Комиссаров А.А.

Устойчивое восстановление функции с оценками погрешностей в задаче плоской реконструктивной томографии для схемы веерного пучка - ПОДРОБНОСТИ ДЛЯ РЕЦЕНЗЕНТА К ПОСЛЕДНЕМУ РАЗДЕЛУ

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА (ПРЕОБРАЗОВАНИЯ) РАДОНА

ТЕОРЕМА А. (О правом обратном к оператору Радона.) (В СТАТЬЕ ПРИВЕДЕНО ОЧЕВИДНОЕ ОБОБЩЕНИЕ) Пусть функция $g(p,\theta), (p,\theta) \in R^2$, обладает следующими свойствами:

(a) $g(p,\theta) = g_1(p, \cos\theta, \sin\theta)$, причём функция $g_1(p,\xi_1,\xi_2)$ определена на всём R^3,

(b) $g_1(-p,-\xi_1,-\xi_2) = g_1(p,\xi_1,\xi_2)$,

(c) $g_1(p,\xi_1,\xi_2)$ пять раз непрерывно дифференцируема по p, а по (ξ_1,ξ_2) - любое число раз,

(d) $g_1(p,\xi_1,\xi_2) = 0$ при $|p| \geq r > 0$,

(e) $\int_{-r}^{r} g_1(p,\xi_1,\xi_2)\,dp = c_0 = const$, то есть, не зависит от ξ_1,ξ_2.

(f) функция $g(p,\theta)$ обладает свойством "радоновской однородности": интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^k g(p,\theta)dp = \int_{-\infty}^{\infty} p^k g_1(p,\cos\theta,\sin\theta)dp$$

является однородным многочленом степени k относительно $\{\cos\theta, \sin\theta\}$ для любого $k = 1, 2, 3....$

Тогда $g(p,\theta)$ является радоновским образом, точнее, существует функция $f(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in R^2$, такая, что для неё справедливы следующие утверждения:

(I) $f(x_1,x_2)$ дважды непрерывно дифференцируема,

(II) $f(x_1,x_2) = 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \geq r^2$,

(III) $R[f](p,\theta) = \check{f}(p,\theta) = \int_{l_{p,\theta}} f(x_1,x_2)\,dl = g(p,\theta)\ \ \forall (p,\theta) \in R^2$,

(IV) функции $|f(x_1,x_2)x_1^{l_1}x_2^{l_2}|$ ограничены на R^2 для любых целых неотрицательных l_1, l_2.

Доказательство. (IV) играет промежуточную роль. Очевидно, что $(I) - (II)$ влекут (IV). Но нам придётся установить (IV) прежде, чем мы установим (II). Выясним сначала, что нужно потребовать от функции $f(x_1,x_2)$, чтобы была справедлива известная формула (см. [1]), связывающая преобразования Фурье и Радона, с намерением реализовать - с нашими уточнениями для двумерного случая - схему из книги Хелгасона [1] (теорема Шварца и теорема о носителе). Рассмотрим двумерное преобразование Фурье функции $f(x_1,x_2)$:

$$F(\lambda_1,\lambda_2) = \hat{f}(\lambda_1,\lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)e^{-i(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}dx_1dx_2 = \iint\limits_{R^2} f(x_1,x_2)e^{-i(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}dx_1dx_2 \qquad (1)$$

Очевидно, $F(\lambda_1,\lambda_2)$ определена, если $f \in L_1(R^2)$, то есть, если существует и конечен интеграл (Лебега)

$$\iint\limits_{R^2} |f(x_1,x_2)|dx_1dx_2$$

Пусть $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$. Положим $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$ и запишем $(\lambda_1,\lambda_2) = \lambda(\cos\theta,\sin\theta) = \lambda(\xi_1,\xi_2), \xi_1 = \lambda_1/\lambda\ , \xi_2 = \lambda_2/\lambda$. Сделаем замену переменных (поворот) такую, чтобы вектор (ξ_1,ξ_2) перешёл в вектор $\vec{j} = (0,1)$:

$$\begin{cases} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = y \\ \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta x_1 - \cos\theta x_2 = x \\ \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta x + \cos\theta y = x_1 \\ -\cos\theta x + \sin\theta y = x_2 \end{cases}$$

Якобиан преобразования равен 1, и мы получаем:

$$F(\lambda_1,\lambda_2)=\iint\limits_{R^2} f(\sin\theta x+\cos\theta y,-\cos\theta x+\sin\theta y)e^{-i\lambda(\cos\theta(\sin\theta x+\cos\theta y)+\sin\theta(-\cos\theta x+\sin\theta y))}dxdy=$$

$$=\iint\limits_{R^2} f(\sin\theta x+\cos\theta y,-\cos\theta x+\sin\theta y)e^{-i\lambda y}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda y}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x\sin\theta+y\cos\theta,-x\cos\theta+y\sin\theta)dx\right)dy$$

Точка $P=(y\cos\theta+x\sin\theta, y\sin\theta-x\cos\theta)$ лежит в прежних координатах на прямой $l_{y,\theta}=\{(x_1,x_2):x_1\cos\theta+x_2\sin\theta-y=0\}$. Тогда - с учётом того, что при повороте прямые переходят в прямые, сохраняя элемент длины:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x\sin\theta+y\cos\theta,-x\cos\theta+y\sin\theta)dx=\int_{l_{y,\theta}}f(x_1,x_2)\,dl=\ R[f](y,\theta)=\check f(y,\theta)=\check f(y,\cos\theta,\sin\theta)$$

Значит,

$$F(\lambda_1,\lambda_2)=F(\lambda\cos\theta,\lambda\sin\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\check f(y,\theta)e^{-i\lambda y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\check f(y,\cos\theta,\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy \tag{2}$$

суть значение преобразования Фурье функции $\check f(y,\theta)$ по переменной y в точке $\lambda>0$. Все преобразования, включая дифференцирование несобственных интегралов и применение теоремы Фубини, будут справедливы, если функция $f(x_1,x_2)$ и её частные производные будут достаточно быстро убывать на бесконечности, например, если потребовать, чтобы для некоторой абсолютной константы c_1 и для некоторого $r_1>0$ при $x_1^2+x_2^2\geq r_1^2$ выполнялись неравенства

$$|f(x_1,x_2)|,|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)|,|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)|\leq c_1(\sqrt{x_1^2+x_2^2})^{-3} \tag{3}$$

Далее, если функция $f(x_1,x_2)$ непрерывно дифференцируема, то (см. [3], стр.437) справедлива двумерная формула обращения:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2\pi}\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}F(\lambda_1,\lambda_2)e^{i\lambda_1x_1}d\lambda_1\right)e^{i\lambda_2x_2}d\lambda_2 \tag{4}$$

Если же $F(\lambda_1,\lambda_2)\in L_1(R^2)$, то эта формула может быть преобразована к виду

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}F(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1d\lambda_2 \tag{5}$$

Наш план доказательства таков. Поскольку нам нужно, отправляясь от функции $g(p,\theta)$, найти такую функцию $f(x_1,x_2)$, чтобы выполнялось условие (III), то необходимо будет совпадение правых частей в формуле (2). Итак, подставляя в (2) вместо $\check f(p,\theta)$ данную в условии функцию $g(p,\theta)$, мы получаем функцию $F_1(\lambda_1,\lambda_2)$. Далее, по формуле (5) определяем функцию $f(x_1,x_2)$, доказываем, что для неё справедливы утверждения (I) и (IV) теоремы, затем обосновываем для неё представление (2) и - как следствие - совпадение функций $F_1(\lambda_1,\lambda_2)$ и $F(\lambda_1,\lambda_2)$ в силу единственности двумерного преобразования Фурье: (5) можно рассматривать как преобразование Фурье от $F(-\lambda_1,-\lambda_2)$ (а предварительно мы установим, что F и F_1 обе из $L(R^2)$). Из этого факта мы, в свою очередь, выведем, опираясь на единственность одномерного преобразования Фурье (которую обоснуем), равенство g и $\check f$. И уже после установления (III) мы приступим к доказательству (II). Итак, полагаем

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2)=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})e^{-i\lambda y}dy=\int_{-r}^{r}g_1(y,\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}},\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}})e^{-i\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot y}dy \tag{6}$$

Оценим скорость убывания $F_1(\lambda_1,\lambda_2)$ на бесконечности. Проинтегрируем в (6) по частям сколько нужно раз (нам для достижения наших требований хватит 5 раз!), учитывая обнуление $g_1(y,\cdot,\cdot)$ и любых её частных производных в точках $(-r,\cdot,\cdot),(r,\cdot,\cdot)$:

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{i\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\int_{-r}^{r}\frac{\partial g_1}{\partial y}(y,\cdot,\cdot)e^{-i\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot y}dy=\dots=\left(\frac{1}{i\lambda}\right)^k\int_{-r}^{r}\frac{\partial^k g_1}{\partial y^k}(y,\cdot,\cdot)e^{-i\lambda y}dy \tag{7}$$

Следовательно, при $\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$

$$|F_1(\lambda_1,\lambda_2)|\leq c(g_1,k)(\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2})^{-k}, k=1,2,\dots\ , \tag{8}$$

что следует из условия (c) теоремы. Полагаем

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}F_1(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1d\lambda_2 \tag{9}$$

Далее доказываем, что так определённая функция удовлетворяет всем требованиям (I)-(IV). Из полученных только что оценок следует, что все частные производные функции $f(x_1, x_2)$ можно получить дифференцированием под знаком интеграла, поскольку получаемые при этом подынтегральные функции принадлежат $L_1(R^2)$:

$$\frac{\partial^{l_1+l_2} f}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} (i\lambda_1)^{l_1} (i\lambda_2)^{l_2} F_1(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{10}$$

Таким образом, выполнено требование (I). Значение $F_1(0,0)$ определим как предел при $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \to 0 \quad F_1(\lambda_1, \lambda_2)$. Покажем, что этот предел существует и конечен, то есть, функция $F_1(\lambda_1, \lambda_2)$ непрерывна в точке (0,0). Запишем:

$$F_1(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-r}^{r} g_1(y, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}) dy + \int_{-r}^{r} g_1(y, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda})(e^{-i\lambda y} - 1) dy$$

Первый интеграл по условию (e) равен c_0 при любых $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, а второй интеграл стремится к 0 в силу ограниченности $g_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ и равномерной малости $e^{-i\lambda y} - 1$, поскольку $|-i\lambda y| \le r\lambda$. Полагаем $F_1(0,0) = c_0$.
Займёмся теперь оценкой сверху модулей частных производных функции $F_1(\lambda_1, \lambda_2)$ при $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$. Воспользовавшись представлением (7), получаем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2) = (-i)^k ((-k)\lambda^{-k-1} \frac{\lambda_1}{\lambda} \int_{-r}^{r} \frac{\partial^k g_1}{\partial y^k}(y, \cdot, \cdot) e^{-i\lambda y} dy + \lambda^{-k} \int_{-r}^{r} [(\frac{\partial^{k+1} g_1}{\partial \xi_1 \partial y^k}(y, \cdot, \cdot)(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda^3}) +$$
$$+ \frac{\partial^{k+1} g_1}{\partial \xi_2 \partial y^k}(y, \cdot, \cdot)(-\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda^3})) e^{-i\lambda y} + \frac{\partial^k g_1}{\partial y^k}(y, \cdot, \cdot) e^{-i\lambda y}(-iy)\frac{\lambda_1}{\lambda}] dy)$$

Аналогичное выражение получаем и для $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2)$. С учётом того, что

$$|\frac{\lambda_1}{\lambda}| \le 1,\ |\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda^3}| = |\frac{\lambda_2^2}{\lambda^3}| \le 1/\lambda,\ |\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda^3}| \le 1/\lambda,$$

получаем оценку сверху при $\lambda \ge 1$:

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2) \right| \le \lambda^{-k} \cdot 2r \cdot (\frac{k}{\lambda} max |\frac{\partial^k g_1}{\partial y^k}(y, \cdot, \cdot)| + \frac{2}{\lambda} max |\frac{\partial^{k+1} g_1}{\partial \xi_1 \partial y^k}(y, \cdot, \cdot)| +$$
$$+ \frac{1}{\lambda} max |\frac{\partial^{k+1} g_1}{\partial \xi_2 \partial y^k}(y, \cdot, \cdot)| + r \cdot max |\frac{\partial^k g_1}{\partial y^k}(y, \cdot, \cdot)|) \le c(k, r, g_1)\lambda^{-k}$$

И аналогично для частной производной по λ_2. Чтобы выяснить, как выглядит частная производная произвольного порядка и получить для неё соответствующую оценку, заметим прежде всего, что если $Q_n(y, \lambda_1, \lambda_2)$ - многочлен степени n относительно λ_1, λ_2, а $l = 1, 2, ...$, то

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{Q_n(y, \lambda_1, \lambda_2)}{\lambda^l} \right) = (-l) \frac{\lambda_1 Q_n(y, \lambda_1, \lambda_2)}{\lambda^{l+1} \lambda} + \frac{Q_{n-1}(y, \lambda_1, \lambda_2)}{\lambda^l} = \frac{Q_{n+1}(y, \lambda_1, \lambda_2)}{\lambda^{l+2}},$$

где $Q_{n-1}(y, \lambda_1, \lambda_2)$ и $Q_{n+1}(y, \lambda_1, \lambda_2)$ - многочлены степеней соответственно $n-1$ и $n+1$ относительно λ_1, λ_2 (и аналогично для частной производной по λ_2). Мы утверждаем - и это проверяется индукцией по порядку производной, отправляясь от формулы (7), - что произвольная производная порядка m может быть представлена в следующем виде $(l_1 + l_2 = m, k = 1, 2, ...)$:

$$\frac{\partial^m F_1}{\partial \lambda_2^{l_2} \partial \lambda_1^{l_1}}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda^{-k} \int_{-r}^{r} e^{-i\lambda y} \left(\sum_{k_1, k_2, n, l} \frac{\partial^{k_1+k_2+k} g_1}{\partial \xi_2^{k_2} \partial \xi_1^{k_1} \partial y^k}(y, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}) \frac{Q_n(y, \lambda_1, \lambda_2)}{\lambda^l} \right) dy,$$
$$0 \le k_1 \le l_1, 0 \le k_2 \le l_2, n = n(k_1, k_2) \le l = l(k_1, k_2) \le 3m$$

В сумме одни и те же производные могут встречаться несколько раз. С учётом того, что все частные производные функции $g_1(y, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda})$ непрерывны и ограничены на $[-r, r] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ и внутри всех многочленов справедливы оценки $|\lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2}| \le \lambda^{l_1+l_2} \le \lambda^l$, имеем при $\lambda \ge 1$:

$$\left| \frac{\partial^{l_1+l_2} F_1}{\partial \lambda_2^{l_2} \partial \lambda_1^{l_1}}(\lambda_1, \lambda_2) \right| \le c(k, l_1, l_2, r, g_1)\lambda^{-k},\ \ k = 1, 2, \dots,\ \lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\ , \tag{11}$$

и константы $c(k, l_1, l_2, r, g_1)$ не зависят от λ_1, λ_2. Покажем теперь, что все частные производные функции $F_1(\lambda_1, \lambda_2)$ непрерывны (а значит, и ограничены) в некоторой окрестности точки (0,0). Разложим экспоненту в формуле (11) в степенной ряд, сходящийся абсолютно и равномерно (вследствие ограниченности $g_1(p, \cos\theta, \sin\theta\ )$ на $[-r, r]$, проинтегрируем его почленно и воспользуемся условиями $(e), (f)$ теоремы:

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2)=\int_{-r}^{r} g_1(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})e^{-i\lambda y}dy=\int_{-r}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k y^k\lambda^k}{k!}g_1(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})dy=$$
$$=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\lambda^k\left(\int_{-r}^{r}y^k g_1(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})dy\right)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}\zeta_{k,j}\lambda_1^j\lambda_2^{k-j}\right) \tag{12}$$

Для случая $\lambda<1$ используется условия "радоновской m - однородности" для любого m - условие (e). Покажем, что все частные производные функции $F_1(\lambda_1,\lambda_2)$ непрерывны (а значит, и ограничены) в некоторой окрестности точки (0,0). Разложим экспоненту по формуле Тейлора-Маклорена до n-го члена, а n выберем позже. Тогда правая часть в (**??**) распадётся на два слагаемых, первое из которых превратится по условию (e) после интегрирования по y в полином по (λ_1,λ_2) степени n, а второе, вследствие абсолютной и равномерной на любом конечном отрезке сходимости степенного ряда - по y и по λ, - его умножения на равномерно непрерывную функцию $g_\xi(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})$ и последующего интегрирования по отрезку $[-r,r]$, - в произведение $\lambda^{n+1}\Psi(\lambda,\lambda_1,\lambda_2)$, где второй множитель - бесконечно дифференцируемая - благодаря условию (f) - по $\lambda,\lambda_1,\lambda_2$ функция. Имеем:

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2)=\int_{-r}^{r} g_1(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})e^{-i\lambda y}dy=\int_{-r}^{r}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-i)^m y^m\lambda^m}{m!}g_1(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})dy+\lambda^{n+1}\Psi(\lambda,\lambda_1,\lambda_2)=$$
$$=c_0+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-i)^m}{m!}\left(\sum_{j=0}^{m}\zeta_{m,j}\lambda_1^j\lambda_2^{m-j}\right)+\lambda^{n+1}\Psi(\lambda,\lambda_1,\lambda_2)$$

Так же, как и выше, можно установить (беря $k=0$), что если $l=l_1+l_2\le n$, то

$$\frac{\partial^{l_1+l_2}F_1}{\partial\lambda_2^{l_2}\partial\lambda_1^{l_1}}(\lambda_1,\lambda_2)=T_{n-l}(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda^{n-2l}\Psi_{l_1,l_2}(\lambda_1,\lambda_2)$$

Первое слагаемое - многочлен, а во втором слагаемом второй множитель - благодаря условию (f) - будет ограниченным в любой окрестности точки $(0,0)$, следовательно, будет существовать и предел при стремлении (λ_1,λ_2) к $(0,0)$, если взять $n\ge 2l+1$. Итак, выясняется, что что функция $f(x_1,x_2)$ обладает всеми условиями для существования её преобразования Радона, двумерного преобразования Фурье $F(\lambda_1,\lambda_2)$ и справедливости вышеприведённых формул. Установленный факт, а также полученные оценки (11) в совокупности с теоремой Фубини и формулой интегрирования по частям обеспечивают корректность следующих преобразований $(x_1x_2\ne 0)$:

$$4\pi^2 f(x_1,x_2)=\iint\limits_{R^2}F_1(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1d\lambda_2=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\left(\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}F_1(\lambda_1,\lambda_2)e^{i\lambda_1x_1}d\lambda_1\right)e^{i\lambda_2x_2}d\lambda_2=$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\left(\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{ix_1}\left(e^{iBx_1}F_1(B,\lambda_2)-e^{-iBx_1}F_1(-B,\lambda_2)-\int_{-B}^{B}\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2)e^{i\lambda_1x_1}d\lambda_1\right)\right)e^{i\lambda_2x_2}d\lambda_2=$$
$$=\frac{i}{x_1}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\left(\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2)e^{i\lambda_1x_1}d\lambda_1\right)e^{i\lambda_2x_2}d\lambda_2=\frac{i}{x_1}\iint\limits_{R^2}\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1d\lambda_2=...=$$
$$=\frac{i^{l_1+l_2}}{x_1^{l_1}x_2^{l_2}}\iint\limits_{R^2}\frac{\partial^{l_1+l_2}F_1}{\partial\lambda_2^{l_2}\partial\lambda_1^{l_1}}(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1d\lambda_2$$

Все интегралы сходятся абсолютно вследствие неравенств (11), если взять в них $k=3$. Таким образом, мы получаем представление

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\frac{i^{l_1+l_2}}{x_1^{l_1}x_2^{l_2}}\iint\limits_{R^2}\frac{\partial^{l_1+l_2}F_1}{\partial\lambda_2^{l_2}\partial\lambda_1^{l_1}}(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1d\lambda_2,\ \ x_1x_2\ne 0, \tag{13}$$

из которого следует справедливость утверждения (IV) теоремы. Приступим теперь к установлению (III). Мы выяснили, что функция $f(x_1,x_2)$ обладает всеми условиями для существования её преобразования Радона, двумерного преобразования Фурье $F(\lambda_1,\lambda_2)$ и справедливости формул (2) и (5) - см. (3). Перепишем (9) в виде:

$$4\pi^2 f(x_1,x_2)=\iint\limits_{R^2}F_1(-\lambda_1,-\lambda_2)e^{-i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1d\lambda_2$$

Из него видно, что $4\pi^2 f(x_1,x_2)$ суть двумерное преобразование Фурье функции $F_1(-\lambda_1,-\lambda_2)$, которая, как было установлено выше, непрерывно дифференцируема и абсолютно суммируема на R^2. по известной теореме (см. [3], стр.437)

$F_1(-\lambda_1,-\lambda_2)$ восстановливается посредством обратного преобразования Фурье, которое, вследствие суммируемости $4\pi^2 f(x_1,x_2)$ может быть записано так:

$$F_1(-\lambda_1,-\lambda_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}4\pi^2 f(x_1,x_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}dx_1dx_2=\iint\limits_{R^2}f(x_1,x_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}dx_1dx_2$$

Откуда

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2)=\iint\limits_{R^2}f(x_1,x_2)e^{-i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}dx_1dx_2 \tag{14}$$

Сравнивая (1) и (9), находим, что $F(\lambda_1,\lambda_2)\equiv F_1(\lambda_1,\lambda_2)$. Зафиксируем теперь θ и $\lambda>0$ и положим $\lambda_1=\lambda\cos\theta,\lambda_2=\lambda\sin\theta$. Из (2) и (6) будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(y,\cos\theta,\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy \tag{15}$$

Распространим это равенство на $\lambda=0$ и $\lambda<0$.

Докажем прежде всего, что $\check{f}(y,\theta)=\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)$ абсолютно суммируема по переменной y при каждом фиксированном θ. Пусть $|y|\geq 1$. Из (13) следует, что

$$|\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x\sin\theta+y\cos\theta,-x\cos\theta+y\sin\theta)dx\right|\leq$$
$$\leq c_1\int_{-\infty}^{\infty}min\left\{\frac{1}{(x\sin\theta+y\cos\theta)^4},\frac{1}{(-x\cos\theta+y\sin\theta)^4}\right\}dx\leq\frac{c_1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{((x\sin\theta+y\cos\theta)^2+(-x\cos\theta+y\sin\theta)^2)^2}=$$
$$=\frac{c_1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2)^2}=\frac{c_1}{2}\frac{1}{|y|^4}\int_0^{\infty}\frac{|y|d(x/|y|)}{((x/|y|)^2+1)^2}=\frac{c_1}{2}\frac{1}{|y|^3}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^2}=c_2\frac{1}{|y|^3}$$

(константы c_1,c_2 не зависят от y). Отсюда и будет следовать нужная нам абсолютная интегрируемость, если мы докажем ещё непрерывность $\check{f}(y,\theta)$ по переменной y. Докажем её, используя уже доказанное и формулу Ньютона-Лейбница для вычисления разности значений непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции $\varphi(\tau)$:

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b\varphi'(\tau)d\tau$$

Положим при фиксированных y_0,y_1,θ,t

$$\varphi(\tau)=f((y_o(1-\tau)+y_1\tau)\cos\theta-t\sin\theta,(y_o(1-\tau)+y_1\tau)\sin\theta+t\cos\theta)=f(x_1(\tau),x_2(\tau)),\ 0\leq\tau\leq 1$$

Мы уже знаем, что $f(x_1,x_2)$ дифференцируема. Непрерывность её частных производных, а также потребующуюся нам сейчас абсолютную их интегрируемость мы получим известным уже путём, используя сходимость интегралов

$$\iint\limits_{R^2}(|\lambda_1|+1)\left|\frac{\partial^{l_1}F_1}{\partial\lambda_1^{l_1}}(\lambda_1,\lambda_2)\right|d\lambda_1d\lambda_2,\ \iint\limits_{R^2}(|\lambda_2|+1)\left|\frac{\partial^{l_2}F_1}{\partial\lambda_2^{l_2}}(\lambda_1,\lambda_2)\right|d\lambda_1d\lambda_2,\ \ l_1,l_2=1,2,3\ ,$$

которая обеспечивается исходными условиями. Запишем:

$$\check{f}(y_1,\theta)-\check{f}(y_0,\theta)=(y_1-y_0)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(\tau),x_2(\tau))\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(\tau),x_2(\tau))\sin\theta)d\tau\right)dt$$

Интеграл в этой формуле сводится к двойному интегралу по полосе, заключённой между двумя параллельными прямыми $l_{y_0,\theta}$ и $l_{y_1,\theta}$. Стало быть,

$$|\check{f}(y_1,\theta)-\check{f}(y_0,\theta)|\leq|y_1-y_0|\iint\limits_{R^2}\left(|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)|+|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)|\right)dx_1dx_2\leq const\cdot|y_1-y_0|,$$

откуда и следует непрерывность. Итак, левая часть в (15) непрерывна по λ при любом θ, а относительно правой части это следует из условий теоремы. Тогда равенство (15) распространяется на $\lambda=0$ по непрерывности. Пусть теперь $\lambda<0$. Тогда $-\lambda=|\lambda|>0$. Имеем, используя условие (b) теоремы и аналогичное свойство преобразования Радона $\big(\check{f}(-y,-\cos\theta,-\sin\theta)=\check{f}(-y,\cos(\theta+\pi),\sin(\theta+\pi))=\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)\big)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_1(y,\cos\theta,\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(-y,-\cos\theta,-\sin\theta)e^{i|\lambda|y}dy=(z=-y)=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(z,-\cos\theta,-\sin\theta)e^{-i|\lambda|z}dz=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(z,\cos(\theta+\pi),\sin(\theta+\pi))e^{-i|\lambda|z}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(z,\cos(\theta+\pi),\sin(\theta+\pi))e^{-i|\lambda|z}dz=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(z,\cos(\theta+\pi),\sin(\theta+\pi))e^{i\lambda z}dz=(y=-z)=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(-y,\cos(\theta+\pi),\sin(\theta+\pi))e^{-i\lambda y}dy=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(-y,-\cos\theta,-\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy$$

Таким образом, доказано, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(y, \cos\theta, \sin\theta) e^{-i\lambda y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y, \cos\theta, \sin\theta) e^{-i\lambda y} dy \quad \forall\, \theta, \ \ \lambda \tag{16}$$

Но в таком случае, зафиксировав θ, мы обнаруживаем, что преобразования Фурье абсолютно суммируемых функций (из $L_1(R)$) тождественно равны, а тогда сами функции $\check{f}(y, \cos\theta, \sin\theta)$ и $g_1(y, \cos\theta, \sin\theta)$ по известной теореме равны почти всюду по переменной y относительно меры Лебега, но поскольку обе они непрерывны (см. выше), то они равны всюду по переменной y. И это верно для каждого фиксированного θ. А это означает, что $\check{f}(y,\theta) = \check{f}(y, \cos\theta, \sin\theta) \equiv g_1(y, \cos\theta, \sin\theta) = g(y,\theta)$, и утверждение (III) теоремы доказано.

Приступим к доказательству утверждения (II) теоремы. Прежде всего выведем, следуя Радону (см. русский перевод его статьи в [1]) и обращая внимание на то, что мы должны требовать от функций, важное соотношение между так называемыми средними по окружностям функции и её преобразования Радона. Введём следующие обозначения.

$$\bar{f_0}\ (\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\psi, \rho\sin\psi) d\psi \quad - \tag{17}$$

среднее функции $f(x_1, x_2)$ по окружности радиуса ρ с центром в начале координат;

$$\bar{F_0}\ (q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{f}(q,\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi) dt \right) d\varphi \ \ q > 0 - \tag{18}$$

среднее по окружности радиуса q с центром в начале координат интегралов функции $f(x_1, x_2)$ по всем касательным к этой окружности. Рассмотрим несобственный интеграл ($q > 0$)

$$I_q = \iint\limits_{x_1^2 + x_2^2 > q^2} \frac{f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - q^2}} \tag{19}$$

Если, например, при $x_1^2 + x_2^2 \geq R_1^2 > q^2 \quad |f(x_1, x_2)| \leq c_3(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^{-3}$, то этот интеграл сходится абсолютно, а значит, и сходится. В самом деле, так как в силу непрерывности $f(x_1, x_2)$ модуль $\ |f(x_1, x_2)| \leq c_4$ для некоторой константы c_4 при $x_1^2 + x_2^2 \leq R_1^2$, то

$$\iint\limits_{x_1^2 + x_2^2 > q^2} \frac{|f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - q^2}} \leq c_4 \left(\iint\limits_{q^2 < x_1^2 + x_2^2 \leq R_1^2} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - q^2}} \right) + c_3 \left(\iint\limits_{x_1^2 + x_2^2 \geq R_1^2} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^{-3} dx_1 dx_2}{\sqrt{R_1^2 - q^2}} \right) =$$

$$= (x_1 = \rho\cos\varphi, x_2 = \rho\sin\varphi) = c_4 2\pi \int_q^{R_1} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - q^2}} + c_3 \frac{2\pi}{\sqrt{R_1^2 - q^2}} \int_{R_1}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} < \infty$$

Функция $f(x_1, x_2)$, построенная выше, указанным свойством обладает, стало быть, интеграл (19) сходится. Рассмотрим замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = q\cos\varphi - t\sin\varphi \\ x_2 = q\sin\varphi + t\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q\cos\varphi - t\sin\varphi = x_1 \\ t\cos\varphi + q\sin\varphi = x_2 \end{cases} \tag{20}$$

Геометрически она означает следующее. Через точку $(x_1, x_2), |x_1^2 + x_2^2 > q^2$, проходят ровно две прямые, касательные к окружности $x_1^2 + x_2^2 = q^2$. Уравнения (20) - это их параметризация. Вектор $\cos\varphi, \sin\varphi$ направлен из центра окружности, а вектор $t(-\sin\varphi, \cos\varphi)$ - вдоль касательной, причём перемещается при изменении φ от 0 до 2π в соответствии со своим направлением (по стрелке), если $t > 0$, и наоборот, если $t < 0$. Ясно, что в точку (x_1, x_2) войдёт ровно один такой вектор с параметром $t > 0$ - вдоль одной из двух касательных, и - точно так же - ровно один такой вектор с параметром $t < 0$ - вдоль другой касательной. Итак, соответствие (20) будет взаимно-однозначным, если в нём добавить условие $t > 0$ или условие $t < 0$. Пусть $t > 0$. Тогда, возводя в квадрат обе части уравнений и складывая, получим: $x_1^2 + x_2^2 = t^2 + q^2, \quad t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - q^2}$. Решим систему линейных уравнений (20) относительно $\cos\varphi, \sin\varphi$ методом Крамера

$$\cos\varphi = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -t \\ x_2 & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q & -t \\ t & q \end{vmatrix}} = \frac{qx_1 + tx_2}{q^2 + t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{\begin{vmatrix} q & x_1 \\ t & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q & -t \\ t & q \end{vmatrix}} = \frac{tx_1 - qx_2}{q^2 + t^2}$$

и ещё раз убедимся во взаимной однозначности через соотношения (20) с дополнительным условием $t > 0$ (или $t < 0$) между всеми точками внешности круга $x_1^2 + x_2^2 \leq q^2$ и множеством $[0, 2\pi) \times (0, \infty)$ (или множеством $[0, 2\pi) \times (-\infty, 0)$). Якобиан преобразования (20) равен

$$\begin{vmatrix} -q\sin\varphi - t\cos\varphi & -\sin\varphi \\ q\cos\varphi - t\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = -t$$

Пусть $t > 0$. Тогда, с учётом того, что $(q\cos\varphi - t\sin\varphi)^2 + (q\sin\varphi + t\cos\varphi)^2 = q^2 + t^2$,

$$I_q = \iint\limits_{[0,2\pi)\times(0,\infty)} \frac{f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi)t}{t} d\varphi dt = \iint\limits_{[0,2\pi)\times(0,\infty)} f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi) d\varphi dt$$

К такому же результату приходим и в случае $t < 0$ (сокращается $|t|$):

$$I_q = \iint\limits_{[0,2\pi)\times(-\infty,0)} f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi)d\varphi dt$$

Складывая, получаем:

$$2I_q = \iint\limits_{[0,2\pi)\times(-\infty,\infty)} f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi)d\varphi dt$$

Двойной интеграл сходится абсолютно, поскольку, как мы уже видели, $|f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi)d\varphi| \le \frac{1}{4}\frac{1}{(q^2+t^2)^2}$ при достаточно большом $|t|$. Следовательно, можно применить теорему Фубини и свести двойной интеграл к повторному. Тогда получим:

$$I_q = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi)dt\right)d\varphi = \pi\cdot \bar{F}_0\ (q)$$

Вычислим теперь I_q, переходя к полярным координатам: $x_1 = \rho\cos\psi, x_2 = \rho\sin\psi$. Имеем:

$$I_q = \iint\limits_{[0,2\pi)\times(q,\infty)} \frac{f(\rho\cos\psi, \rho\sin\psi)}{\sqrt{\rho^2-q^2}}\rho d\psi d\rho = \int_q^\infty\left(\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\psi, \rho\sin\psi)d\psi\right)\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-q^2}}d\rho = 2\pi\int_q^\infty \frac{\bar{f}_0\ (\rho)\rho}{\sqrt{\rho^2-q^2}}d\rho$$

Сопоставляя два выражения, получаем формулу Радона:

$$\bar{F}_0\ (q) = 2\int_q^\infty \frac{\bar{f}_0\ (\rho)\cdot\rho}{\sqrt{\rho^2-q^2}}d\rho \tag{21}$$

Пусть теперь (x_1^0, x_2^0) - произвольная точка плоскости. Рассмотрим функцию-сдвиг $g(x_1, x_2) = f(x_1 + x_1^0, x_2 + x_2^0)$. Ясно, что она удовлетворяет, так же, как и $f(x_1, x_2)$, требованиям (I) и (IV). Посмотрим, как изменится Радоновский образ. Имеем:

$$R[f](q,\theta) = \check{g}(q,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q\cos\theta + x\sin\theta + x_1^0, q\sin\theta - x\cos\theta + x_2^0)dx$$

Заметим, что точка $P = (q\cos\theta + x\sin\theta + x_1^0, q\sin\theta - x\cos\theta + x_2^0)$ лежит на прямой

$$l_{p,\theta} = \left\{(x_1, x_2) : x_1\cos\theta + x_2\sin\theta = p = q + x_1^0\cos\theta + x_2^0\sin\theta\right\},$$

дифференциал длины $dl = \sqrt{(\sin\theta)^2 + (-\cos\theta)^2}dx = dx$, и, стало быть,

$$\check{g}(q,\theta) = \int\limits_{l_{q+q_0,\theta}} f(x_1, x_2)dl = \check{f}(q + q_0, \theta),\ q_0 = x_1^0\cos\theta + x_2^0\sin\theta \tag{22}$$

Вычислим соответствующие средние. Во-первых,

$$\bar{g}_0\ (\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\psi + x_1^0, \rho\sin\psi + x_2^0)d\psi,$$

а это ничто иное, как среднее функции $f(x_1, x_2)$ по окружности радиуса ρ с центром в точке (x_1^0, x_2^0). Во-вторых ($q > 0$),

$$\bar{G}_0\ (q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\check{g}(q,\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\check{f}(q + q_0, \varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(q + q_0, \varphi)d\varphi$$

Давайте теперь увидим, что $\check{f}(q + q_0, \varphi)$ - суть интегралы по всевозможным касательным к окружности радиуса q с центром в точке (x_1^0, x_2^0). Действительно, уравнение каждой такой касательной имеет вид $(x_1 - x_1^0)\cos\varphi + (x_2 - x_2^0)\sin\varphi - q = 0$, или $x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi = q + q_0$. Соотношение (21) перепишем теперь в виде:

$$2\pi\ \bar{G}_0\ (q) = \int_0^{2\pi} g(q + q_0, \varphi)d\varphi = 2\int_q^\infty\left(\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\psi + x_1^0, \rho\sin\psi + x_2^0)d\psi\right)\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-q^2}}d\rho \tag{23}$$

Зафиксируем точку (x_1^0, x_2^0). Обозначим $V(q) = 2\pi\ \bar{G}_0\ (q),\ U(\rho) = 4\pi\ \bar{g}_0\ (\rho)\rho$ и для удобства переобозначим переменные: s вместо q и t вместо ρ. Мы имеем уравнение:

$$\int_s^\infty \frac{U(t)}{\sqrt{t^2-s^2}}dt = V(s),\ \ s > 0 \tag{24}$$

Это - так называемое внешнее интегральное уравнение Абеля. В теории доказывается следующая формула обращения:

$$\int_x^\infty U(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{2tV(t)}{\sqrt{t^2-x^2}}dt, \quad x>0 \tag{25}$$

Выведем эту формулу, следуя [4] (стр.32) и обращая особое внимание на законность преобразований. Из полученных выше оценок и доказанного утверждения (III) теоремы следует, что при достаточно больших s, t $V(s)=0$, $|\bar{g_0}\ (t)| \le const\cdot t^{-6}$. Из последней оценки следует, в свою очередь, что при достаточно большом $A>s$

$$\int_A^\infty \frac{|U(t)|}{\sqrt{t^2-s^2}}dt \le const\cdot\int_A^\infty \frac{tdt}{t^6\sqrt{t^2-s^2}} \le const\cdot\frac{1}{A^2}\int_A^\infty \frac{d(\sqrt{t^2-s^2})}{t^4} = const\cdot\frac{1}{A^2}\int_{\sqrt{A^2-s^2}}^\infty \frac{dz}{(z^2+s^2)^2} \le$$
$$\le const\cdot\frac{1}{A^2}\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+s^2)^2} = const\cdot\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{s^4}\int_0^\infty \frac{sd(z/s)}{((z/s)^2+1)^2} = const\cdot\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{s^3}\int_0^\infty\frac{dy}{(y^2+1)^2} = const\cdot\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{s^3}$$

(Константы $const$ - разные.) Домножим левую и правую части уравнения (24) на $\frac{2s}{\sqrt{s^2-x^2}}$, $s>x$, и проинтегрируем полученное равенство от x до ∞. Поскольку при $s \ge r+\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2}$ $V(s)=0$ (окружность, а вместе и все касательные к ней лежат в области $x_1^2+x_2^2\ge r^2$), интегрировать фактически можно от x до любого $A\ge r+\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2}$. Итак,

$$\int_x^\infty \frac{2sV(s)}{\sqrt{s^2-x^2}}dt = \int_x^\infty\left(\int_s^\infty \frac{U(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sds}{\sqrt{s^2-x^2}} = \int_x^A\left(\int_s^\infty \frac{U(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sds}{\sqrt{s^2-x^2}} \tag{26}$$

При $A\to\infty$ правая часть (26) будет иметь предел, равный левой части (26). Разложим правую часть в сумму:

$$\int_x^A\left(\int_s^\infty \frac{U(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sds}{\sqrt{s^2-x^2}} = \int_x^A\left(\int_s^A \frac{U(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sds}{\sqrt{s^2-x^2}} + \int_x^A\left(\int_A^\infty \frac{U(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sds}{\sqrt{s^2-x^2}} \tag{27}$$

Имеем, используя полученную выше оценку:

$$\left|\int_x^A\left(\int_A^\infty \frac{U(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sds}{\sqrt{s^2-x^2}}\right| \le const\cdot\frac{1}{A^2}\cdot\int_x^\infty\frac{sds}{s^3\sqrt{s^2-x^2}}$$

Последний интеграл конечен ($x>0$!). Значит, второе слагаемое в (27) в пределе при $A\to\infty$ даст нам 0. Займёмся первым слагаемым. Установим, что сходится несобственный интеграл по треугольнику $\varDelta_x=\{(s,t): 0<x<s<t\le A\}$

$$\iint\limits_{\varDelta_x}\frac{2sdsdt}{\sqrt{t^2-s^2}\sqrt{s^2-x^2}} \tag{28}$$

Возьмём произвольную (достаточно малую) монотонно убывающую последовательность положительных чисел, сходящуюся к нулю: $\varepsilon_n\to 0, \varepsilon_{n+1}<\varepsilon_n$, - и рассмотрим последовательность расширяющихся замкнутых треугольников $\varDelta_{x,n}=\{(s,t): x+\varepsilon_n\le s\le t\le A\}$, объединение которых равно $\varDelta_x$ (исчерпание $\varDelta_x$). Рассмотрим возрастающую последовательность соответствующих интегралов:

$$\alpha_n(x,A)=\iint\limits_{\varDelta_{x,n}}\frac{2sdsdt}{\sqrt{t^2-s^2}\sqrt{s^2-x^2}}$$

Если мы докажем, что она сходится к конечному пределу, то тем самым установим сходимость несобственного интеграла (27). Применяя теорему Фубини и соответствующие замены переменных, получаем следующую цепочку преобразований:

$$\alpha_n(x,A)=\int_{x+2\varepsilon_n}^A\left(\int_{x+\varepsilon_n}^{t-\varepsilon_n}\frac{2sds}{\sqrt{t^2-s^2}\sqrt{s^2-x^2}}\right)dt = (y=s^2) = \int_{x+2\varepsilon_n}^A\left(\int_{(x+\varepsilon_n)^2}^{(t-\varepsilon_n)^2}\frac{dy}{\sqrt{t^2-y}\sqrt{y-x^2}}\right)dt =$$
$$=\left(y=x^2+z(t^2-x^2), dy=(t^2-x^2)dz,\ z_0(\varepsilon_n,t)=\frac{(x+\varepsilon_n)^2-x^2}{t^2-x^2}, z_1(\varepsilon_n,t)=\frac{(t-\varepsilon_n)^2-x^2}{t^2-x^2}\right)=$$
$$=\int_{x+2\varepsilon_n}^A\left(\int_{z_0(\varepsilon_n,t)}^{z_1(\varepsilon_n,t)}\frac{(t^2-x^2)dz}{\sqrt{t^2-x^2-z(t^2-x^2)}\sqrt{(t^2-x^2)z}}\right)dt = \int_{x+2\varepsilon_n}^A\left(\int_{z_0(\varepsilon_n,t)}^{z_1(\varepsilon_n,t)}\frac{dz}{\sqrt{1-z}\sqrt{z}}\right)dt =$$
$$=2\int_{x+2\varepsilon_n}^A\left(\int_{z_0(\varepsilon_n,t)}^{z_1(\varepsilon_n,t)}\frac{d(\sqrt{z})}{\sqrt{1-(\sqrt{z})^2}}\right)dt = (\sqrt{z}=w) = 2\int_{x+2\varepsilon_n}^A\left(\int_{\sqrt{z_0(\varepsilon_n,t)}}^{\sqrt{z_1(\varepsilon_n,t)}}\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}\right)dt =$$
$$=2\int_{x+2\varepsilon_n}^A\left(\arcsin(\sqrt{z_1(\varepsilon_n,t)})-\arcsin(\sqrt{z_0(\varepsilon_n,t)})\right)dt < \pi(A-x)$$

Таким образом, возрастающая последовательность интегралов $\alpha_n(x,A)$ ограничена сверху и стало быть, по известной теореме, имеет конечный предел, не превосходящий (на самом деле равный) $\pi(A-x)$. Это означает, как мы уже сказали, что несобственный интеграл (27) сходится. Заметим, что функция $\bar{g_0}\ (t)$, а вместе с ней и $U(t)$, непрерывны, как это нетрудно увидеть из самого определения среднего по окружности (17) (если две окружности с радиусами t_1 и t_2 и единым центром близки, то в силу непрерывности подынтегральных функций на компакте, например, замкнутом круге D_R радиуса R с центром в начале координат, содержащем обе эти окружности, модуль разности подынтегральных функций не будет превосходить значения от $|t_1 - t_2|$ модуля непрерывности $\bar{g_0}\ (t)$ на этом компакте, который стремится к нулю вместе с $|t_1 - t_2|$ вследствие непрерывности $f(x_1, x_2)$ на всей плоскости, и значит, на всяком компакте):

$$|\ \bar{g_0}\ (t_1) - \bar{g_0}\ (t_2)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(t_1\cos\psi + x_1^0, t_1\sin\psi + x_2^0) - f(t_2\cos\psi + x_1^0, t_2\sin\psi + x_2^0)\right| d\psi \le \omega(f, D_R, |t_1 - t_2|),$$

$$\omega(f, D_R, \delta) = max\left\{|f(x_1,x_2) - f(y_1,y_2)| : \left\{(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in D_R, (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \le \delta^2\right\}\right\}$$

Если, например, t_1 фиксировано, а t_2 стремится к t_1, то из указанного неравенства следует, что $\bar{g_0}\ (t_2) \to \bar{g_0}\ (t_1)$. Из всего этого делаем вывод (применяя ещё известную теорему Вейерштрасса о мажоранте, учитывая ограниченность непрерывной функции $U(t)$ на замыкании $\varDelta_x$), что абсолютно сходится (а значит, и сходится) несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\varDelta_x} \frac{U(t)2sdsdt}{\sqrt{t^2-s^2}\sqrt{s^2-x^2}} \tag{29}$$

Но поскольку его можно рассматривать и как интеграл Лебега на замыкании $\varDelta_x$, дополнив подынтегральную функцию нулевыми значениями на участках границы, где $s = x$ или $s = t$, имеющих плоскую Лебегову меру нуль, то можно применить в этом случае теорему Фубини (именно к этому мы шли, намереваясь поменять порядок интегрирования!) - см. [3], стр.317, - и мы получаем:

$$\iint\limits_{\varDelta_x} \frac{U(t)2sdsdt}{\sqrt{t^2-s^2}\sqrt{s^2-x^2}} = \int_x^A\left(\int_s^A \frac{U(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sds}{\sqrt{s^2-x^2}} = \int_x^A\left(\int_s^A \frac{U(t)ds}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sdt}{\sqrt{s^2-x^2}} =$$
$$= \int_x^A U(t)\left(\int_x^t \frac{2sds}{\sqrt{t^2-s^2}\sqrt{s^2-x^2}}\right)dt$$

Теорема Фубини утверждает существование (сходимость) внутреннего интеграла, и его значение мы получим, если в проведённых нами выше выкладках вместо ε_n мы будем брать 0. Но тогда, как легко проследить, внутренний интеграл даст нам значение π. В итоге мы получаем:

$$\int_x^A\left(\int_s^A \frac{U(t)dt}{\sqrt{t^2-s^2}}\right)\frac{2sds}{\sqrt{s^2-x^2}} = \pi\int_x^A U(t)dt,$$

а с учётом всего сказанного и полученного выше, устанавливаем формулу (25).Но тогда, если $x \ge r + \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}$ (окружность охватывает круг $x_1^2 + x_2^2 \le r^2$), имеем:

$$\int_x^\infty U(t)dt = 0 \ \Rightarrow \int_x^\rho U(t)dt = 0 \ \ \forall\rho > r + \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}$$

Учитывая непрерывность $U(\rho)$ и дифференцируя по ρ последнее равенство, получаем, что $U(\rho) = 4\pi\cdot\ \bar{g_0}\ (\rho)\cdot\rho = 0$, следовательно, $\bar{g_0}\ (\rho) = 0$, то есть,

$$\bar{g_0}\ (\rho) = \int_0^{2\pi} f(\rho\cos\psi + x_1^0, \rho\sin\psi + x_2^0)d\psi = 0 \ \ \forall\rho \ge q_0(x_1^0, x_2^0) = r + \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \tag{30}$$

Мы получили важный промежуточный вывод: интегральные средние функции $f(x_1, x_2)$ равны нулю по всем окружностям, охватывающим круг $B_r = \left\{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le r^2\right\}$. Теперь мы будем доказывать, что на каждой такой окружности $f(x_1, x_2)$ тождественно равна нулю. А поскольку через всякую точку, лежащую вне или на границе B_r, можно провести такую окружность, то мы тем самым докажем утверждение (II) теоремы. Мы имеем теперь:

$$\iint\limits_{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2 \ge q^2 \ge q_0^2(x_1^0,x_2^0)} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \quad = \lim_{A\to\infty}\int_q^A \rho\left(\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\psi + x_1^0, \rho\sin\psi + x_2^0)d\psi\right)d\rho = 0$$

То есть, двойной интеграл от функции $f(x_1, x_2)$ по всякому кругу, содержащему круг D_r, равен интегралу по всей плоскости, поскольку по внешности такого круга он равен нулю, и, стало быть, все такие интегралы равны между собой и равны (как мы уже видели выше) константе c_0 из условия теоремы:

$$\iint\limits_{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2 \le q^2,\ q \ge q_0(x_1^0,x_2^0)} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \quad = c_0 \quad \forall(x_1^0, x_2^0) \in R^2 \tag{31}$$

Возьмём теперь для произвольной точко $(x_1^0, x_2^0) \in R^2$ достаточно большой такой круг, чтобы он содержал "с запасом" круг D_r. Зафиксируем радиус $R = R(x_1^0, x_2^0)$ такого круга. Круг можно подвигать так, чтобы он не терял указанного свойства. Рассмотрим двойной интеграл от функции $f(x_1, x_2)$ по такому кругу как функцию его центра, то есть, рассмотрим определённую в достаточно малой открытой окрестности точки (x_1^0, x_2^0) функцию

$$h(x,y) = \iint\limits_{D_R(x,y)} f(x_1,x_2)dx_1dx_2, \;\; D_R(x,y) = \big\{(x_1,x_2) : (x_1-x)^2 + (x_2-y)^2 \le R^2\big\} \tag{32}$$

Вычислим частную производную (установив заодно, что она существует) по x этой функции в точке (x_0, y_0), $x_0 = x_1^0, y_0 = x_2^0$. Пусть $x = x_0 + \Delta, \Delta \le R$. Запишем, применяя теорему Лагранжа:

$$h(x,y_0) - h(x_0,y_0) = \iint\limits_{D_R(x_0,y_0)} \left(f(x_1+\Delta,x_2) - f(x_1,x_2)\right)dx_1dx_2 = \iint\limits_{D_R(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi(x_1),x_2)\cdot \Delta dx_1dx_2, \xi(x_1) \in (x_1, x_1+\Delta)$$

Далее,

$$\begin{aligned}&|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi(x_1),x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)| \le \omega(\frac{\partial f}{\partial x_1}, D_{2R}, \Delta) = \\ &max\left\{|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1,y_2)| : \big\{(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in D_{2R}, (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \le \Delta^2\big\}\right\}\end{aligned}$$

Поскольку частные производные функции $f(x_1, x_2)$, как мы уже знаем, непрерывны, и, следовательно, непрерывны на всяком компакте, то модуль непрерывности в вышенаписанном неравенстве стремится к нулю при $\Delta \to 0$, то мы получим:

$$\left|\frac{h(x_0+\Delta,y_0) - h(x_0,y_0)}{\Delta} - \iint\limits_{D_R(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \le \pi R^2 \omega(\frac{\partial f}{\partial x_1}, D_{2R}, \Delta) \to 0,$$

то есть,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) = \iint\limits_{D_R(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \tag{33}$$

Но в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) функция $h(x, y) = c_0$ - постоянна; следовательно, левая часть в (33), а вместе с ней и правая часть, равна нулю. Ввиду полной симметрии аналогичная ситуация имеет место и для частной производной функции $h(x, y)$ по y. Итак, для любой окружности, лишь бы она охватывала с некоторым запасом круг D_r, а с учётом непрерывности - и для всякой окружности, охватывающей круг D_r, в том числе и для его границы, выполняются равенства:

$$\iint\limits_{D_R(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{D_R(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 0 \tag{34}$$

Рассмотрим дифференциальные формы

$$\oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)} f(x_1,x_2)dx_2, \quad \oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)} f(x_1,x_2)dx_1$$

и применим к ним формулу Грина. Получим:

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)} f(x_1,x_2)dx_2 &= \iint\limits_{D_R(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 0 \\ \oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)} f(x_1,x_2)dx_1 &= -\iint\limits_{D_R(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 0\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формулы

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) &= \oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)} f(x_1,x_2)dx_2 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) &= \oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)} f(x_1,x_2)dx_1\end{aligned} \tag{35}$$

можно получить в предположении только, что $f(x_1,x_2)$ всюду непрерывна. Покажем вкратце, как это сделать. Пусть, например, $x > x_0$. Представим себе два близко расположенных и "сильно пересекающихся" круга одного радиуса R с центрами соответственно в точках (x_0,y_0) и (x,y_0). Нас интересует симметрическая разность этих кругов, то есть, объединение без пересечения. Она распадается на шесть частей: в центре - правая D_1 и левая D_2 (в которые попадают центры), получающиеся геометрически движением вдоль оси x симметрично расположенных относительно общего центра кругов дуг окружностей, а также четыре сегмента, отсекаемые параллельными оси x хордами (две сверху и две снизу), симметричные попарно относительно осей координат (D_3, D_4, D_5, D_6). Мы имеем:

$$h(x,y_0)-h(x_0,y_0)=\iint\limits_{D_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2-\iint\limits_{D_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2+\iint\limits_{D_3} f(x_1,x_2)dx_1dx_2-\iint\limits_{D_4} f(x_1,x_2)dx_1dx_2+$$
$$+\iint\limits_{D_5} f(x_1,x_2)dx_1dx_2-\iint\limits_{D_6} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Пусть $x=x_0+2\delta$. Тогда точки пересечения окружностей - $(x_0+\delta, y_0-\sqrt{R^2-\delta^2})$ и $(x_0+\delta, y_0+\sqrt{R^2-\delta^2})$. D_1 - возьмём с замыканием, на двойной интеграл это не повлияет, - представляет собой, если смотреть вдоль оси x (мы временно переобозначаем оси), криволинейную трапецию, ограниченную снизу графиком функции $x=x_0+\sqrt{R^2-(y-y_0)^2}$, а сверху - графиком функции $x=x_0+\sqrt{R^2-(y-y_0)^2}+2\delta$. Тогда

$$\iint\limits_{D_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_{y_0-\sqrt{R^2-\delta^2}}^{y_0+\sqrt{R^2-\delta^2}}\left(\int_{x_0+\sqrt{R^2-(y-y_0)^2}}^{x_0+\sqrt{R^2-(y-y_0)^2}+2\delta} f(t,y)dt\right)dy$$

Используя оценку $|f(t,y)-f(x_0+\sqrt{R^2-(y-y_0)^2},y)|\le\omega(f,2R,2\delta)$, получаем:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\iint\limits_{D_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2}{2\delta}=\int_{y_0-R}^{y_0+R} f(x_0+\sqrt{R^2-(y-y_0)^2},y)dy$$

Но правая часть здесь - не что иное, как одна из параметризаций дифференциальной формы из (33), если её рассматривать на правой части окружности, проходимой против часовой стрелки. Аналогично можно показать, что

$$-\lim_{\delta\to 0}\frac{\iint\limits_{D_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2}{2\delta}=\int_{y_0+R}^{y_0-R} f(x_0-\sqrt{R^2-(y-y_0)^2},y)dy$$

Можно, далее, показать, что площади сегментов D_3, D_4, D_5, D_6 есть $o(\delta^2)$, что с учётом ограниченности на $D_{2R}(x_0,y_0)$ функции $f(x_1,x_2)$ даст нам в итоге первую из форму (35). Аналогично получается и вторая формула.
Рассмотрим стандартную параметризацию для дифференциальных форм из (35): $x_1=x_0+R\cos\varphi$, $x_2=y_0+R\sin\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Имеем:

$$\begin{gathered}\oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)} f(x_0+R\cos\varphi, y_0+R\sin\varphi)R\cos\varphi d\varphi=\oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)}\left(f(x_0+R\cos\varphi,y_0+R\sin\varphi)(x_0+R\cos\varphi)-x_0\right)d\varphi=0\\ \oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)} f(x_0+R\cos\varphi, y_0+R\sin\varphi)R\sin\varphi d\varphi=\oint\limits_{\partial D_R(x_0,y_0)}\left(f(x_0+R\cos\varphi,y_0+R\sin\varphi)(y_0+R\sin\varphi)-y_0\right)d\varphi=0\end{gathered}\tag{36}$$

С учётом (30) мы приходим к следующим выводам: для функций $f_1(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_1$ и $f_2(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_2$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\bar{f_1}(\rho)=\int_0^{2\pi} f_1(\rho\cos\psi+x_1^0,\rho\sin\psi+x_2^0)d\psi=0,\ \ \forall\rho\ge q_0(x_1^0,x_2^0)=r+\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2}\\ \bar{f_2}(\rho)=\int_0^{2\pi} f_2(\rho\cos\psi+x_1^0,\rho\sin\psi+x_2^0)d\psi=0,\ \ \forall\rho\ge q_0(x_1^0,x_2^0)=r+\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2}\end{gathered}\tag{37}$$

Но эти функции обладают всеми теми свойствами, что и функция $f(x_1,x_2)$ (в частности, они принадлежат классу $L_1(R^2)$), которые позволили нам получить равенства (37), отправляясь от равенств (30). Значит, отправляясь теперь от функций $f_1(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_1$ и $f_2(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_2$, мы можем получить те же равенства (потому что нами доказано утверждение (IV) теоремы) для функций $f_3(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_1\cdot x_1, f_4(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_1\cdot x_2, f_5(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_2\cdot x_1, f_6(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_2\cdot x_2$. Продолжая эти рассуждения и пользуясь доказанным утверждением (IV) теоремы, мы можем доказать по индукции соотношения (37) для всех функций вида $f(x_1,x_2)x_1^{l_1}x_2^{l_2}$. Из этого, в свою очередь, следует, что

$$\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\psi+x_1^0,\rho\sin\psi+x_2^0)\cos^k\psi\sin\psi^l d\psi=0,\ \ \forall\rho\ge q_0(x_1^0,x_2^0)=r+\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2},\quad\forall k,l=0,1,2,...\tag{38}$$

Осталось доказать, что если для периодической непрерывной на $[0, 2\pi]$ функции $\mu(\psi)$

$$\int_0^{2\pi} \mu(\psi) \cos^k \psi \sin \psi^l d\psi = 0 \quad \forall k, l = 0, 1, 2, \ldots , \tag{39}$$

то она тождественно равна нулю на $[0, 2\pi]$. В самом деле, нетрудно доказать по индукции, что функция $\cos(n\psi)$ суть полином степени n от $\cos\psi$: $\cos(n\psi) = P_n(\cos\psi)$, а $\sin(n\psi)$ суть произведение $\sin\psi$ на полином степени $n-1$ от $\cos\psi$: $\sin(n\psi) = \sin\psi Q_{n-1}(\cos\psi)$. Отсюда и равенств (39) следует, что

$$\int_0^{2\pi} \mu(\psi) \cos(n\psi) d\psi = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots , \int_0^{2\pi} \mu(\psi) \sin(n\psi) d\psi = 0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Теперь из равенства Парсеваля для тригонометрической системы следует, что

$$\int_0^{2\pi} (\mu(\psi))^2 d\psi = 0 ,$$

а тогда $\mu(\psi) \equiv 0$. Итак, в каждой точке любой окружности, обходящий круг D_r, в том числе и на его границе, функция $f(x_1, x_2)$ равна нулю. Но поскольку всякая точка вне или на границе круга D_r попадает на такую окружность, утверждение (II) теоремы доказано. Теорема А доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. "Радоновская однородность": интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^k g(p, \theta) dp$$

является однородным многочленом степени k относительно $\{\cos\theta, \sin\theta\}$ для любого целого $k \geq 0$ - необходимое свойство радоновского образа. Разумеется, при условии сходимости соответствующих интегралов. Обсудим этот момент. Итак, рассмотрим интеграл

$$I_k(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p^k \check{f}(p, \theta) dp = \int_{-\infty}^{\infty} p^k \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos\theta - t\sin\theta, p\sin\theta + t\cos\theta) dt \right) dp \tag{40}$$

В нашем случае сходимость очевидна, поскольку функция $\check{f}(p, \theta)$ по переменной p сосредоточена, как выяснилось, на отрезке $[-r, r]$. Но заметим, что в общем случае эту сходимость обеспечивает свойство (IV) для функции $f(x_1, x_2)$. В самом деле, пусть $p \neq 0$. Имеем:

$$|\check{f}(p, \theta)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos\theta - t\sin\theta, p\sin\theta + t\cos\theta) dt \right| \leq const \int_{-\infty}^{\infty} min \left\{ \frac{1}{(p\cos\theta - t\sin\theta)^{2k+2}}, \frac{1}{(p\sin\theta + t\cos\theta)^{2k+2}} \right\} dt$$
$$\leq const \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{((p\cos\theta - t\sin\theta)^2 + (p\sin\theta + t\cos\theta)^2)^{k+1}} = const \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + p^2)^{k+1}} =$$
$$= const \frac{1}{|p|^{2k+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(t/|p|)}{((t/|p|)^2 + 1)^{k+1}} = const \frac{1}{|p|^{2k+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{k+1}} = const \frac{1}{|p|^{2k+1}}$$

(константы разные). Отсюда и следует абсолютная сходимость (40) , если применить полученную оценку для $|p| \geq 1$. Эти же оценки обеспечат и абсолютную сходимость двойного интеграла

$$\iint\limits_{R^2} p^k f(p\cos\theta - t\sin\theta, p\sin\theta + t\cos\theta) dt dp, \tag{41}$$

поскольку справедливы неравенства

$$|p^k f(p\cos\theta - t\sin\theta, p\sin\theta + t\cos\theta)| \leq const \frac{|p|^k}{(t^2 + p^2)^{k+1}} \leq const \frac{(\sqrt{p^2 + t^2})^k}{(\sqrt{p^2 + t^2})^{2k+2}} = const \frac{1}{(\sqrt{p^2 + t^2})^{k+2}}$$

Значит, применима теорема Фубини - и совпадение интегралов (40) и (41). Произведём теперь замену переменных (поворот на угол θ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} p\cos\theta - t\sin\theta = x \\ p\sin\theta + t\cos\theta = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = x\cos\theta + y\sin\theta \\ t = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{array} \right.$$

в двойном интеграле. Модуль якобиана перехода равен 1, и в новых координатах получим:

$$I_k(\theta) = \iint\limits_{R^2} (x\cos\theta + y\sin\theta)^k f(x, y) dx dy = \sum_{j=0}^{k} \left(C_k^j \iint\limits_{R^2} x^j y^{k-j} f(x, y) dx dy \right) (\cos\theta)^j (\sin\theta)^{k-j} \tag{42}$$

Все интегралы в (40) сходятся абсолютно ввиду (IV), а в случае финитной функции - тем более.

Для приближения самих функций $g(p,\theta)$ можно использовать тригонометрические ряды Фурье, которые будут сходиться равномерно за счёт гладкости по переменной θ - см.[6], и также будут сходиться продифференцированные по p соответствующие ряды для производных. Итак, запишем (выбирая для удобства формул в качестве отрезка изменения переменной θ вместо $[0,2\pi]$ отрезок $[-\pi,\pi]$):

$$\begin{gathered}g(p,\theta)=\frac{\alpha_0(p)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n(p)\cos(n\theta)+\beta_n(p)\sin(n\theta)\right), \\ \alpha_n(p)=\alpha_n(g,p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi,\ \ \beta_n(p)=\beta_n(g,p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi,\end{gathered} \tag{43}$$

Поскольку после интегрирования l раз по частям получаем оценку

$$|\alpha_n(p)\cos(n\theta)|,\ |\beta_n(p)\sin(n\theta)|\leq\frac{1}{n^l}\frac{1}{\pi}max\left\{|\frac{\partial^l g}{\partial\theta^l}(p,\theta)|,\ (p,\theta)\in[-r,r]\times[-\pi,\pi]\right\},n\geq1,$$

то остаётся применить теорему Вейерштрасса о мажоранте, чтобы убедиться в упомянутой сходимости для $g(p,\theta),...,\frac{\partial^k g}{\partial p^k}(p,\theta)$. Заметим (в этом легко убедиться по индукции), что $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ являются однородными многочленами $n-$й степени относительно пары $(\xi_1,\xi_2)=(\cos\theta,\sin\theta)$. Рассмотрим фейеровские средние ряда (43)

$$\sigma_n(g,\theta)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(g,\theta),\qquad S_k(g,\theta)=\sum_{j=0}^{k}\left(\alpha_j(p)\cos(j\theta)+\beta_j(p)\sin(j\theta)\right)$$

Запишем их в виде свёртки с ядром Фейера (см.[6], стр.137-139):

$$\sigma_n(g,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,t+\theta)K_n(t)dt,\quad K_n(t)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

Ядро Фейера обладает следующими замечательными свойствами:

$$\begin{aligned}&(1)\qquad && K_n(t)\geq0\\ &(2) && K_n(t)\leq\frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2},\quad 0<\delta\leq|t|\\ &(3) && \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=1\end{aligned} \tag{44}$$

В наших предположениях относительно функции $g(p,\theta)$

$$\begin{aligned}\alpha_n(\frac{\partial g}{\partial p},p)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial g}{\partial p}(p,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi\right),\\ \beta_n(\frac{\partial g}{\partial p},p)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial g}{\partial p}(p,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi\right),\\ \alpha_n(\frac{\partial^2 g}{\partial p^2},p)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi=\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi\right),\\ \beta_n(\frac{\partial^2 g}{\partial p^2},p)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi=\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi\right)\end{aligned}$$

Следовательно, можно записать, пользуясь свойством (3) ядра Фейера:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial p}\left(\sigma_n(g,\theta)\right)=\sigma_n(\frac{\partial g}{\partial p},\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial g}{\partial p}(p,t+\theta)K_n(t)dt,\ \ \frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\sigma_n(g,\theta)\right)=\sigma_n(\frac{\partial^2 g}{\partial p^2},\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p,t+\theta)K_n(t)dt,\\ &g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(p,\theta)-g(p,t+\theta)\right)K_n(t)dt,\\ &\frac{\partial}{\partial p}\left(g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)-\frac{\partial g}{\partial p}(p,t+\theta)\right)K_n(t)dt,\\ &\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p,\theta)-\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p,t+\theta)\right)K_n(t)dt\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^3}{\partial p^3}\left(g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^3 g}{\partial p^3}(p,\theta)-\frac{\partial^3 g}{\partial p^3}(p,t+\theta)\right)K_n(t)dt,$$
$$\frac{\partial^4}{\partial p^4}\left(g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^4 g}{\partial p^4}(p,\theta)-\frac{\partial^4 g}{\partial p^4}(p,t+\theta)\right)K_n(t)dt,$$
$$\frac{\partial^5}{\partial p^5}\left(g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^5 g}{\partial p^5}(p,\theta)-\frac{\partial^5 g}{\partial p^5}(p,t+\theta)\right)K_n(t)dt$$

Пусть $\omega_0(g,\delta),\omega_1(g,\delta),\omega_2(g,\delta),\omega_3(g,\delta),\omega_4(g,\delta),\omega_5(g,\delta)$ - модули непрерывности на $[-r,r]\times[-\pi,\pi]$ непрерывных функций $g(p,\theta),\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta),...,\frac{\partial^5 g}{\partial p^5}(p,\theta)$ соответственно. Зададимся произвольным, но достаточно малым $\varepsilon>0$. Все модули непрерывности стремятся к нулю при $\delta\to 0$. Пусть $\delta_0>0$ таково, что

$$\omega_0(g,\delta_0),\omega_1(g,\delta_0),\omega_2(g,\delta_0),\omega_3(g,\delta_0),\omega_4(g,\delta_0),\omega_5(g,\delta_0)\le\varepsilon/2$$

Тогда, используя (44), и разбивая отрезок интегрирования на три части, получаем следующие оценки:

$$|g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)|,...,|\frac{\partial^5}{\partial p^5}\left(g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)\right)|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|g(p,\theta)-g(p,t+\theta)|)K_n(t)dt,$$
$$...,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|g(p,\theta)-g(p,t+\theta)|)K_n(t)dt\le\omega_0(g,\delta_0)+4\|g\|\frac{\pi^2}{2(n+1)\delta_0^2},$$
$$...,\le\omega_5(g,\delta_0)+4\|\frac{\partial^5 g}{\partial p^5}\|\frac{\pi^2}{2(n+1)\delta_0^2},$$

где $\|g\|=max\left\{|g(p,\theta)|,(p,\theta)\in[-r,r]\times[-\pi,\pi]\right\},...,\|\frac{\partial^5 g}{\partial p^5}\|=max\left\{|\frac{\partial^5 g}{\partial p^5}(p,\theta)|,(p,\theta)\in[-r,r]\times[-\pi,\pi]\right\}$. Если теперь $n_0=n_0(\varepsilon)$ таково, что все вторые слагаемые в правых частях полученных неравенств не превосходят $\varepsilon/2$, то при $n\ge n_0(\varepsilon)$ все левые части не превосходят ε. В наших предположениях мы можем также воспользоваться тем, что $\omega_0(g,\delta_0)\le\delta_0\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|,\omega_1(g,\delta_0)\le\delta_0\|\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial p}\|,...,\omega_4(g,\delta_0)\le\delta_0\|\frac{\partial^5 g}{\partial\theta\partial p^4}\|$, и получить такие оценки:

$$|g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)|,...,|\frac{\partial^4}{\partial p^4}\left(g(p,\theta)-\sigma_n(g,\theta)\right)|\le const\left(\|g\|_{W^5}\right)\varepsilon,\quad n\ge\varepsilon^{-3}\tag{45}$$

Выясним, насколько отличаются функции $F(\lambda_1,\lambda_2)$, построенные по функциям $g(p,\theta)$ и $g_\varepsilon(p,\theta)=\sigma_n(g,\theta)$ при $n\ge n_0(\varepsilon)$. Обозначим их (опуская индекс 1, но в при доказательстве ТЕРЕМЫ А мы убедились в совпадении F и F_1) соответственно $F(\lambda_1,\lambda_2)$ и $F_\varepsilon(\lambda_1,\lambda_2)$. Сразу обратим внимание на то, что константа c_0 для $g(p,\theta)$ и $g_\varepsilon(p,\theta)$ - одна и та же - см. (44) и двумя строками выше. Из этого следует, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(F(\lambda_1,\lambda_2)-F_\varepsilon(\lambda_1,\lambda_2)\right)=0$$

Далее, из представления (7) для $k=3$ и полученных оценок, справедливых $\forall(p,\theta)\in[-r,r]\times[-\pi,\pi]$, следует, что

$$|F(\lambda_1,\lambda_2)-F_\varepsilon(\lambda_1,\lambda_2)|\le 2r\lambda^{-3}\left(\|\frac{\partial^3}{\partial p^3}(g-g_\varepsilon)\|\right)$$

Далее, обозначим через $f(x_1,x_2)$ и $f_\varepsilon(x_1,x_2)$ соответствующие радоновские прообразы. Так же, как при доказательстве ТЕОРЕМЫ А, получим оценку, которую применим затем для малых по модулю λ. Имеем:

$$(F-F_\varepsilon)(\lambda_1,\lambda_2)=\int_{-r}^{r}(g-g_\varepsilon)(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})dy+\int_{-r}^{r}(g-g_\varepsilon)(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})(e^{-i\lambda y}-1)dy$$

Первое слагаемое равно нулю, и тогда

$$|(F-F_\varepsilon)(\lambda_1,\lambda_2)|\le\|g-g_\varepsilon\|\int_{-r}^{r}|(e^{-i\lambda y}-1)|dy\le 4r\|g-g_\varepsilon\|$$

Продолжим:

$$|(f-f_\varepsilon)(x_1,x_2)|\le\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}|(F-F_\varepsilon)(\lambda_1,\lambda_2)|e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}|d\lambda_1d\lambda_2\le$$
$$\le\left(\|g-g_\varepsilon\|+\|\frac{\partial^3}{\partial p^3}(g-g_\varepsilon)\|\right)\frac{1}{4\pi^2}4r\left(\iint\limits_{|\lambda|\le 1}d\lambda_1d\lambda_2+\iint\limits_{|\lambda|\ge 1}\lambda^{-3}d\lambda_1d\lambda_2\right)\le\left(\frac{2r(\pi+1)}{\pi^2}\right)\cdot\varepsilon\tag{46}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. ("Теорема о призраке и невидимке"). Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ - сосредоточенная в шаре $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le r^2$, ограниченная борелевская функция (измеримая по Борелю: прообраз всякого множества вида (a, ∞) измерим по Борелю, то есть может быть получен в результате взятия не более чем счётной совокупности операций объединения и пересечения открытых и замкнутых множеств; тогда в пересечении с каждой прямой он также будет измерим по Борелю, следовательно, измерим по Лебегу, а тогда будет интегрируемым по Лебегу ограничение $f(x_1, x_2)$ на любую прямую, а значит, преобразование Радона полностью определено, если интеграл - по высекаемому в круге отрезку - считать интегралом Лебега).

Утверждается, что если интеграл по всякой прямой от $f(x_1, x_2, x_3)$ равен нулю, то сама функция равна нулю почти всюду относительно меры Лебега.

ПОЯСНЕНИЕ названия. "Если некая сущность, сосредоточенная в ограниченном пространстве, имеющая, быть может, выход в астрал, то есть, отрицательную местами плотность, невидима (неосязаема) ни на каком луче (прямой), то она - суть призрак, то есть, мнимая сущность, плод воображения. Коротко: невидимка - это призрак!"

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать утверждение для плоского случая. Итак, пусть $\check{f}(p, \theta) \equiv 0$. Нам нужно доказать, что тогда $f(x_1, x_2) = 0$ почти всюду относительно (плоской) меры Лебега. Обратившись к доказательству ТЕОРЕМЫ А, мы видим, что все выкладки, приводящие к равенству (25), справедливы для финитной и ограниченной функции $f(x_1, x_2)$, при этом нам не нужно рассматривать только те окружности, которые обходят фиксированный круг, поскольку по всем касательным интегралы равны нулю. Итак, мы приходим к равенству (30) для всякой окружности, охватывающей всякую точку плоскости. Тогда $\forall A > 0$ и $\forall (x_1^0, x_2^0)$

$$\iint\limits_{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2 \le A^2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^A \rho \left(\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\psi + x_1^0, \rho\sin\psi + x_2^0)d\psi \right) d\rho = 0$$

Пусть $|f(x_1, x_2)| \le c \ \forall (x_1, x_2) \in R^2$. Докажем, что интеграл от $f(x_1, x_2)$ равен нулю по любому квадрату. С этой целью докажем, что всякий квадрат может быть выложен внутри объединением непересекающихся (или только касающихся) кругов с любой наперёд заданной точностью. Пусть A - произвольный квадрат на плоскости со стороной $2a$. Впишем в него круг. За его пределами остаётся множество A_1, состоящее из четырёх "углов" общей площадью $4a^2 - \pi a^2$. Отношение этих площадей $|A_1|/|A| = q = 1 - \pi/4$. Итак, часть квадрата покрыта вписанным кругом. Покроем весь квадрат достаточно мелкой равномерной квадратной сеткой и добьёмся того, чтобы образующие её квадратики (часть из них), полностью попадающие в A_1, покрывали его с относительной точностью ε_1, то есть, чтобы отношение площади непокрытой этими квадратиками части A_1 и всего $_1$ было равно ε_1. Ясно, что ε_1 может быть произвольно малым, поскольку A_1 - измеримое множество, и мы имеем приближение его внутренней меры. Непокрытую же вписанными кругами этих квадратиков часть A_1 обозначим A_2. Теперь у нас есть объединение круга "нулевого"уровня с объединением непересекающихся (или только касающихся) кругов "уровня 1". Мера (площадь) $|A_2| \le \varepsilon_1|A_1| + (1 - \varepsilon_1)q|A_1|$. И так мы можем повторять указанную процедуру, рассматривая всё более мелкую сетку и добавляя к имеющемуся объединению кругов всё новые круги, вписанные в те квадратики, которые полностью попадают в оставшееся на предыдущем шаге множество A_n. Оставшееся непокрытым после n-й итерации множество обозначаем A_{n+1} (оно состоит из объединения целых "углов" и частей квадратиков, зацепляющих границы). Так же, как на первом шаге, имеем оценку:

$$|A_{n+1}| \le \varepsilon_n|A_n| + (1 - \varepsilon_n)|A_n| = (\varepsilon_n|A_n| + (1 - \varepsilon_n))|A_n| = (q + \varepsilon_n(1 - q))|A_n| \tag{47}$$

Числа ε_n остаются в нашем распоряжении. Выберем их так, чтобы для любого $n \ge 1$ было: $(q + \varepsilon_n(1 - q)) < q_1 < 1$, например, возьмём $q_1 = \frac{12}{11}q = \frac{12-3\pi}{11} < 1$. Тогда из (47) будет следовать:

$$|A_{n+1}| \le q_1|A_n| \le q_1^2|A_{n-1}| \le ... \le q_1^n|A_1|$$

Значит, для наперёд заданного $\varepsilon > 0$ мы добьёмся того, что на некотором шаге будет $|A_{n+1}| < \varepsilon$. Мы это и хотели установить. Но тогда, в силу того, что для каждого круга интеграл по нему от $f(x_1, x_2)$ равен нулю, получаем:

$$|\iint\limits_A f(x_1, x_2)dx_1dx_2| \le \iint\limits_{A_{n+1}} |f(x_1, x_2)|dx_1dx_2 \le \varepsilon \cdot c, \quad c = max|f(x_1, x_2)|$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что

$$\iint\limits_A f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 0$$

Рассмотрим разложение множества тех точек плоскости, в которых $f(x_1, x_2)$ отлична от нуля:

$$E((x_1, x_2) : f(x_1, x_2) \ne 0) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+((x_1, x_2) : f(x_1, x_2) > \frac{1}{n}) \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^-((x_1, x_2) : f(x_1, x_2) < -\frac{1}{m}) \right)$$

Поскольку мера множества E

$$mes(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} mes(E_n^+) + \sum_{n=1}^{\infty} mes(E_n^-),$$

то если она не равна нулю, то хотя бы одно из слагаемых ненулевое. Пусть, например, $mes(E^+_{n_0}) > 0$ при некотором $n_0 \geq 1$. Почти все точки этого множества являются его точками плотности - см. [5],стр.312. Пусть (x_1^0, x_2^0) - одна из таких точек (она найдётся!). По определение точки плотности, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $d > 0$, что для квадрата P_d диаметра d с центром в точке (x_1^0, x_2^0) выполняется неравенство $mes(E^+_{n_0} \cap P_d) > (1-\varepsilon)mes(P_d) = (1-\varepsilon)d^2/2$. Пусть $|f(x_1,x_2)| \leq c \;\; \forall\, (x_1,x_2)$. Имеем:

$$\iint\limits_{P_d} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \geq \frac{1}{n_0}\cdot(1-\varepsilon)\cdot d^2/2 - c\cdot\varepsilon\cdot d^2/2 > 0, \;\; if \;\; \varepsilon < \frac{1}{1+n_0\cdot c}$$

Полученное противоречие завершает доказательство ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Измеримость $\check{f}(p,\theta)$ можно установить стандартными рассуждениями, руководствуясь собственно определениями измеримости по Лебегу (множества и функции), интеграла Лебега, а также известными предельными теоремами теории интеграла Лебега. В ПРЕДЛОЖЕНИИ 1 речь идёт именно об интегралах Лебега.

Список литературы

[1] S. Helgason, *The Radon transform*, Mir Pub. House, Moscow, 1983.

[2] G.T. Herman, *Image reconstruction from projections. The Fundamentals of Computerized Tomography*, Mir Pub. House, Moscow, 1983.

[3] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka Pub. House, Moscow, 1976.

[4] P.P. Zabreiko, A.I. Koshelev, M.A. Krasnoselski and others, *Integral equations*, Nauka Pub. House, Moscow, 1968.

[5] I.M. Vinogradov (editor-in-chief), *Mathematical Encyclopedia, vol. 4*, Soviet Encyclopedia Pub. House, Moscow, 1985.

[6] N.K. Bari, *Trigonometric Series*, Fizmatgiz Pub. House, Moscow, 1961.