslant n-\alpha \leqslant k+1$, коэффициент при $e_{n-1,1}$ в произведении (15) и (16) равен

$$(-1)^{n-2+n-1-\alpha}\binom{n-2+\alpha}{n-2}\binom{2n-5+\alpha-n+2}{n-3+\alpha}\binom{2n-2-\alpha}{n-1-\alpha}\binom{2n-3-\alpha}{2n-3-\alpha}=$$

$$=(-1)^{\alpha+1}\binom{n-2+\alpha}{n-2}\binom{2n-2-\alpha}{n-1}. \tag{17}$$

Умножив разность между (14) и (17) на $(-1)^{\alpha+1}$, а затем просуммировав по α, видим, что

$$\beta=-\sum_{\alpha=0}^{(n-1/2)}\left[\binom{2n-2-\alpha}{n-2}\binom{n-2+\alpha}{n-1}+\binom{n-2+\alpha}{n-2}\binom{2n-2-\alpha}{n-1}\right]. \tag{18}$$

Вычислим полученную сумму. Имеем

$$\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}\binom{2n-2-\alpha}{n-2}\binom{n-2+\alpha}{n-1}=\sum_{\alpha=-(n-1)/2}^{0}\binom{2n-2+\alpha}{n-2}\binom{n-2-\alpha}{n-1}=$$

$$=\sum_{\alpha=n-(n-1)/2}^{n}\binom{n-2+\alpha}{n-2}\binom{2n-2-\alpha}{n-1}=\sum_{\alpha=(n+1)/2}^{n}\binom{n-2+\alpha}{n-2}\binom{2n-2-\alpha}{n-1}.$$

Поэтому

$$-\beta=\sum_{\alpha=0}^{n}\binom{n-2+\alpha}{n-2}\binom{2n-2-\alpha}{n-1}=\sum_{\alpha=n-2}^{2n-2}\binom{\alpha}{n-2}\binom{3n-4-\alpha}{n-1}=$$

$$=\binom{3n-3}{2n-2}=\binom{p-1}{2n-2}\equiv(-1)^{2n-2}\equiv 1 \pmod p.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\binom{3n-4-(2n-2)}{n-1}=0$, и доказанным [10] тождеством

$$\sum_{i=b}^{n-a}\binom{n-i}{a}\binom{i}{b}=\binom{n+1}{a+b+1}.$$

Вычислим коэффициент γ. Выделим в разложении $F(2n-2-\alpha)$ слагаемые с первым индексом, равным n, а в $F(n-2-\alpha)$ — слагаемые со вторым индексом, равным 2:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1}\binom{2n-2-\alpha}{j}\binom{3n-4-\alpha-j}{2n-3-\alpha}e_{n,-n+2+\alpha+j}, \tag{19}$$

$$\sum_{k=\alpha}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-2+\alpha}{\alpha}\binom{n-3+k}{n-3+\alpha}e_{k+1,2}. \tag{20}$$

Учитывая, что $-n+2+\alpha+j\leqslant\alpha+1\leqslant k+1$, коэффициент при $e_{n,2}$ в произведении (19) и (20) равен

$$(-1)^{n-1+\alpha}\binom{2n-2-\alpha}{n-1}\binom{2n-3-\alpha}{2n-3-\alpha}\binom{n-2+\alpha}{\alpha}\binom{n-3+\alpha}{n-3+\alpha}=$$

$$=(-1)^{\alpha}\binom{2n-2-\alpha}{n-1}\binom{n-2+\alpha}{n-2}. \tag{21}$$

Далее, выделив в разложении $F(n-2+\alpha)$ слагаемые с первым индексом n, а в $F(2n-2-\alpha)$ — слагаемые со вторым индексом 2, получим

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1}\binom{n-2+\alpha}{j}\binom{2n-4+\alpha-j}{n-3+\alpha}e_{n,2-\alpha+j}, \tag{22}$$

$$\sum_{k=n-\alpha}^{n-1}(-1)^{k}\binom{2n-2-\alpha}{n-\alpha}\binom{n-3+k}{2n-3-\alpha}e_{k+1,2}. \tag{23}$$

Отметим, что в (22) при $\alpha=0$ и $j=n-1$ матрица $e_{n,n+1}$ нулевая и биномиальный коэффициент при ней $\binom{n-2}{n-1}$ равен нулю. Сумма (23) при $\alpha=0$ тоже по определению равна нулю. С учётом того, что $2-\alpha+j\leqslant n-\alpha+1\leqslant k+1$, коэффициент при $e_{n,2}$ в произведении (22) и (23) равен

$$(-1)^{n-1+n-\alpha}\binom{n-2+\alpha}{n-1}\binom{n-3+\alpha}{n-3+\alpha}\binom{2n-2-\alpha}{n-\alpha}\binom{2n-3-\alpha}{2n-3-\alpha}=$$

$$=(-1)^{\alpha+1}\binom{n-2+\alpha}{n-1}\binom{2n-2-\alpha}{n-2}. \tag{24}$$

(При $\alpha=0$ выражение (24), очевидно, равно нулю). Просуммировав по α разность между (21) и (24), умноженную на $(-1)^{\alpha+1}$, снова получим выражение (18). Следовательно, $\gamma=-1$. □

Лемма 10. *Коммутант подгруппы $H=\langle E+A,E+pB\rangle$ группы $P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$ порождается коммутаторами*

$$y_i=[E+pB,{}_iE+A],\ i=1,2,\ldots,$$

$$y_{jl}=[[E+pB,{}_jE+A],[E+pB,{}_lE+A]],\ j,l=0,1,\ldots.$$

Если $d \in H'$ и $d^p \in G^{(p)}$ (— p-й член нижнего центрального ряда группы $P_n(\mathbb{Z}_{p^3})$), то

$$d^p = E + \lambda p^2 e_{n,1} - \tau p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n-1,1} + \tau p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n,2}.$$

Доказательство. Заметим, что $y_i \in K_n(J)$ и $y_{jl} \in K_n(J^2)$ для любых i, j, l. Так как $K_n(J^3) = \langle E \rangle$, а по лемме 4 имеют место включения: $[K_n(J), K_n(J^2)] \subseteq K_n(J^3)$ и $\left[K_n(J^2)\right]^p \subseteq K_n(J^3)$, то $[y_i, y_{jl}] = E$ и $y_{jl}^p = E$. Таким образом, ввиду следствия 2, можем считать, что

$$d = y_1^{\tau_1} \dots y_{3n-1}^{\tau_{3n-1}}.$$

Далее, если $i \geqslant 2n-1$, то $y_i \in G^{(2n)} \subseteq K_n(J^2)$ и поэтому $y_i^p = E$. Значит, произведение $y_{2n-1}^{\tau_{2n-1}} \dots y_{3n-1}^{\tau_{3n-1}}$ в разложении d тоже можно отбросить.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant 2n-4$. Тогда $y_i \in G^{(i+1)}$ и по лемме 4 имеем $y_i^p \in G^{(i+n+1)}$. Покажем, что $y_i^p \notin G^{(i+n+2)}$. Действительно, если $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то используя леммы 4 и 8, находим

$$y_i^p = (E + pF(i) + p^2 Q(i))^p = E + p^2 F(i) =$$
$$= E + \dots + (-1)^0 \binom{i}{0} \binom{i-1}{i-1} p^2 e_{1,n-i} + \dots = E + \dots + p^2 e_{1,n-i} + \dots.$$

В тоже время

$$f_n(1, n-i, i+n+2) = -\left[\frac{1-(n-i)-(i+n+2)}{n}\right] = 3,$$

что означает, что элемент, стоящий на позиции $(i, n-i)$, произвольной матрицы из $G^{(i+n+2)}$ лежит в идеале J^3. Аналогично, если $n \leqslant i \leqslant 2n-4$, то

$$y_i^p = E + \dots + (-1)^{i+1-n} \binom{i}{i+1-n} \binom{i-1}{i-1} p^2 e_{i+2-n,1} + \dots$$

и $\binom{i}{i+1-n} \not\equiv 0 \pmod p$, а с другой стороны,

$$f_n(i+2-n, 1, i+n+2) = -\left[\frac{i+2-n-1-(i+2+n)}{n}\right] = 3.$$

Значит, $y_i^p \notin G^{(i+n+2)}$. Отсюда и включения $d^p \in G^p = G^{(3n-2)}$ следует, что коммутаторы $y_1, \dots, y_{2n-4}$ должны входить в разложение d в степенях кратных p, а потому тоже могут быть отброшены. Следовательно, можем считать, что $d = y_{2n-3}^{\tau} y_{2n-2}^{\mu}$. Снова используя следствие 2 и лемму 7, находим

$$d^p = y_{2n-3}^{p\tau} y_{2n-2}^{p\mu} = \left(E + p^2 F(2n-3)\right)^{\tau} \left(E + p^2 F(2n-2)\right)^{\mu} =$$
$$= \left(E + p^2(2n-3)\binom{2n-3}{n-2} e_{n,1} - p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n-1,1} + p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n,2}\right)^{\tau} \times$$
$$\times \left(E + p^2 \binom{2n-2}{n-1} e_{n,1}\right)^{\mu} =$$
$$= E + \gamma p^2 e_{n,1} - \tau p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n-1,1} + \tau p^2 \binom{2n-3}{n-2} e_{n,2}.$$

□

Докажем теорему 2. Из лемм 9 и 10 следует, что в случае регулярности подгруппы H должны быть одновременно разрешимы сравнения

$$-\tau\binom{2n-3}{n-2} \equiv -1 \pmod p, \qquad \tau\binom{2n-3}{n-2} \equiv -1 \pmod p$$

относительно τ. Складывая их, получим $0 \equiv -2 \pmod p$, противоречие. Следовательно, группа $P_{\frac{p+2}{3}}(\mathbb{Z}_{p^3})$ не является регулярной. Теорем 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3

Всюду далее a, b — простые корни системы корней типа G_2, причем $|a| < |b|$. Как и выше, вычисления, необходимые для доказательства теоремы, вынесем в отдельные утверждения. Список всех нетривиальных коммутаторных формул Шевалле приведён в приложении 2. Числа $C_{ij,rs}$ в формулах выражены через структурные константы $\epsilon_1 = N_{a,b}$, $\epsilon_2 = N_{a,a+b}$, $\epsilon_3 = N_{a,2a+b}$, $\epsilon_4 = N_{b,3a+b}$, соответствующие экстраспециальным парам (a, b), $(a, a+b)$, $(a, 2a+b)$, $(b, 3a+b)$. В вычислениях мы всюду считаем $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1$.

Лемма 11. *Пусть*

$$g = x_b(\alpha)\, x_{a+b}(\beta)\, x_{2a+b}(\gamma)\, x_{3a+b}(\delta)\, x_{3a+2b}(\epsilon) \in PG_2(\mathbb{Z}_p).$$

Имеют место следующие равенства:

$$g^{x_a(1)} =$$
$$x_b(\alpha)\, x_{a+b}(\beta-\alpha)\, x_{2a+b}(\gamma+\alpha-2\beta)\, x_{3a+b}(\delta-\alpha+3\beta-3\gamma)\, x_{3a+2b}(\epsilon-\alpha^2-3\beta^2+3\alpha\beta),$$

$$g^{x_b(1)} = x_b(\alpha)\, x_{a+b}(\beta)\, x_{2a+b}(\gamma)\, x_{3a+b}(\delta)\, x_{3a+2b}(\epsilon-\delta).$$

Доказательство. Используя тождество $xy = yx[x, y]$ и коммутаторную формулу Шевалле (формулы (29), (28), (27), (31) приложения 2) будем переставлять элемент $x_a(1)$ с каждым сомножителем из g в произведении $g\, x_a(1)$:

$$\begin{aligned}
g\, x_a(1) &= x_b(\alpha)\, x_{a+b}(\beta)\, x_{2a+b}(\gamma)\, x_{3a+b}(\delta)\, x_{3a+2b}(\epsilon)\, x_a(1)\\
&= x_b(\alpha)\, x_{a+b}(\beta)\, x_{2a+b}(\gamma)\, x_a(1) x_{3a+b}(\delta)\, x_{3a+2b}(\epsilon)\\
&= x_b(\alpha)\, x_{a+b}(\beta)\, x_a(1)\, x_{2a+b}(\gamma)\, [x_{2a+b}(\gamma), x_a(1)]\, x_{3a+b}(\delta)\, x_{3a+2b}(\epsilon)\\
&= x_b(\alpha)\, x_{a+b}(\beta)\, x_a(1) x_{2a+b}(\gamma)\, x_{3a+b}(-3\gamma)\, x_{3a+b}(\delta)\, x_{3a+2b}(\epsilon)\\
&= x_b(\alpha)\, x_a(1)\, x_{a+b}(\beta)\, [x_{a+b}(\beta), x_a(1)]\, x_{2a+b}(\gamma)\, x_{3a+b}(\delta-3\gamma)\, x_{3a+2b}(\epsilon)\\
&= x_a(1)\, x_b(\alpha)\, [x_b(\alpha), x_a(1)]\, x_{a+b}(\beta)\, x_{2a+b}(-2\beta)\, x_{3a+b}(3\beta)\times\\
&\quad x_{3a+2b}(-3\beta^2)\, x_{2a+b}(\gamma),\ x_{3a+b}(\delta-3\gamma)\, x_{3a+2b}(\epsilon)\\
&= x_a(1) x_b(\alpha)\, x_{a+b}(-\alpha)\, x_{2a+b}(\alpha)\, x_{3a+b}(-\alpha)\, x_{3a+2b}(-\alpha^2)\, x_{a+b}(\beta)\times\\
&\quad x_{2a+b}(\gamma-2\beta)\, x_{3a+b}(\delta+3\beta-3\gamma)\, x_{3a+2b}(\epsilon-3\beta^2)\\
&= x_a(1)\, x_{a+b}(\beta-\alpha)\, x_{2a+b}(\gamma+\alpha-2\beta)\, x_{3a+b}(\delta-\alpha+3\beta-3\gamma)\times\\
&\quad x_{3a+2b}(\epsilon-\alpha^2-3\beta^2+3\alpha\beta).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$g\, x_a(1) = x_a(1)\, x_b(\alpha) x_{a+b}(\beta-\alpha)\times$$
$$x_{2a+b}(\gamma+\alpha-2\beta)\, x_{3a+b}(\delta-\alpha-3\beta-3\gamma)\, x_{3a+2b}(\epsilon-\alpha^2-3\beta^2+3\alpha\beta),$$

откуда следует требуемое равенство.

Аналогично,

$$\begin{aligned} g\,x_b(1) &= x_b(\alpha)\,x_{a+b}(\beta)\,x_{2a+b}(\gamma)\,x_{3a+b}(\delta)\,x_{3a+2b}(\epsilon)\,x_b(1) \\ &= x_b(\alpha)\,x_{a+b}(\beta)\,x_{2a+b}(\gamma)\,x_b(1)\,x_{3a+b}(\delta)\,[x_{3a+b}(\delta), x_b(1)]\,x_{3a+2b}(\epsilon) \\ &= x_b(\alpha)\,x_{a+b}(\beta)\,x_{2a+b}(\gamma)\,x_b(1)\,x_{3a+b}(\delta)\,x_{3a+2b}(\epsilon-\delta) \\ &= x_b(1)\,x_b(\alpha)\,x_{a+b}(\beta)\,x_{2a+b}(\gamma)\,x_{3a+b}(\delta)\,x_{3a+2b}(\epsilon-\delta). \end{aligned}$$

□

Лемма 12. *Пусть*

$$g = x_{a+b}(\alpha)\,x_{2a+b}(\beta)\,x_{3a+b}(\gamma)\,x_{3a+2b}(\delta) \in PG_2(\mathbb{Z}_p).$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство:

$$g^n = x_{a+b}(n\alpha)\,x_{2a+b}(n\beta)\,x_{3a+b}(n\gamma)\,x_{3a+2b}(n\delta + 3\tbinom{n}{2}\alpha\beta).$$

Доказательство. Индукция по n и формула (29) приложения 2.

$$\begin{aligned} g^{n+1} &= g^n g \\ &= x_{a+b}(n\alpha)\,x_{2a+b}(n\beta)\,x_{3a+b}(n\gamma)\,x_{3a+2b}(n\delta + 3\tbinom{n}{2}\alpha\beta)\times \\ &\quad x_{a+b}(\alpha)\,x_{2a+b}(\beta)\,x_{3a+b}(\gamma)\,x_{3a+2b}(\delta) \\ &= x_{a+b}((n+1)\alpha)\,x_{2a+b}((n+1)\beta)\,x_{3a+b}((n+1)\gamma)\times \\ &\quad x_{3a+2b}((n+1)\delta + 3\tbinom{n}{2}\alpha\beta + 3n\alpha\beta) \\ &= x_{a+b}((n+1)\alpha)\,x_{2a+b}((n+1)\beta)\,x_{3a+b}((n+1)\gamma)\times \\ &\quad x_{3a+2b}((n+1)\delta + 3\tbinom{n+1}{2}\alpha\beta). \end{aligned}$$

□

Лемма 13. *В группе $PG_2(\mathbb{Z}_p)$ имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &(x_a(1)\,x_b(1))^2 = x_a(2)\,x_b(2)\,x_{a+b}(-1)\,x_{2a+b}(1)\,x_{3a+b}(-1), \\ &(x_a(1)\,x_b(1))^3 = x_a(3)\,x_b(3)\,x_{a+b}(-3)\,x_{2a+b}(5)\,x_{3a+b}(-9)\,x_{3a+2b}(-4), \\ &(x_a(1)\,x_b(1))^4 = x_a(4)\,x_b(4)\,x_{a+b}(-6)\,x_{2a+b}(14)\,x_{3a+b}(-36)\,x_{3a+2b}(-31), \\ &(x_a(1)\,x_b(1))^5 = x_a(5)\,x_b(5)\,x_{a+b}(-10)\,x_{2a+b}(30)\,x_{3a+b}(-100)\,x_{3a+2b}(-127). \end{aligned}$$

Доказательство. Положим $D = x_a(1)\,x_b(1)$ и воспользуемся леммой 11.

$$\begin{aligned} (D)^2 &= x_a(1)\,x_b(1)\,x_a(1)\,x_b(1) \\ &= x_a(2)\,x_b(1)\,[x_b(1), x_a(1)]\,x_b(1) \\ &= x_a(2)\,x_b(1)\,x_{a+b}(-1)\,x_{2a+b}(1)\,x_{3a+b}(-1)\,x_{3a+2b}(-1)\,x_b(1) \\ &= x_a(2)\,x_b(2)\,x_{a+b}(-1)\,x_{2a+b}(1)\,x_{3a+b}(-1). \\ (D)^3 &= x_a(2)\,x_b(2)\,x_{a+b}(-1)\,x_{2a+b}(1)\,x_{3a+b}(-1)\,x_a(1)\,x_b(1) \\ &= x_a(3)\,x_b(2)\,x_{a+b}(-3)\,x_{2a+b}(5)\,x_{3a+b}(-9)\,x_{3a+2b}(-13)\,x_b(1) \\ &= x_a(3)\,x_b(3)\,x_{a+b}(-3)\,x_{2a+b}(5)\,x_{3a+b}(-9)\,x_{3a+2b}(-4). \\ (D)^4 &= x_a(3)\,x_b(3)\,x_{a+b}(-3)\,x_{2a+b}(5)\,x_{3a+b}(-9)\,x_{3a+2b}(-4)\,x_a(1)\,x_b(1) \\ &= x_a(4)\,x_b(3)\,x_{a+b}(-6)\,x_{2a+b}(14)\,x_{3a+b}(-36)\,x_{3a+2b}(-67)\,x_b(1) \\ &= x_a(4)\,x_b(4)\,x_{a+b}(-6)\,x_{2a+b}(14)\,x_{3a+b}(-36)\,x_{3a+2b}(-31). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D)^5 &= x_a(4)\,x_b(4)\,x_{a+b}(-6)\,x_{2a+b}(14)\,x_{3a+b}(-36)\,x_{3a+2b}(-31)\,x_a(1)\,x_b(1)\\ &= x_a(5)\,x_b(4)\,x_{a+b}(-10)\,x_{2a+b}(30)\,x_{3a+b}(-100)\,x_{3a+2b}(-227)\,x_b(1)\\ &= x_a(5)\,x_b(5)\,x_{a+b}(-10)\,x_{2a+b}(30)\,x_{3a+b}(-100)\,x_{3a+2b}(-127).\end{aligned}$$

□

Лемма 14. *В группе $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ для $i=1,\ldots,12$ имеют место равенства*

$$V_i = [x_{-3a-2b}(p),\ {}_i x_a(1)\,x_b(1)] = W_{i+1}Y_{i+2}, \qquad Y_{i+2}\in S^{(i+2)},$$

где

i	W_i	i	W_i	i	W_i	i	W_i
2	$x_{-3a-b}(p)$	5	$x_{-a}(-2p)\,x_{-b}(6p)$	8	$x_{a+b}(28p)$	11	$x_{3a+2b}(-168p)$
3	$x_{-2a-b}(p)$	6	$h_{-a}(1+2p)\,h_{-b}(1-6p)$	9	$x_{2a+b}(-56p)$	12	1
4	$x_{-a-b}(2p)$	7	$x_a(10p)\,x_b(-18p)$	10	$x_{3a+b}(168p)$	13	1

Доказательство. Случай $i=1$. Формула (44) приложения 2:

$$V_1 = [x_{-3a-2b}(p),\, x_b(1)] = x_{-3a-b}(p).$$

Случай $i=2$. Формула (40) приложения 2:

$$V_2 = [x_{-3a-b}(p),\, x_a(1)x_b(1)] \equiv [x_{-3a-b}(p),\, x_a(1)] \equiv x_{-2a-b}(p) \pmod{S^{(4)}}.$$

Случай $i=3$. Формула (39) приложения 2:

$$V_3 = [x_{-2a-b}(p)\,Y_4,\, x_a(1)x_b(1)] \equiv [x_{-2a-b}(p),\, x_a(1)] \equiv x_{-a-b}(2p) \pmod{S^{(5)}}.$$

Случай $i=4$. Формулы (13) и (18) приложения 2:

$$\begin{aligned}V_4 &= [x_{-a-b}(2p)\,Y_5,\, x_a(1)x_b(1)] \equiv\\ &\equiv [x_{-a-b}(2p),\, x_b(1)][x_{-a-b}(2p),\, x_a(1)] \equiv x_{-a}(-2p)\,x_{-b}(6p) \pmod{S^{(6)}}.\end{aligned}$$

Случай $i=5$. Соотношение 5) п 3.:

$$\begin{aligned}V_5 &= [x_{-a}(-2p)\,x_{-b}(6p)Y_6,\, x_a(1)x_b(1)] \equiv\\ &\equiv [x_{-a}(-2p), x_a(1)]\,[x_{-b}(6p), x_b(1)] \equiv h_{-a}(1+2p)\,h_{-b}(1-6p) \pmod{S^{(7)}}.\end{aligned}$$

Случай $i=6$. Соотношение 3) п 3 и таблица 2 приложения 1:

$$\begin{aligned}V_6 &= [h_{-a}(1+2p)\,h_{-b}(1-6p)Y_7,\, x_a(1)x_b(1)] \equiv\\ &\equiv [h_{-a}(1+2p)\,h_{-b}(1-6p), x_b(1)]\,[h_{-a}(1+2p)\,h_{-b}(1-6p), x_a(1)] \equiv\\ &\equiv x_a(10p)\,x_b(-18p) \pmod{S^{(8)}}.\end{aligned}$$

Случай $i=7$. Формулы (26) и (27) приложения 2:

$$\begin{aligned}V_7 &= [x_a(10p)\,x_b(-18p)Y_8,\, x_a(1)x_b(1)] \equiv\\ &\equiv [x_a(10p), x_b(1)]\,[x_b(-18p), x_a(1)] \equiv x_{a+b}(28p) \pmod{S^{(9)}}.\end{aligned}$$

Случай $i=8$. Формула (28) приложения 2:

$$\begin{aligned}V_8 &= [x_{a+b}(28p)Y_9,\, x_a(1)x_b(1)] \equiv\\ &\equiv [x_{a+b}(28p), x_a(1)] \equiv x_{2a+b}(-56p) \pmod{S^{(10)}}.\end{aligned}$$

Случай $i = 9$. Формула (29) приложения 2:

$$V_9 = [x_{2a+b}(-56p)Y_{10},\, x_a(1)x_b(1)] \equiv$$
$$\equiv [x_{2a+b}(-56p), x_a(1)] \equiv x_{3a+b}(168p) \pmod{S^{(11)}}.$$

Случай $i = 10$. Формула (30) приложения 2:

$$V_{10} = [x_{3a+b}(168p)Y_{11},\, x_a(1)x_b(1)] \equiv$$
$$\equiv [x_{3a+b}(168p), x_b(1)] \equiv x_{3a+2b}(-168p) \pmod{S^{(12)}}.$$

Случай $i = 11$. Имеем

$$V_{11} = [x_{3a+2b}(-168p)Y_{12},\, x_a(1)x_b(1)] \equiv [Y_{12},\, x_a(1)x_b(1)] \in S^{(13)}.$$

Случай $i = 12$. Очевиден. □

Лемма 15. *В группе* $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ *для* $i = 1, \ldots, 5$ *имеют место равенства*

$$U_i = [[x_{-3a-2b}(p),\, {}_{11-i}\, x_a(1)\, x_b(1)], [x_{-3a-2b}(p),\, {}_i\, x_a(1)\, x_b(1)]] = P_i Q_i,$$

где $Q_i \in S^{(14)}$, $P_1 = x_b(-168p^2)$ *и*

i	*2*	*3*	*4*	5
P_i	$x_a(168p^2)$	$x_a(-224p^2)$	$x_a(168p^2)\, x_b(168p^2)$	$x_a(-100p^2)\, x_b(-324p^2)$

Доказательство. Воспользуемся леммой 14, заметив, что $W_i \in S^{(i)}$.

Случай $i = 1$. Формула (66) приложения 2:

$$U_1 = [x_{3a+2b}(-168p)Y_{12}, x_{-3a-b}(p)Y_3] \equiv$$
$$\equiv [x_{3a+2b}(-168p), x_{-3a-b}(p)] = x_b(-168p^2) \pmod{S^{(14)}}.$$

Случай $i = 2$. Формула (60) приложения 2:

$$U_2 = [x_{3a+b}(168p)Y_{11}, x_{-2a-b}(p)Y_4] \equiv$$
$$\equiv [x_{3a+b}(168p), x_{-2a-b}(p)] \equiv x_a(168p^2) \pmod{S^{(14)}}.$$

Случай $i = 3$. Формула (52) приложения 2:

$$U_3 = [x_{2a+b}(-56p)Y_{10}, x_{-a-b}(2p)Y_5] \equiv$$
$$\equiv [x_{2a+b}(-56p), x_{-a-b}(2p)] \equiv x_a(-224p^2) \pmod{S^{(14)}}.$$

Случай $i = 4$. Формулы (45) и (47) приложения 2:

$$U_4 = [x_{a+b}(28p)Y_9, x_{-a}(-2p)x_{-b}(6p)Y_6] \equiv$$
$$\equiv [x_{a+b}(28p), x_{-a}(-2p)][x_{a+b}(28p), x_{-b}(6p)] \equiv$$
$$\equiv x_b(168p^2)x_a(168p^2) \pmod{S^{(14)}}.$$

Случай $i = 5$. Соотношения 3) п.3 и таблица 2 приложения 1:

$$U_5 = [x_a(10p)\, x_b(-18p)Y_8, h_{-a}(1+2p)h_{-b}(1-6p)Y_7] \equiv$$
$$\equiv [x_a(10p), h_{-a}(1+2p)h_{-b}(1-6p)][x_b(-18p), h_{-a}(1+2p)h_{-b}(1-6p)] \equiv$$
$$\equiv x_a(-100p^2)x_b(-324p^2) \pmod{S^{(14)}}.$$

□

Докажем теорему 3. Согласно [11], ступень нильпотентности силовской p-подгруппы $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ равна $mh-1=6m-1$, поэтому она регулярна, когда $6m-1<p$. С другой стороны, в [5] показано, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна, если $p>|G_2|+|\Pi(G_2)|=12+2=14$, то есть когда $p\geqslant 17$. Таким образом, нам остаётся исследовать случаи, когда $p\in\{2,3,5,7,11\}$.

Сначала покажем, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_p)$ не является регулярной при $p=2,3,5$. Заметим, что этих случаях $PG_2(\mathbb{Z}_p)$ совпадает с унипотентной подгруппой $UG_2(\mathbb{Z}_p)$ группы Шевалле $G_2(\mathbb{Z}_p)$. Коммутант $UG_2(\mathbb{Z}_p)$, согласно [11], содержится в подгруппе

$$H=\langle x_{a+b}(1),\ x_{2a+b}(1),\ x_{3a+b}(1),\ x_{3a+2b}(1)\rangle,$$

каждый элемент g которой единственным образом представляется в виде

$$g=x_{a+b}(\alpha)\,x_{2a+b}(\beta)\,x_{3a+b}(\gamma)\,x_{3a+2b}(\delta),\qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_p.$$

Положим $A=x_a(1)$ и $B=x_b(1)$. Очевидно, что $[\langle A,B\rangle,\langle A,B\rangle]^p\subseteq H^p$.

Случай $p=2$. По лемме 13 в $PG_2(\mathbb{Z}_2)$ имеет место равенство

$$C=B^{-2}A^{-2}\,(AB)^2=x_{a+b}(1)\,x_{2a+b}(1)\,x_{3a+b}(1).$$

Ввиду леммы 12 $H^2\subseteq x_{3a+2b}(\mathbb{Z}_p)$, поэтому $C\notin H^2$. Значит, группа $PG_2(\mathbb{Z}_2)$ нерегулярна. Поскольку она служит гомоморфным образом $PG_2(\mathbb{Z}_{2^m})$ для любого $m\geqslant 2$, то отсюда заключаем, что $PG_2(\mathbb{Z}_{2^m})$ нерегулярна при $m\geqslant 1$.

Случаи $p=3,5$. По лемме 12 в обоих случаях $H^p=1$. В тоже время, по лемме 13 $(AB)^3=A^3B^3\cdot x_{2a+b}(2)\,x_{3a+2b}(2)$ в $PG_2(\mathbb{Z}_3)$ и $(AB)^5=A^5B^5\cdot x_{3a+2b}(2)$ в $PG_2(\mathbb{Z}_5)$. Значит, группы $PG_2(\mathbb{Z}_{3^m}),PG_2(\mathbb{Z}_{5^m})$ нерегулярны при $m\geqslant 1$.

Случаи $p=7,11$. Докажем, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^2})$ не является регулярной при указанных p. Положим $A=x_a(1)x_b(1)$ и $B=x_{-3a-2b}(p)$. Элемент B содержится в конгруэнц-подгруппе $G_2(J)$, которая нормальна в $PG_2(\mathbb{Z}_{p^2})$ и является элементарной абелевой p-группой. Поэтому любой коммутатор от элементов A и B лежит в $G_2(J)$ и равен единице в степени, кратной p. Следовательно, $[\langle A,B\rangle']^p=1$. С другой стороны, любой коммутатор от A и B, имеющий более двух вхождений B, равен единице, поэтому

$$B^{-p}A^{-p}\,(AB)^p=[B,A]^{\binom{p}{2}}\dots[B,{}_{p-1}A]^{\binom{p}{p}}=[B,{}_{p-1}A].$$

По лемме 14 коммутатор $[B,{}_{p-1}A]$ равен $x_a(10p)\,x_b(-18p)Y_8\neq 1$ в $PG_2(\mathbb{Z}_{7^2})$ и равен $x_{3a+2b}(-168p)\neq 1$ в $PG_2(\mathbb{Z}_{11^2})$. Значит, группы $PG_2(\mathbb{Z}_{7^2})$, $PG_2(\mathbb{Z}_{11^2})$ не являются регулярными. Отсюда вытекает нерегулярность групп $PG_2(\mathbb{Z}_{7^m})$ и $PG_2(\mathbb{Z}_{11^m})$ при любом $m\geqslant 2$.

Случай $p=13$. Докажем, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_{13^3})$ не является регулярной. Положим $A=x_a(1)x_b(1)$ и $B=x_{-3a-2b}(p)$. Элементы A и B удовлетворяют условия 1) и 2) следствия 1. Действительно, всякий коммутатор от A и B веса больше 12 или, имеющие два вхождения B, содержится в элементарной абелевой p-группе $G_2(J^2)$, которая централизуется элементом B.

Предположим, что группа $PG_2(\mathbb{Z}_{p^3})$ регулярна. Тогда по следствию 1 найдется элемент $d\in\langle A,B\rangle'$ такой, что

$$d^p\equiv[B,{}_{12}A]\,[B,{}_{11}A,B]^{-1}\,\prod_{i=1}^{5}\,[[B,{}_{11-i}A],[B,{}_iA]]^{(-1)^{i+1}}\pmod{S^{(14)}}. \tag{25}$$

Группа $\langle A,B\rangle'$ порождается коммутаторами $y_i=[B,{}_iA]$, $i=1,2,\dots$, и $y_{ij}=[y_i,y_j]$, $i,j=1,2,\dots$, которые удовлетворяют лемме 1 и следствию 2. Причем,

$y_{ij}^p = 1$ для любых i, j, а $y_i^p = 1$, когда $i \geqslant 12$. Поэтому в силу следствия 1 можем считать, что

$$d = [B, A]^{\alpha_1} \dots [B,_{11} A]^{\alpha_{11}}$$

для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_{11}$. Элемент $[B,_i A]^p$ лежит в $S^{(i+7)}$, но не лежит в $S^{(i+8)}$ для $i = 1, \dots, 10$. Действительно, используя леммы 14 и 1, получаем

$$[B,_i A]^p = W_{i+1}^p Y_{i+2}^p [W_{i+1}, Y_{i+2}]^{\binom{p}{2}}.$$

По лемме 4 $y_{i+2}^p \in S^{(i+9)}$, $[W_{i+1}, Y_{i+2}]^{\binom{p}{2}} \in S^{(2i+9)}$, $W_{i+1}^p \in S^{(i+7)}$, но, очевидно, что $W_{i+1}^p \notin S^{(i+8)}$. Поскольку правая часть (25) содержится в $S^{(13)}$, а

$$d^p = [B, A]^{p\alpha_1} \dots [B,_{11} A]^{p\alpha_{11}},$$

то числа $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ должны быть кратны p. Поэтому можем считать, что

$$d = [B,_7 A]^{\alpha_7} \dots [B,_{11} A]^{\alpha_{11}}.$$

Наконец, $[B,_i A]^p \in S^{(14)}$ при $i \geqslant 8$, поэтому

$$d^p \equiv [B,_7 A]^{\alpha_7} \equiv x_a(10\alpha_7 p^2) x_b(-18\alpha_7 p^2) \pmod{S^{(14)}}.$$

С другой стороны, используя леммы 14 и 15, находим

$$[B,{}_{12} A]\,[B,{}_{11} A, B]^{-1} \prod_{i=1}^{5} [[B,{}_{11-i} A], [B,{}_i A]]^{(-1)^{i+1}} \equiv$$
$$\equiv 1 \cdot 1 \cdot x_b(-168p^2)\,(x_a(168p^2))^{-1}\,x_a(-224p^2)\,(x_b(168p^2) x_a(168p^2))^{-1} \times$$
$$\times\, x_a(-100p^2)\,x_b(-324p^2) \equiv x_a(-660p^2)\,x_b(-212p^2) \pmod{S^{(14)}}.$$

Легко видеть, что оба равенства $10\alpha_7 p^2 = 9p^2$ и $8\alpha_7 p^2 = 3p^2$ одновременно не удовлетворяются в кольце $\mathbb{Z}_{13^3}$ ни при каком α_7. Значит, группа $PG_2(\mathbb{Z}_{13^3})$, а вместе с ней и группы $PG_2(\mathbb{Z}_{13^m})$, $m \geqslant 3$, не являются регулярными. Теорема 3 доказана.

6. Приложение 1

Следуя [13, с.319], в трехмерном евклидовом пространстве с ортонормированной базой ε_1, ε_2, ε_3 выберем два вектора

$$a = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \qquad b = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Тогда множество векторов

$$-3a - 2b,\ -3a - b,\ -2a - b,\ -a - b,\ -a,\ -b,\ a,\ b,\ 2a + b,\ 3a + b,\ 3a + 2b$$

образуют систему корней типа G_2, а корни

$$a,\ b,\ 2a + b,\ 3a + b,\ 3a + 2b$$

— её подсистему положительных корней. Корни a и b образуют фундаментальную систему корней.

Структурные константы алгебры Ли типа G_2 указаны в следующей лемме.

Лемма 16. *Положим*

$$N_{a,b} = \epsilon_1,\ N_{a,a+b} = 2\epsilon_2,\ N_{a,2a+b} = 3\epsilon_3,\ N_{b,3a+b} = \epsilon_4$$

и пусть $\epsilon_5 = \frac{\epsilon_1\epsilon_3}{\epsilon_4}$. *Тогда ненулевые константы* $N_{r,s}$ *имеют вид, указанный в следующей таблице:*

Таблица 1.

$N_{r,s}$	$-3a-2b$	$-3a-b$	$-2a-b$	$-a-b$	$-a$	$-b$	a	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$3a+2b$
$-3a-2b$								ϵ_4	$-\epsilon_5$	ϵ_5	$-\epsilon_4$	
$-3a-b$						ϵ_4	ϵ_3			$-\epsilon_3$		$-\epsilon_4$
$-2a-b$				$-3\epsilon_5$	$3\epsilon_3$		$2\epsilon_2$		$-2\epsilon_2$		$-\epsilon_3$	ϵ_5
$-a-b$			$3\epsilon_5$		$2\epsilon_2$		$3\epsilon_1$	$-\epsilon_1$		$-2\epsilon_2$		$-\epsilon_5$
$-b$		$-\epsilon_4$			ϵ_1				$-\epsilon_1$			ϵ_4
$-a$			$-3\epsilon_3$	$-2\epsilon_2$		$-\epsilon_1$			$3\epsilon_1$	$2\epsilon_2$	ϵ_3	
a		$-\epsilon_3$	$-2\epsilon_2$	$-3\epsilon_1$				ϵ_1	$2\epsilon_2$	$3\epsilon_3$		
b	$-\epsilon_4$			ϵ_1			$-\epsilon_1$				ϵ_4	
$a+b$	ϵ_5		$2\epsilon_2$		$-3\epsilon_1$	ϵ_1	$-2\epsilon_2$			$-3\epsilon_5$		
$2a+b$	$-\epsilon_5$	ϵ_3		$2\epsilon_2$	$-2\epsilon_2$		$-3\epsilon_3$		$3\epsilon_5$			
$3a+b$	ϵ_4		ϵ_3		$-\epsilon_3$			$-\epsilon_4$				
$3a+2b$		ϵ_4	$-\epsilon_5$	ϵ_5		$-\epsilon_4$						

Доказательство. Согласно [12, теорема 4.2.2.] структурные константы простой алгебры Ли типа Φ над $\mathbb{C}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

(i) $N_{s,r} = -N_{r,s},\ r, s \in \Phi$;

(ii) $\dfrac{N_{r_1,r_2}}{(r_3,r_3)} = \dfrac{N_{r_2,r_3}}{(r_1,r_2)} = \dfrac{N_{r_3,r_1}}{(r_2,r_2)}$, если $r_1, r_2, r_3 \in \Phi$ и $r_1 + r_2 + r_3 = 0$;

(iii) $N_{r,s}N_{-r,-s} = -(p+1)^2,\ r, s, r+s \in \Phi$;

(iv) $\dfrac{N_{r_1,r_2}N_{r_3,r_4}}{(r_1+r_2, r_1+r_3)} + \dfrac{N_{r_2,r_3}N_{r_1,r_4}}{(r_2+r_3, r_2+r_3)} + \dfrac{N_{r_3,r_1}N_{r_2,r_4}}{(r_3+r_1, r_3+r_1)} = 0,$

если $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \Phi$, $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$ и среди корней r_1, r_2, r_3, r_4 нет пар противоположных.

Из равенств

$$b + (-a-b) + a = 0,\ (a+b) + (-2a-b) + a = 0,$$
$$(2a+b) + (-3a-b) + a = 0,\ (3a+b) + (-3a-2b) + b = 0$$

и п. (ii) следует, что

$$\frac{N_{b,-a-b}}{2} = \frac{N_{-a-b,a}}{6} = \frac{N_{a,b}}{2} = \frac{\epsilon_1}{2}, \quad \frac{N_{a+b,-2a-b}}{2} = \frac{N_{-2a-b,a}}{2} = \frac{N_{a,a+b}}{2} = \epsilon_2,$$
$$\frac{N_{2a+b,-3a-b}}{2} = \frac{N_{-3a-b,a}}{2} = \frac{N_{a,2a+b}}{6} = \frac{\epsilon_3}{2},$$
$$\frac{N_{3a+b,-3a-2b}}{6} = \frac{N_{-3a-2b,b}}{6} = \frac{N_{b,3a+b}}{6} = \frac{\epsilon_4}{6}.$$

Далее, из равенства

$$(a+b) + (2a+b) + (-b) + (-3a-b) = 0$$

и п. (iv) следует, что

$$\frac{N_{a+b,2a+b}N_{-b,-3a-b}}{6} + \frac{N_{-b,a+b}N_{2a+b,-3a-b}}{2} = 0,$$

откуда

$$N_{a+b,2a+b} = -3\frac{N_{-b,a+b}N_{2a+b,-3a-b}}{N_{-b,-3a-b}} = -3\frac{(-\epsilon_1)\epsilon_3}{-\epsilon_4} = -3\frac{\epsilon_1\epsilon_3}{\epsilon_4} = -3\epsilon_5.$$

Наконец, из равенства

$$(2a+b) + (-3a-2b) + (a+b) = 0$$

вытекает, что

$$\frac{N_{2a+b,-3a-2b}}{2} = \frac{N_{-3a-2b,a+b}}{2} = \frac{N_{a+b,2a+b}}{6} = -\frac{\epsilon_5}{2}.$$

Оставшиеся структурные константы $N_{r,s}$ определяются из соотношений:

$$N_{r,s} = N_{-s,-r} = -N_{s,r} = -N_{-r,-s}.$$

□

В следующей таблице приведены значения скалярного произведения (h_s, r).

Таблица 2.

$h_r \setminus s$	a	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$3a+2b$
h_a	2	-3	-1	1	3	0
h_b	-1	2	1	0	-1	1
h_{a+b}	-1	3	2	1	0	3
h_{2a+b}	1	0	1	2	3	3
h_{3a+b}	1	-1	0	1	2	1
h_{3a+2b}	0	1	1	1	1	2

7. Приложение 2

Коммутаторные формулы Шевалле для типа G_2

Пусть Φ — приведённая неразложимая система корней, K — поле или ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Согласно [12, теорема 5.2.2] коммутатор

$$[x_s(u), x_r(t)] = x_s(u)^{-1} x_r(t)^{-1} x_s(u) x_r(t),$$

где $r, s \in \Phi$ и $u, t \in K$, равен единице, если $r+s \notin \Phi$ и $r \neq -s$, и раскладывается в произведение корневых элементов по формуле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{\substack{ir+js\in\Phi,\\ i,j>0}} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j),$$

если $r+s \in \Phi$. Сомножители произведения расположены в соответствии с возрастанием суммы $i+j$, а константы $C_{ij,rs}$ являются целыми числами и определяются из формул [12, теорема 5.2.2]:

$$C_{i1,rs} = M_{r,s,i},\ C_{1j,rs} = (-1)^j M_{s,r,j},\ C_{32,rs} = \frac{1}{3} M_{r+s,r,2},\ C_{23,rs} = -\frac{2}{3} M_{s+r,s,2}.$$

В свою очередь, числа $M_{r,s,i}$ выражаются через структурные константы $N_{r,s}$ соответствующей алгебры Ли по формуле [12, с. 61]

$$M_{r,s,i} = \frac{1}{i!} N_{r,s} N_{r,r+s} \ldots N_{r,(i-1)r+s},$$

Список формул.

Положительные корни

(26) $[x_b(u), x_a(t)] =$

$$= x_{a+b}(-\epsilon_1 tu)\, x_{2a+b}(\epsilon_1\epsilon_2 t^2 u)\, x_{3a+b}(-\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 t^3 u)\, x_{3a+2b}(-\epsilon_2\epsilon_5 t^3 u^2),$$

$$[x_a(u), x_b(t)] = \\ = x_{a+b}(\epsilon_1 tu)\, x_{2a+b}(-\epsilon_1\epsilon_2 tu^2)\, x_{3a+b}(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 tu^3)\, x_{3a+2b}(-2\epsilon_2\epsilon_5 t^2u^3), \tag{27}$$

$$[x_{a+b}(u), x_a(t)] = x_{2a+b}(-2\epsilon_2 tu)\, x_{3a+b}(3\epsilon_2\epsilon_3 t^2u)\, x_{3a+2b}(-3\epsilon_2\epsilon_5 tu^2), \tag{28}$$

$$[x_{2a+b}(u), x_a(t)] = x_{3a+b}(-3\epsilon_3 tu), \tag{29}$$

$$[x_{3a+b}(u), x_b(t)] = x_{3a+2b}(-\epsilon_4 tu), \tag{30}$$

$$[x_{2a+b}(u), x_{a+b}(t)] = x_{3a+2b}(3\epsilon_5 tu), \tag{31}$$

Отрицательные корни

$$[x_{-b}(u), x_{-a}(t)] = \\ = x_{-a-b}(\epsilon_1 tu)\, x_{-2a-b}(\epsilon_1\epsilon_2 t^2u)\, x_{-3a-b}(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 t^3u)\, x_{-3a-2b}(-\epsilon_2\epsilon_5 t^3u^2), \tag{32}$$

$$[x_{-a}(u), x_{-b}(t)] = \\ = x_{-a-b}(-\epsilon_1 tu)\, x_{-2a-b}(-\epsilon_1\epsilon_2 tu^2)\, x_{-3a-b}(-\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 tu^3), \tag{33}$$

$$[x_{-a-b}(u), x_{-a}(t)] = x_{-2a-b}(2\epsilon_2 tu)\, x_{-3a-b}(3\epsilon_2\epsilon_3 t^2u)\, x_{-3a-2b}(-3\epsilon_2\epsilon_5 tu^2), \tag{34}$$

$$[x_{-2a-b}(u), x_{-a}(t)] = x_{-3a-b}(3\epsilon_3 tu), \tag{35}$$

$$[x_{-3a-b}(u), x_{-b}(t)] = x_{-3a-2b}(\epsilon_4 tu), \tag{36}$$

$$[x_{-2a-b}(u), x_{-a-b}(t)] = x_{-3a-2b}(-3\epsilon_5 tu), \tag{37}$$

Смешанные корни

$$[x_{-a-b}(u), x_a(t)] = x_{-b}(3\epsilon_1 tu), \tag{38}$$

$$[x_{-2a-b}(u), x_a(t)] = x_{-a-b}(2\epsilon_2 tu)\, x_{-b}(3\epsilon_1\epsilon_2 t^2u)\, x_{-3a-2b}(3\epsilon_2\epsilon_5 tu^2), \tag{39}$$

$$[x_{-3a-b}(u), x_a(t)] = \\ = x_{-2a-b}(\epsilon_3 tu)\, x_{-a-b}(\epsilon_2\epsilon_3 t^2u)\, x_{-b}(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 t^3u)\, x_{-3a-2b}(\epsilon_2\epsilon_5 t^3u^2), \tag{40}$$

$$[x_a(u), x_{-3a-b}(t)] = \\ = x_{-2a-b}(-\epsilon_3 tu)\, x_{-a-b}(-\epsilon_2\epsilon_3 tu^2)\, x_{-b}(-\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 tu^3)\, x_{-3a-2b}(2\epsilon_2\epsilon_5 t^2u^3), \tag{41}$$

$$[x_b(u), x_{-a-b}(t)] = \\ = x_{-a}(\epsilon_1 tu)\, x_{-2a-b}(-\epsilon_1\epsilon_2 t^2u)\, x_{-3a-2b}(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 t^3u)\, x_{-3a-b}(-\epsilon_2\epsilon_3 t^3u^2), \tag{42}$$

$$[x_{-a-b}(u), x_b(t)] = \\ = x_{-a}(-\epsilon_1 tu)\, x_{-2a-b}(\epsilon_1\epsilon_2 tu^2)\, x_{-3a-2b}(-\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 tu^3)\, x_{-3a-b}(-2\epsilon_2\epsilon_3 t^2u^3), \tag{43}$$

$$[x_{-3a-2b}(u), x_b(t)] = x_{-3a-b}(\epsilon_4 tu), \tag{44}$$

$$[x_{-a}(u), x_{a+b}(t)] = x_b(3\epsilon_1 tu), \tag{45}$$

$$(46)\quad [x_{-b}(u), x_{a+b}(t)] = \\ = x_a(-\epsilon_1 tu)\, x_{2a+b}(-\epsilon_1\epsilon_2 t^2 u)\, x_{3a+2b}(-\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 t^3 u)\, x_{3a+b}(-\epsilon_2\epsilon_3 t^3 u^2),$$

$$(47)\quad [x_{a+b}(u), x_{-b}(t)] = \\ = x_a(\epsilon_1 tu)\, x_{2a+b}(\epsilon_1\epsilon_2 tu^2)\, x_{3a+2b}(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 tu^3)\, x_{3a+b}(-2\epsilon_2\epsilon_3 t^2 u^3),$$

$$(48)\quad [x_{-2a-b}(u), x_{a+b}(t)] = x_{-a}(-2\epsilon_2 tu)\, x_b(-3\epsilon_1\epsilon_2 t^2 u)\, x_{-3a-b}(3\epsilon_2\epsilon_3 tu^2),$$

$$(49)\quad [x_{-3a-2b}(u), x_{a+b}(t)] = \\ = x_{-2a-b}(-\epsilon_5 tu)\, x_{-a}(\epsilon_2\epsilon_5 t^2 u)\, x_b(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 t^3 u)\, x_{3a+b}(\epsilon_2\epsilon_3 t^3 u^2),$$

$$(50)\quad [x_{a+b}(u), x_{-3a-2b}(t)] = \\ = x_{-2a-b}(\epsilon_5 tu)\, x_{-a}(-\epsilon_2\epsilon_5 tu^2)\, x_b(-\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 tu^3)\, x_{3a+b}(2\epsilon_2\epsilon_3 t^2 u^3),$$

$$(51)\quad [x_{-a}(u), x_{2a+b}(t)] = x_{a+b}(2\epsilon_2 tu)\, x_{3a+2b}(-3\epsilon_2\epsilon_5 t^2 u)\, x_b(-3\epsilon_1\epsilon_2 tu^2),$$

$$(52)\quad [x_{-a-b}(u), x_{2a+b}(t)] = x_a(-2\epsilon_2 tu)\, x_{3a+b}(-3\epsilon_2\epsilon_3 t^2 u)\, x_{-b}(3\epsilon_1\epsilon_2 tu^2),$$

$$(53)\quad [x_{-3a-b}(u), x_{2a+b}(t)] = \\ = x_{-a}(-\epsilon_3 tu)\, x_{a+b}(-\epsilon_2\epsilon_3 t^2 u)\, x_{3a+2b}(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 t^3 u)\, x_b(-\epsilon_1\epsilon_2 t^3 u^2),$$

$$(54)\quad [x_{2a+b}(u), x_{-3a-b}(t)] = \\ = x_{-a}(\epsilon_3 tu)\, x_{a+b}(\epsilon_2\epsilon_3 tu^2)\, x_{3a+2b}(-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_5 tu^3)\, x_b(-2\epsilon_1\epsilon_2 t^2 u^3),$$

$$(55)\quad [x_{-3a-2b}(u), x_{2a+b}(t)] = \\ = x_{-a-b}(\epsilon_5 tu)\, x_a(-\epsilon_2\epsilon_5 t^2 u)\, x_{3a+b}(-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_5 t^3 u)\, x_{-b}(\epsilon_1\epsilon_2 t^3 u^2),$$

$$(56)\quad [x_{2a+b}(u), x_{-3a-2b}(t)] = \\ = x_{-a-b}(-\epsilon_5 tu)\, x_a(\epsilon_2\epsilon_5 tu^2)\, x_{3a+b}(\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_5 tu^3)\, x_{-b}(2\epsilon_1\epsilon_2 t^2 u^3),$$

$$(57)\quad [x_{-a}(u), x_{3a+b}(t)] = \\ = x_{2a+b}(\epsilon_3 tu)\, x_{a+b}(-\epsilon_2\epsilon_3 tu^2)\, x_b(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 tu^3)\, x_{3a+2b}(2\epsilon_2\epsilon_5 t^2 u^3),$$

$$(58)\quad [x_{3a+b}(u), x_{-a}(t)] = \\ = x_{2a+b}(-\epsilon_3 tu)\, x_{a+b}(\epsilon_2\epsilon_3 t^2 u)\, x_b(-\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 t^3 u)\, x_{3a+2b}(\epsilon_2\epsilon_5 t^3 u^2),$$

$$(59)\quad [x_{-2a-b}(u), x_{3a+b}(t)] = \\ = x_a(-\epsilon_3 tu)\, x_{-a-b}(\epsilon_2\epsilon_3 tu^2)\, x_{-3a-2b}(\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_5 tu^3)\, x_{-b}(-2\epsilon_1\epsilon_2 t^2 u^3),$$

$$(60)\quad [x_{3a+b}(u), x_{-2a-b}(t)] = \\ = x_a(\epsilon_3 tu)\, x_{-a-b}(-\epsilon_2\epsilon_3 t^2 u)\, x_{-3a-2b}(-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_5 t^3 u)\, x_{-b}(-\epsilon_1\epsilon_2 t^3 u^2),$$

$$(61)\quad [x_{-3a-2b}(u), x_{3a+b}(t)] = x_{-b}(-\epsilon_4 tu),$$

$$[x_{-a-b}(u), x_{3a+2b}(t)] = \\ = x_{2a+b}(-\epsilon_5 tu)\, x_a(-\epsilon_2\epsilon_5 tu^2)\, x_{-b}(\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 tu^3)\, x_{3a+b}(2\epsilon_2\epsilon_3 t^2u^3), \tag{62}$$

$$[x_{3a+2b}(u), x_{-a-b}(t)] = \\ = x_{2a+b}(\epsilon_5 tu)\, x_a(\epsilon_2\epsilon_5 t^2u)\, x_{-b}(-\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_5 t^3u)\, x_{3a+b}(\epsilon_2\epsilon_3 t^3u^2), \tag{63}$$

$$[x_{-2a-b}(u), x_{3a+2b}(t)] = \\ = x_{a+b}(\epsilon_5 tu)\, x_{-a}(\epsilon_2\epsilon_5 tu^2)\, x_{-3a-b}(-\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_5 tu^3)\, x_b(2\epsilon_1\epsilon_2 t^2u^3), \tag{64}$$

$$[x_{3a+2b}(u), x_{-2a-b}(t)] = \\ = x_{a+b}(-\epsilon_5 tu)\, x_{-a}(-\epsilon_2\epsilon_5 t^2u)\, x_{-3a-b}(\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_5 t^3u)\, x_b(\epsilon_1\epsilon_2 t^3u^2), \tag{65}$$

$$[x_{-3a-b}(u), x_{3a+2b}(t)] = x_{a+b}(-\epsilon_4 tu). \tag{66}$$

References

[1] V.D. Mazurov, E.I. Huhro, *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, 16-e izdanie, Novosibirsk, 2006

[2] Yu.I. Merzlyakov, *Central series and series of commutators of matrix groups*, Algebra i logika, **3**:4 (1964), 49–58.

[3] A.V. Yagzhev, *Regularity of Sylow p-subgroups of general linear groups over residue rings*, Matem. zametki, **56**:6 (1994), 106–116.

[4] S.G. Kolesnikov, *Regularity of Sylow p-subgroups of groups $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$*, Issl. po matem. analizu i algebre, **3** (2001), 117–124.

[5] S.G. Kolesnikov, *Regularity of Sylow p-subgroups of Chevalley groups over the ring $\mathbb{Z}_{p^m}$*, Sib. matem. zhurnal, **46**:6 (2006), 1289–1295.

[6] S.G. Kolesnikov, V.M. Leontiev, G.P. Egorychev, *Two collection formulas*, J. Group Theory, **23**:4 (2020), 607–628.

[7] S.G. Kolesnikov, *On the necessary conditions for regularity a Sylow p-subgroup of the group $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$*, Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika, **6**:2 (2013), 18–25.

[8] M. Hall, *Theory of groups*, Inostrannaya literatura, 1962.

[9] P. Hall, *A contribution to the theory of groups of prime-power order*, Proc. Lond. Math. Soc. **36** (1934), 29–95.

[10] V.M. Leontiev, *On Divisibility of Some Sums of Binomial Coefficients Arising From Collection Formulas*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **11**:5 (2018), 603–614.

[11] V.M. Levchuk, *Commutator structure of some subgroups of Chevalley groups*, Ukr. matem. zhurnal, **44**:6 (1992), 786–795.

[12] *Carter.R.* Simple groups of Lie type.-Ney York: Wiley and Sons, 1972. 458c.

[13] N. Burbaki, *Lie groups and algebras*, Mir, 1972.

Sergey Gennadievich Kolesnikov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyrsk, Russia
E-mail address: sklsnkv@mail.ru

Vladimir Markovich Leontiev
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyrsk, Russia
E-mail address: v.m.leontiev@outlook.com