S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том ??, стр. ?–? (202?) УДК 512.54

MSC 05C25

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ TI-ПОДГРУППЫ ПОРЯДКА 4 В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

Н. Д. Зюляркина, Т. Г. Ножкина

Abstract. We study linear groups for the presence of elementary Abelian TI-subgroups of order 4. It is proved that if $G = XA$, $X = F^*(G)$ be a quasisimple group, A an elementary abelian TI–subgroup of order 4, then X is not a covering group for $L_n(q)$, where q is odd.
Keywords: finite group, elementary Abelian TI-subgroup, centralizers of involutions and semi-involutions.

1. Введение

Многие задачи теории конечных групп связаны с описанием классов групп, содержащих подгруппы с рядом определённых свойств. В частности, большой интерес представляют так называемые плотно вложенные подгруппы и TI-подгруппы.

Подгруппа H конечной группы G называется плотно вложенной в G, если $|H|$ чётен, а $|H \cap H^g|$ нечётен для любого $g \in G - N_G(H)$.

Подгруппа A группы G называется TI-подгруппой, если $A \cap A^g = 1$ для любого $g \in G - N_G(A)$.

Заметим, что плотно вложенная 2-группа является TI-подгруппой.

Исследование плотно вложенных подгрупп началось с работы М. Судзуки [8], где были описаны группы, в которых силовская 2-подгруппа является TI-подгруппой. Следующий важный результат в этом направлении был получен Н. Бендером, который в [2] описал группы с сильно вложенной подгруппой. М. Ашбахером в [1] изучались плотно вложенные подгруппы корневого типа. При этом остались неисследованными случаи, когда силовская 2-подгруппа этой группы элементарная абелева или содержит единственную инволюцию. Ввиду того, что в известных простых группах, содержащих плотно вложенную подгруппу, эта подгруппа оказывается в большинстве случаев 2-группой,

Zyulyarkina, N.D., Nozhkina, T.G.,

особый интерес представляет изучение групп, содержащих 2-подгруппу, являющуюся TI-подгруппой. Описанию таких групп посвящены многие работы Ф.Тиммесфельда и его соавторов [5], [9], [10].

А.А. Махневым в [6] был изучен случай плотно вложенной подгруппы корневого типа с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой A при условии, что слабое замыкание инволюции из A в силовской 2-подгруппе является абелевой группой. Там же показано, что при изучении плотно вложенных подгрупп с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой можно ограничиться случаем, когда эта подгруппа циклическая порядка 4. Им же в [7] был получен следующий результат для TI-подгрупп:

Теорема 1. *Пусть 2-группа A является TI-подгруппой конечной группы G и $G_0 = \langle A^G \rangle$. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

(1) *A является циклической или элементарной абелевой группой.*
(2) *$[A, A^g] = 1$ для любого $g \in G - N(A)$.*
(3) *$\langle A^{G_0} \rangle \cong L_2(2^n), Sz(2^n), U_3(2^n)$ или $SU_3(2^n)$, A является силовской 2-подгруппой в $\langle A^{G_0} \rangle$.*
(4) *A содержит подгруппу A_0 индекса 2, которая инвертируется элементом x из $A - A_0$, $V = \langle A_0^G \rangle$ является абелевой группой и $\overline{G}_0 = G_0/V$ порождается множеством нечётных транспозиций $\bar{x}^G$.*
(5) *$A \cong Q_8 \times E_{2^n}$ или A абелева группа порядка 4, группа $\left\langle \Omega(A)^G \right\rangle$ элементарная, и, для множества D элементов из G сопряжённых с элементами из $A - V$, $\bar{D}$ является множеством корневых инволюций в $\overline{G}_0 = G/V$.*
(6) *$A \cong Z_4 \times Z_4$ и $\langle A^{G_0} \rangle \cong L_3(4)$ или $SL_3(4)$.*
(7) *$A \cong Q_8$ и $\langle A^{G_0} \rangle \cong G_2(2), G_2(3), M_{10}, M_{11}, M_{12}$ или $\langle A^{G_0} \rangle$ является гомоморфным образом универсальной группы Шевалле G^* над полем из трёх элементов, и A есть образ $O^{2'}(K)$, где K является фундаментальной подгруппой G^*, представленной длинными корнями; $\langle A^{G_0} \rangle = G^*$, если G^* - ортогональная группа размерности не меньшей, чем 4.*

Из этой теоремы следует, что наименее иссследованы случаи, когда эта подгруппа элементарная абелева или цициклическая. В дальнейшем циклический случай исследовался А.А. Махнёвым и Н.Д. Зюляркиной в работах [11], [12], [13]. В частности, в [11] было показано, что циклическая TI-подгруппа нормализует любую компоненту (если таковые имеются).

В данной работе авторы исследуют линейные группы на предмет наличия в них элементарных абелевых TI-подгрупп порядка 4. Основной результат:

Теорема 2. *Пусть $G = XA$, $X = F^*(G)$ квазипростая группа, A элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4. Тогда X не является накрывающей группой для $L_n(q)$, где q нечётно.*

2. Предварительные результаты

В дальнейшем будем считать, что $A \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{e, a_0, b_0, a_0 b_0\}$ – TI-подгруппа конечной группы G.

Лемма 1. *Пусть x элемент нечётного порядка из $C_G(a_0)$. Тогда $x \in C_G(A)$.*

Доказательство. Пусть $|x| = 2n+1$. Так как A являетя TI-подгруппой группы G, то $x \in N_G(A)$. Если $x \notin C_G(A)$, то $a_0^x = a_0, b_0^x = a_0b_0, (a_0b_0)^x = b_0$. Тогда

$$b_0 = b_0^{x^{2n+1}} = \left(b_0^{x^{2n}}\right)^x = b_0^x = a_0b_0.$$

Из полученного противоречия, следует, что $x \in C_G(A)$.

Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что если конечная группа G содержит элементарную абелеву TI-подгруппу A порядка 4, то A нормализует любую компоненту из G, если таковые имеются.

Лемма 2. *Пусть A элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4 конечной группы G, L компонента из G, тогда $A \leq N_G(L)$.*

Доказательство. Так как A является TI-подгруппой, то A нормальна в централизаторе любого не единичного элемента из A.
Действительно, пусть $x \in C_G(a)$. Тогда для $a \in A, a \neq e$, имеем $a = a^x \in A^x \cap A$, следовательно, $A^x = A$ и $A \trianglelefteq C_G(a)$.

Пусть G контрпример наименьшего порядка к лемме.

Тогда $\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0b_0} \leq G$ и $G = \left\langle L^A \right\rangle \cdot A$.

Случай 1. $\left\langle L^A \right\rangle = L \times L^{a_0} \times L^{b_0} \times L^{a_0b_0}$.

Введём следующие обозначения: $L = L_1$, $\quad L^{a_0} = L_2$, $\quad L^{b_0} = L_3$, $\quad L^{a_0b_0} = L_4$, $H_{1,2} = \{ll^{a_0} \,|l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}$, $H_{3,4} = \left\{l^{b_0}l^{a_0b_0} \,\middle|l^{b_0} \in L_3, l^{a_0b_0} \in L_4\right\}$. Для диагонали $H_{1,2} = \{ll^{a_0} \,|l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}$ выполняется равенство $(ll^{a_0})^{a_0} = l^{a_0}l = ll^{a_0}$, поэтому $H_{1,2} \leq N_G(A)$. Так как $H_{1,2}$ порождается элементами нечётного порядка, то, по лемме 1, получим, что $H_{1,2} \leq C_G(A)$ и $H_{1,2}^{b_0} = H_{3,4}$. Тогда $H_{1,2} = H_{3,4}$ и $G = (L_1L_2) \cdot A$.

Допустим $L_1 \neq L_2$ и $L_1L_2 = L_1 \times L_2$. Заметим, что $ll^{a_0} \in C_G(A)$. Не нарушая общности, можно считать, что a_0 и b_0 переставляют компоненты L_1 и L_2, а (a_0b_0) их нормализует. То есть, для любого $l \in L_1$ будем иметь $l^{a_0b_0} \in L_1$ и для любого $l^{a_0} \in L_2$ будем иметь $(l^{a_0})^{a_0b_0} \in L_2$.

Обозначим $l^{a_0b_0} = l_1 \in L_1$, $\quad (l^{a_0})^{a_0b_0} = l_2 \in L_2$. Тогда $(ll^{a_0})^{a_0b_0} = ll^{a_0} = l^{a_0b_0}(l^{a_0})^{a_0b_0} = l_1l_2$, следовательно, $l = l_1$, $\quad l^{a_0} = l_2$, $a_0b_0 \in C_G(L_1)$ и $L_1 \leq N_G(A)$. Элементы нечётного порядка, по лемме 1, централизуют A, следовательно, $L_1 = L_2$, $G = L_1 \cdot A$ и $A \leq N_G(L_1)$.

Случай 2.$\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0b_0} = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4$ – центральное произведение. Как в случае прямого произведения, получим, что $H_{1,2} = \{ll^{a_0}|\ l \in L_1,\ l^{a_0} \in L_2\}$ централизует A. Из чего также следует, что $H_{1,2} = H_{3,4}$ и $G = (L_1L_2) \cdot A$.
Допустим, что $L_1 \neq L_2$. Как было показано выше, $ll^{a_0} \in C_G(A)$, то есть, диагональ централизует любой элемент $x \in A$. Так как $A \nleq C_G(L_1)$, то для любого простого p, делящего $|L_1|$, и для любого $x \in A, x \neq e$, существует p-элемент h, такой, что $h \notin C_G(x)$. Для него, с одной стороны, $(hh^{a_0})^x = hh^{a_0}$, а с другой, $(hh^{a_0})^x = h^x (h^{a_0})^x$. Отсюда $hh^{a_0} = h^x (h^{a_0})^x$. Так как произведение $L_1 \cdot L_2$ центральное, то $\left\{ \begin{array}{c} h^x = hz \\ (h^{a_0})^x = z^{-1}h^{a_0} \end{array} \right.$. Следовательно, z является не единичным p-элементом из центра. Таким образом, порядок центра делится на p. Тогда, в силу выбора p, порядок центра делится на все простые делители $|L_1|$. Центры квазипростых групп и их порядки полностью описаны в [3] и таких групп нет. Следовательно, $L_1 = L_2$, $G = L_1 \cdot A$ и $A \leq N_G(L_1)$.

Лемма доказана.

Лемма 2 показывает, что при исследовании групп, содержащих компоненты, вопрос сводится к изучению групп вида $G = F^*(G) \cdot A$, где $F^*(G)$ квазипростая группа.

3. Линейные группы

Ввиду того, что классические группы Шевалле можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств, нам понадобятся сведения об инволюциях и полуинволюциях в таких группах.

Пусть V векторное пространство размерности n над полем $k = GF\left(q\right)$, q нечетно, $\tilde{Y} = GL_n\left(k\right)$ и $Y \le \tilde{Y}$. Обозначим через Iv тождественный автоморфизм пространства V, а через $\gamma Iv \quad (\gamma \in k^*)$ автоморфизм, при котором каждый вектор из V умножается на γ. Неединичные элементы ω из Y, для которых $\omega^2 = \gamma Iv$, называются полуинволюциями. Ясно, что инволюции из Y – это полуинволюции. Полуинволюции, не являющиеся инволюциями, называются истинными.

Как показано в разделе 3A из [4], каждой инволюции $\omega \in Y$ соответствуют два подпространства V_ω^+ и V_ω^-из V:

$$V_\omega^+ = {}_V\left(\omega\right) = \left\{v \in V \mid \omega\left(v\right) = v\right\}, V_\omega^- = \left[V, \omega\right] = \left\{v \in V | \omega\left(v\right) = -v\right\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_\omega^+ \bigoplus V_\omega^-$, и тип инволюции ω определяется как $\dim V_\omega^-$. Для инволюции ω типа m базис в V называется стандартным, если в нем первые $n - m$ векторов выбраны из V_ω^+, а последние m векторов из V_ω^-.

Пусть теперь $\omega \in Y$ истинная полуинволюция и $\omega^2 = \gamma Iv$. Если $\gamma = \beta^2$ для некоторого элемента β из k, то $\omega = \beta Iv\omega_1$, где ω_1 инволюция из $\tilde{Y}$. Определим в этом случае тип ω как минимум из типов двух инволюций ω_1 и $-Iv\omega_1$. Стандартный базис для ω определяется как стандартный базис той из инволюций ω_1 или $-Iv\omega_1$, тип которой минимален. Если $\gamma \notin \left(k^*\right)^2$, то тип для ω считается равным 0.

Через X^* обозначим множество таких расширений группы X, что для любой группы $\tilde{X}$ из X^* любой элемент из $\tilde{X} - X$ индуцирует на X внешний внутреннедиагональный автоморфизм.

Разобьём доказательство теоремы 2 на четыре леммы.

Пусть G – контрпример к теореме, $G = XA$, $X = F^*\left(G\right)$ частное $SL_n(q)$, $n \ge 2$, q нечётно.

Лемма 3. *Случай $G \in X^*$ при $n \ge 3$ невозможен.*

Доказательство.

Допустим, что существует элементарная абелева TI-подгруппа $A \le G$. Тогда $A \trianglelefteq C_G(a)$ для любого $a \in A$, $a \ne e$. Классы сопряжённых инволюций в частном $SL_n\left(q\right)$ описаны в [4]. Возможны два случая:

(1) a_0 соответствует инволюции u типа m,

(2) a_0 соответствует полуинволюции u типа 0.

Случай 1.

Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m, которая в стандартном базисе имеет вид: $u\left(e_i\right) = e_i$ при $1 \le i \le n - m$, $u\left(e_i\right) = -e_i$ при $n - m + 1 \le i \le n$. Если

$m \neq \frac{n}{2}$ или частное берётся по центральной подгруппе нечётного порядка, то

$$\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2} \leq C_{GL_n(q)}(a_0),$$

L_1 и L_2 нормальные подгруппы в централизаторе инволюции a_0. Если $m > 2$ и $n - m > 2$, $q \neq 3$, то L_1 и L_2 компоненты. Так как $A \trianglelefteq C_G(a_0)$, то A централизует L_1 и L_2. Таким образом, $a_0 \in C_{GL_n(q)}(L_1)$ и $a_0 \in C_{GL_n(q)}(L_2)$. Следовательно, a_0 в стандартном базисе имеет вид: $a_0(e_i) = \alpha e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $a_0(e_i) = -\alpha e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Аналогично, так как $b_0 \in C_{GL_n(q)}(L_1)$ и $b_0 \in C_{GL_n(q)}(L_2)$, то b_0 в стандартном базисе имеет вид: $b_0(e_i) = \gamma e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $b_0(e_i) = -\gamma e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Тогда $a_0 b_0 \in Z(G)$ и $A \trianglelefteq C_G(a_0 b_0) = G$. Но $Z(G)$ циклический и не содержит элементарных абелевых подгрупп.

Пусть теперь $m = \frac{n}{2}$, $X = SL_n(q)/Z_1$, порядок Z_1 чётен.
По разделу 3A из [4] полный прообраз $C_{GL_n(q)/Z_1}(a_0)$ в $GL_n(q)$ при естественном гомоморфизме содержит подгруппу:

$$(\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2}) \cdot \langle \tau \rangle .$$

Если $m > 2$ и $q \neq 3$, то L_1 и L_2 компоненты. Инволюция τ, которая в стандартном базисе имеет вид: $\tau(e_i) = e_{m+i}$, $\quad \tau(e_{m+i}) = e_i$ при $1 \leq i \leq m$, переставляет L_1 и L_2. Подгруппа $A \trianglelefteq C_G(a_0)$ централизует L_1 и L_2. Повторяя рассуждения, аналогичные случаю $m \neq \frac{n}{2}$, также получим, что A подгруппа центра G, что невозможно.

Если $m = 1$ или $n - m = 1$, то данная ситуация разбирается аналогично.

При $m = 2$ и $q = 3$ в централизаторе инволюции содержится нормальная подгруппа, изоморфная $SL_2(3)$. В этом случае, по лемме 1, она централизуется подгруппой A, так как порождается элементами нечётного порядка.

Случай 2. Пусть a_0 соответствует полуинволюции u типа 0 из $GL_n(q)$. Тогда $u^2 = \gamma I_V$ для некоторого $\gamma \in k^* - (k^*)^2$, $n = 2m$. В данном случае $U = \langle Z, u \rangle$ – циклическая и $C_G(U) = C_G(u) \cong GL_m(q^2)$. Тогда из [4] следует, что существует элемент $x \in GL_n(q) = G$, имеющий в стандартном базисе вид: $x(e_i) = e_{m+i}$, $\quad x(e_{m+i}) = -e_i$ при $1 \leq i \leq m$, $\quad det(x) = (-1)^m$, $\quad |x| = 2$, $\quad u^x = -u$, такой, что

$$C_{GL_n(q)/Z}(u) = \left(GL_m(q^2)/Z\right) \cdot \langle x \rangle ,$$

где x индуцирует полевой автоморфизм порядка 2 на $GL_m(q^2)/Z$. Тогда в централизаторе инволюции a_0 есть компонента $L \cong SL_m(q^2)$. Подгруппа A централизует L, что невозможно, так как $C_X(L)$ циклический.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Случай $G \in X^*$ при $n = 2$, $q \geq 5$ невозможен.*

Доказательство.

(1) Допустим $A = \{e, a_0, b_0, a_0 b_0\}$ является TI-подгруппой группы G и $G \in X^*$, $G = GL_2(q), q \geq 5$. Все инволюции из A соответствуют инволюциям типа 1 из $GL_2(q)$. Тогда можно считать, что

$a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и $a_0 b_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Z(G)$. То есть $A \trianglelefteq C_G(a_0 b_0) = Z(G)$. Противоречие.

(2) В A есть элемент, соответствующий полуинволюции типа 0. Рассмотрим $G = GL_2(q)/Z_1$, где $|Z_1|$ чётен.
Пусть $a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \gamma \notin k^2, \quad q \geq 5$, тогда

$$b_0 \in C_G(a_0) = \left\{ e, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma\beta & -\alpha \end{pmatrix} \right\},$$

$\alpha, \beta, \gamma \in F_q$.
Непосредственный подсчёт показывает, что
$b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a_0 b_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ (или наоборот).
Пусть $s_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix} \in C_{GL_2(q)/Z_1}(a_0)$, тогда

$$b_0^{s_1} = \frac{1}{\alpha^2 - \gamma\beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma\beta^2 & 2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta\gamma & -\alpha^2 - \gamma\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Например, при $\alpha = 1, \beta = 2 \quad b_0^{s_1} \notin A$. То есть $A \ntrianglelefteq C_G(a_0)$ и, следовательно, A не является TI-подгруппой в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Случай $G \notin X^*$ при $n \geq 3$ невозможен.*

Доказательство.
Обозначим через φ полевой автоморфизм порядка 2, τ – инверсно-транспонирующий автоморфизм. Как показано в лемме 4.27 [4], все автоморфизмы порядка 2 вида $g\varphi$, где g индуцирует внутренний диагональный автоморфизм, сопряжены в G с полевым автоморфизмом φ порядка 2, а все автоморфизмы порядка 2 вида $g\varphi\tau$ сопряжены с $\varphi\tau$, достаточно рассмотреть следующие варианты:

(1) Если $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда из [4] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L, изоморфную частному $SL_n(q_0)$, где $q = q_0^2$. Согласно лемме 2 подгруппа A централизует L, то есть $A \leq C_G(L) = Z(L)\langle\varphi\rangle$, где $Z(L)$ циклический. Пусть $b_0 \in Z(L)$, тогда $C_G(b_0) = XA$ и $b_0 \in Z(G)$, следовательно, A не является TI-подгруппой в G.

(2) Если $a_0 = \varphi\tau$ графово-полевой автоморфизм порядка 2, тогда по лемме 4.27 из [4] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L, изоморфную $SU_n(q_0)$, где $q = q_0^2$ и, аналогично пункту 1, A не является TI-подгруппой.

(3) Если подгруппа A имеет вид $A = \{e; g; g_1\tau, gg_1\tau\}$, g соответствует инволюции или полуинволюции из $GL_n(q)$ и $q \geq 5$, то возможны два случая.

Случай 1. Элемент g соответствует инволюции типа m. Можно считать, что $m \geq 2$. Тогда

$$SL_{n-m}(q) \times SL_m(q) \leq C_{GL_n(q)}(g)$$

Элемент $g_1\tau$ централизует компоненту $SL_m(q)$, τ централизует элемент g и, следовательно, g_1 также централизует g. При этом $g_1 = \begin{pmatrix} A_{n-m} & 0 \\ 0 & B_m \end{pmatrix}$. Элемент $B\tau$ централизует компоненту $SL_m(q)$, что невозможно, так как B индуцирует на $SL_m(q)$ внутренний диагональный автоморфизм, а τ – графовый автоморфизм.

Случай 2. Элемент g соответствует полуинволюции типа 0, $n = 2m$. Тогда действие g в стандартном базисе описывается уравнениями: $g(e_i) = e_{m+i}, \quad g(e_{m+i}) = \gamma e_i, 1 \leq i \leq m$, γ – не квадрат в $GF(q)$, $X = SL_n(q)/Z'$, центральная подгруппа Z' содержит элемент γI. В этом случае $C_G(g)$ содержит компоненту, изоморфную $SL_m(q^2)$, которая централизуется подгруппой A. Но её централизатор циклический и, следовательно, этот случай невозможен.

Если $q = 3$, то рассуждения, аналогичные случаю 1, можно применить при $n \geq 5$. Можно считать, что $m \geq 3$, тогда $SL_m(3)$ компонента в централизаторе инволюции g. Остаются случаи $n = 3; 4$.

При $n = 3, m = 2$ элемент $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$C_{GL_3(3)}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in GL_2(3) \right\}.$$

Так как элементы $g_1\tau$ и τ централизуют g, то $g_1 \in C_{GL_3(3)}(g)$.

В $C_{GL_3(3)}(g)$ есть подгруппа $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in SL_2(3) \right\}$, которая порождается элементами нечётного порядка и, следовательно, лежит в централизаторе элемента $g_1\tau$. Так как $A\tau$ централизует группу $SL_2(3)$, с помощью непосредственных вычислений получаем, что $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $g_1\tau = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tau$, $(g_1\tau)^2$ инволюция и, следовательно, $g_1\tau \notin A$, так как имеет порядок 4.

В случае $n = 4$ элемент g соответствует инволюции типа m, где $m = 3$ или $m = 2$. При $m = 3$ ситуация аналогична случаю 1. Если $m = 2$, тогда

$$A = \left\{ e; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tau; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tau \right\}.$$

Возьмём элемент $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_{GL_4(3)}(g_1\tau)$. Тогда $g^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$ и, следовательно, A не TI-подгруппа.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Случай $G \notin X^*$ при $n = 2$ невозможен.*

Доказательство.

Пусть $G = GL_2(q)$, $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда $q = q_0^2$. $C_{GL_2(q_0^2)}(a_0) \cong GL_2(q_0)$. Если $q_0 \geq 5$, то $GL_2(q_0)$ компонента. Подгруппа A её централизует, но $Z(G)$ циклический. Следовательно, в этом случае группа не может содержать элементарных абелевых TI-подгрупп порядка 4. Далее $q_0 = 3$.

(1) $A = \{e, g, \varphi, g\varphi\}$, где g инволюция из $GL_2(9)$. С учётом того, что элемент g в $C_{PGL_2(q)}(\varphi)$ сопряжён либо с $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, либо с $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, можно считать, что $g = g_1$ или $g = g_2$. Возьмём элемент $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из $C_G(\varphi)$. Тогда $g_1^b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin A$ и $g_2^b = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin A$. Следовательно, A не TI-подгруппа.

(2) $A = \{e, g\tau, \varphi, g\varphi\tau\}$, $\tau \in C_{\tilde{G}}(\varphi)$ где $\tilde{G} = Aut\ GL_2(q_0^2)$. Непосредственные вычисления показывают, что элементу g соответствует 10 смежных классов в $PGL_2(9)$, которые, с учётом сопряжения, разбиваются на 5 классов. В качестве представителей этих классов можно выбрать:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ g_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмём элемент $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из $C_G(\varphi)$. Для него получаем:

$$(g_1\tau)^b \sim g_5\tau \notin A; \quad (g_2\tau)^b = g_4\tau \notin A;$$
$$(g_3\tau)^b = -g_2\tau \notin A; \quad (g_4\tau)^b = -g_3\tau \notin A.$$

Если в качестве элемента g выбран g_5, то рассмотрим элемент $y \in C_{GL_2(9)}(g_5\tau) = SL_2(9)$, имеющий вид, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}$, где p корень неприводимого над F_3 многочлена $f(x) = x^2 + 1$. Тогда $\varphi^y = \begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \notin A$.

Таким образом, во всех случаях, A не является TI-подгруппой.

Доказательство леммы 6 завершает доказательство теоремы 2.

Список литературы

[1] Aschbacher M. *On finite groups of component type*, J. Match., 1975, N. 1, P. 87-115.

[2] Bender H. *Transitive Gruppen gerader Ordung in denen jede Involution genau einen Punkt festlast*, J. Algebra,V.17 P. 527-554.

[3] Горенстейн Д, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию* Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

[4] M.E. Harris, *Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over field of odd order*, Transactions of the American math.soc., 272:1 (1982), 1–65.

[5] Hochheim Y. and Timmesfeld F. *A note on TI-subgroups*, Arch.Math. 1988. V. 51. P. 97-103.

[6] Махнёв А.А. *О плотно вложенных подгруппах с циклическими силовскими 2-подгруппами*, Междунар. алгебр. конф: Тез. докл. Новосибирск, 1989, с. 76.

[7] Makhnev A.A. *A reduction theorem for TI-subgroups*, English transl. in Math.USSR Sb. V.38. P.299 – 311.

[8] Suzuki M. *Finite groups of even order in which Sylov 2-groups are independent*, Ann. Of Math. 1964. V.80. P. 58-77.

[9] Solomon R. and Timmesfeld F. *A note on tightly embedded subgroups*, Arch.Math. 1979. V. 31. P. 217-223.

[10] Timmesfeld F. *On the structure of 2-local subgroups in finite groups*, Arch.Z. 1978. V. 161. P. 119-136.

[11] Н.Д. Зюляркина, *Циклические TI-подгруппы порядка 4 в классических группах Шевалле нечетной характеристики*, Вопросы алгебры и логики. Труды ИМ СО РАН, (1996), 89–110.

[12] Зюляркина Н.Д., Махнёв А.А. *Циклические TI-подгруппы порядка 4 в исключительных группах Шевалле*, Труды ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1994, Т.3. с. 41-49.

[13] Зюляркина Н.Д., Махнёв А.А. *Циклические TI-подгруппы порядка 4 в известных группах*, 3 Междун. конф. по алгебре. Тез. докл. Красноярск, 1993, с. 130.

Наталья Дмитриевна Зюляркина, Татьяна Геннадьевна Ножкина
Южно-Уральский Государственный Университет,
пр. Ленина, 76,
454080, Челябинск, Россия
Email address: toddeath@yandex.ru, nozhkinatg@susu.ru