Andrew Alekseevich Komissarov
Russian Technological University - MIREA,

Vernadsky av., 78,
119454, Moscow, Russia
and_rej_07@mail.ru

1 2 3 4
S(e)MR

ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том , стр. – (2022)
DOI 10.33048/semi.2022.xx.xxx

УДК 517.444, 517.988.28, 519.677
MSC 65D15

Устойчивое восстановление функции с оценками погрешностей в задаче плоской реконструктивной томографии для схемы веерного пучка

А.А.Комиссаров

18 октября 2021 г.

ABSTRACT. The construction of an algorithm for approximate calculation of the inverse Radon transform is described in relation to the method of obtaining projections in the fan beam scheme. Estimates of the method's error and its stability with respect to input data distortion in terms of parameters of the computational procedure and smooth properties of the desired function are given (with proofs).

Keywords: Radon transform, Fourier transform, integral equations, error, stability

1 Введение

В исследованиях, связанных с обращением интегральных преобразований, зачастую эффективность алгоритмов восстановления обосновывается компьютерным моделированием. Мы же сосредоточиваем внимание на аналитических оценках погрешностей. Упомянем в этом плане публикации (с совершенно другими предположениями, алгоритмами и оценками) С.И.Гончар [8] и О.В. Шестакова [9]. Неравенство (10), а также полученные нами оценки погрешностей восстановления в равномерной (но более слабой, чем исходная) метрике дают основание говорить (в духе терминологии А.Х.Бегматова [10]) о задаче обращения преобразования Радона в нашей постановке как об "ослабленно некорректной" обратной задаче, а о соответствующем восстановлении при неточных данных - как об "устойчивом" (в духе терминологии О.В.Шестакова [9]).

Оператор (преобразование) Радона определяется в плоском случае как интеграл (вообще говоря, Лебега) от функции, заданной всюду в плоскости, по прямой с параметрами p, θ:

$$R(f)(p,\theta) = \check{f}(p,\theta) = \int_{l_{p,\theta}} f(x_1,x_2)\, dl, \;\; l_{p,\theta} = \{(x_1,x_2) : x_1\cos\theta + x_2\sin\theta = p\} \tag{1}$$

Предмет нашего интереса - функции, сосредоточенные в круге $D_r : \left\{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le r^2,\ r > 0\right\}$. Интеграл (1) гарантированно существует по любой прямой, если $f(x_1,x_2)$ - ограниченная борелевская функция (тем более - непрерывная). На классе таких функций тождественное совпадение $R(f_1)$ и $R(f_2)$ влечёт совпадение f_1 и f_2 почти всюду относительно плоской меры Лебега - см. ЗАМЕЧАНИЕ 5. В стандартной параметризации и для указанных функций

$$R(f)(p,\theta) = \check{f}(p,\theta) = \int_{-\sqrt{r^2-p^2}}^{\sqrt{r^2-p^2}} f(p\cos\theta - t\sin\theta, p\sin\theta + t\cos\theta)\, dt\ , \;\; |p| < r \tag{2}$$

Будем также обозначать

$$\check{f}_\xi(p,\xi_1,\xi_2) = \int_{-\sqrt{r^2-p^2}}^{\sqrt{r^2-p^2}} f(p\xi_1 - t\xi_2, p\xi_2 + t\xi_1) dt\ , \;\; |p| < r \tag{3}$$

Таким образом, $\check{f}(p,\theta) = \check{f}_\xi(p,\cos\theta,\sin\theta)$. Мы будем рассматривать банаховы пространства (обозначаемые $W_n^{r,x_1,x_2} = W_n^r$) функций, сосредоточенных в круге D_r, имеющих непрерывные частные производные до порядка n включительно ($n = 0$ соответствует случаю непрерывных функций) с нормой

$$\|f\|_{W_n^{r,x_1,x_2}} = \|f\|_{W_n^r} = max\left\{ \sup_{(x_1,x_2)\in D_r} \left| \frac{\partial^{l_1+l_2} f}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}}(x_1,x_2) \right|,\ \ 0 \le l_1 + l_2 \le n \right\}$$

Мы решаем задачу восстановления функции (оригинала) $f(x_1,x_2) \in W_2^{r,x_1,x_2}$ по неполному набору проекций - значений её преобразования Радона (изображения) $\check{f}(p,\theta)$. Мы предъявим здесь алгоритм такого восстановления и дадим

*KOMISSAROV, A.A., STABLE RESTORATION OF THE FUNCTION WITH ERROR ESTIMATES IN THE PROBLEM OF PLANE RECONSTRUCTIVE TOMOGRAPHY FOR THE FAN BEAM SCHEME

‡)

§*Поступила 18 октября 2021 г., опубликована*

оценки его точности и устойчивости для схемы веерного пучка (всю конструкцию нетрудно перенести на более простую схему параллельного пучка). В нашей ситуации гладкость функции $f(x_1,x_2)$ влечёт не меньшую гладкость её радоновского образа $\check{f}(p, cos\theta, \sin\theta)$, что следует из правил дифференцирования с учётом обнуления на концах отрезка интегрирования. Например ($|p|<r$),

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial p}(p,\cos\theta,\sin\theta) = \frac{\partial \check{f}}{\partial p}(p,\xi_1,\xi_2) = -\frac{p}{\sqrt{r^2-p^2}}(f(\cdot,\cdot)\mid_{t=\sqrt{r^2-p^2}} + f(\cdot,\cdot)\mid_{t=-\sqrt{r^2-p^2}}) +$$
$$+\int_{-\sqrt{r^2-p^2}}^{\sqrt{r^2-p^2}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot,\cdot)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\cdot,\cdot)\sin\theta \right\} dt = \int_{-\sqrt{r^2-p^2}}^{\sqrt{r^2-p^2}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot,\cdot)\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\cdot,\cdot)\xi_2 \right\} dt,$$

поскольку безынтегральные слагаемые обращаются в нуль (символ $(\cdot,\cdot)$ означает, что значение функции берётся в точке $(x_1(t),x_2(t)) = (p\xi_1 - t\xi_2, p\xi_2 + t\xi_1)$. Для радоновских образов мы будем оперировать нормой

$$\|g\|_{W_n^{r,p,\theta}} = max\left\{ \sup_{(p,\theta):\ |p|\le r} \left| \frac{\partial^{l_1+l_2} g}{\partial p^{l_1}\partial\theta^{l_2}}(p,\theta)\right|,\ 0\le l_1+l_2\le n \right\} \tag{4}$$

Произведя соответствующие выкладки, получим:

$$\|\check{f}\|_{W_n^{r,p,\theta}} \le const(r,n)\cdot \|f\|_{W_n^{r,x_1,x_2}},\ \ n=0,1,... \tag{5}$$

В частности, справедливо неравенство:

$$\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \le 8.1r(\max(1,r))^2\|f\|_{W_2^{r,x_1,x_2}} \tag{6}$$

Таким образом, линейный оператор Радона $R: W_n^r \to W_n^{r,p,\theta}$ непрерывно действует в банахово пространство сосредоточенных в полосе $|p|\le r,\ 2\pi-$ периодических функций, обладающих конечной нормой (4), осуществляя взаимнооднозначное отображение W_n^r на его образ $R(W_n^r)\subset W_n^{r,p,\theta}$. Инъективность следует из существования (гарантированного для нашего финитного случая выполнением условий Радона - см. полный русский перевод его статьи в книге [1]) левого обратного оператора R_l^{-1} (Радон доказал, что в случае хорошо убывающей непрерывной функции $R_l^{-1}(R(f)) = f$). В интересующем нас в дальнейшем случае $n=2$ формулу обращения можно записать (см. в книге [2], стр.315) в виде

$$f(x_1,x_2) = R_l^{-1}(g)(x_1,x_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)dp}{p - x_1\cos\theta - x_2\sin\theta}\right)d\theta = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)dp}{p-\rho\cos(\theta-\varphi)}\right)d\theta, \tag{7}$$

Здесь $(x_1,x_2) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, $g=\check{f}$, а внутренний интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оператор R_l^{-1} непрерывно действует из банахова пространства $W_2^{r,p,\theta}$ в банахово пространство $\tilde{W}_0^{r_1,x_1,x_2}$ (непрерывных в круге D_{r_1}, но не обязательно сосредоточенных в нём функций) $\ \forall r_1>0$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 1. Непрерывность функции $R_l^{-1}(g)(x_1,x_2)$ доказывается в СЛЕДСТВИИ 1. Линейность оператора очевидна. Докажем его ограниченность. Обратимся к формуле (7). Внутренний интеграл запишем так:

$$I_v(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)}{p-p_0}\,dp = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{p_0-\varepsilon}(\ )\,dp + \int_{p_0+\varepsilon}^{\infty}(\ )\,dp\right),\ p_0 = \rho\cos(\theta-\varphi)$$

Оценим разность между $I_v(\theta)$ и $I_{v,\varepsilon}(\theta) = \int_{-\infty}^{p_0-\varepsilon}(\ )\,dp + \int_{p_0+\varepsilon}^{\infty}(\ )\,dp$. Имеем:

$$|I_v(\theta) - I_{v,\varepsilon}(\theta)| = |\lim_{\substack{\delta\to 0+0\\ \delta<\varepsilon}}\left(\int_{p_0-\varepsilon}^{p_0-\delta}(\ )dp + \int_{p_0+\delta}^{p_0+\varepsilon}(\ )dp\right)| \le$$
$$\le \sup_{0<\delta<\varepsilon}\int_\delta^\varepsilon\left|\frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p_0+x,\theta) - \frac{\partial g}{\partial p}(p_0-x,\theta)}{x}\right|dx \le \sup_{0<\delta<\varepsilon}\int_\delta^\varepsilon \frac{\sup\limits_{(p,\theta):\ |p|\le r}|\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p,\theta|)2x}{x}dx \le 2\varepsilon\|g\|_{W_2^{r,p,\theta}}$$

Пусть

$$I(g) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} I_v(\theta)\,d\theta,\ I_\varepsilon(g) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} I_{v,\varepsilon}(\theta)\,d\theta$$

Пользуясь установленными выше неравенствами, получаем:

$$|I(g) - I_\varepsilon(g)| \le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}|I_v(\theta) - I_{v,\varepsilon}(\theta)|d\theta \le \left(\frac{1}{\pi}\|g\|_{W_2^{r,p,\theta}}\right)\varepsilon \tag{8}$$

Очевидно, что

$$|I_{v,\varepsilon}(\theta)| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)|\,dp = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-r}^{r}|\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)|\,dp \le \frac{2r}{\varepsilon}\sup_{(p,\theta):\ |p|\le r}|\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)|$$

Отсюда

$$|I_\varepsilon(g)| \le (\frac{r}{\pi}\|g\|_{W_2^{r,p,\theta}})\frac{1}{\varepsilon}$$

и

$$\forall (x_1,x_2)\in D_{r_1} \quad |f(x_1,x_2)| \le \inf_{\varepsilon>0}(|I(g)-I_\varepsilon(g)|+|I_\varepsilon(g)|) \le \inf_{\varepsilon>0}(\frac{\varepsilon}{\pi}+\frac{r}{\pi\varepsilon})\|g\|_{W_2^{r,p,\theta}} = \frac{2\sqrt{r}}{\pi}\|g\|_{W_2^{r,p,\theta}} \tag{9}$$

Итак, доказано неравенство

$$\|R_l^{-1}(g)\|_{\tilde{W_0}^{r_1,x_1,x_2}} \le \frac{2\sqrt{r}}{\pi}\|g\|_{W_2^{r,p,\theta}}, \tag{10}$$

которое означает, что линейный оператор $R_l^{-1}: W_2^{r,p,\theta} \to \tilde{W_0}^{r_1,x_1,x_2}$ непрерывен, и его норма не превосходит $\dfrac{2\sqrt{r}}{\pi}$.
В частности, если $g=\check{f}$, причём $f\in W_2^{r,x_1,x_2}$, то

$$\|f(x_1,x_2)\|_{W_0^{r,x_1,x_2}} = \|f(x_1,x_2)\|_{\tilde{W_0}^{r_1,x_1,x_2}} \le \frac{2\sqrt{r}}{\pi}\|\check{f}(p,\theta)\|_{W_2^{r,p,\theta}}, \tag{11}$$

Из (2) сразу получаем оценку:

$$|\check{f}(p,\theta)| \le \int_{-\sqrt{r^2-p^2}}^{\sqrt{r^2-p^2}} |f(p\cos\theta - t\sin\theta, p\sin\theta + t\cos\theta)|\,dt \le 2\sqrt{r^2-p^2}\|f\|_{W_0^{r,x_1,x_2}} \le 2r\|f\|_{W_2^{r,x_1,x_2}} \tag{12}$$

Нетрудно найти выражения для частных производных функции $\check{f}(p,\theta)$ и вывести следующую оценку:

$$\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \le 8.1r(\max(1,r))^2\|f\|_{W_2^{r,x_1,x_2}} \tag{13}$$

Таким образом, норма оператора $R: W_2^{r,x_1,x_2} \to W_2^{r,p,\theta}$ не превосходит $8.1r(\max(1,r))^2$. Мы будем отправляться от классической формулы обращения (7), но преобразуем её (пользуясь свойствами радоновского образа: $\check{f}(-p,\theta+\pi)=\check{f}(p,\theta)$, $\frac{\partial\check{f}}{\partial p}(-p,\theta+\pi) = -\frac{\partial\check{f}}{\partial p}(p,\theta)$) к более подходящему для наших целей виду:

$$I_\varepsilon(\check{f}) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\pi/2-\delta}^{3\pi/2-\delta}\Big(\int_{\{(-\infty,\rho\cos(\theta-\varphi)-\varepsilon]\cup[\rho\cos(\theta-\varphi)+\varepsilon,\infty)\}\cap[-r,r]} \frac{\frac{\partial\check{f}}{\partial p}(p,\theta)dp}{p-\rho\cos(\theta-\varphi)}\Big)\,d\theta = -\frac{1}{2\pi^2}\iint_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} G(p,\theta)\,dpd\theta \tag{14}$$

Здесь $\Omega_{\varepsilon,\delta}$ имеет очевидный смысл, $G(p,\theta) = \dfrac{\frac{\partial\check{f}}{\partial p}(p,\theta)}{p-\rho\cos(\theta-\varphi)}$, а δ - произвольное положительное число, которое мы выберем из соображений удобства.

2 Схема веерного пучка и предварительные расчёты

Нас интересует следующая ситуация. Предположим, мы располагаем значениями преобразования Радона $\check{f}(p,\theta)$ в некотором конечном наборе точек (p_k,θ_k). Требуется по этой информации получить приближённые значения исходной (но неизвестной нам) функции $f(x_1,x_2)$ в произвольной точке (x_1,x_2). Нам также желательно оценить сверху погрешность $|f(x_1,x_2)-f_{pr}(x_1,x_2)|$. Представим себе круг радиуса r с центром в начале координат. Образуем пачку прямых ("лучей"), крайние из которых касаются границы круга, а центральная совпадает с осью X_1. В пачке $2N+1$ прямых, k-я прямая проходит через фокус $O_1(-R_1,0)$ и некоторую точку M_k (точку регистрации луча, "приёмник"), расположенную на отрезке, перпендикулярном оси X_1 и соединяющем точки $A(-R_1-R_2,-R_3/2)$ и $B(-R_1-R_2,R_3/2)$. Точка M_k находится на расстоянии $|\delta_k|$ от точки $O_2(-R_1-R_2,0)$. Прямые пронумерованы так, что прямая, проходящая через точку B, получила номер $-N$, прямая, проходящая через точку O_2, - номер 0, прямая, проходящая через точку A, - номер N. То есть, точки пронумерованы в соответствии с направлением от B к A. Введём координаты на направленном отрезке $\overrightarrow{BA}$, взяв за начало точку O_2, и охарактеризуем положение точки M_k её координатой δ_k. Тогда $\delta_{-k}=-\delta_k$. Полагаем $\delta_k=\dfrac{k}{N}R_3/2$. Пусть

$$x_1\cos\theta_k + x_2\sin\theta_k - p_k \tag{15}$$

- уравнение k-й прямой l_k. Крайние прямые в пачке касаются окружности $x_1^2+x_2^2=r^2$. Пусть L_N - точка касания прямой l_N с окружностью, $O=(0,0)$ - начало координат. Имеем:

$$\operatorname{tg}\angle(O_2O_1A) = \frac{R_3/2}{R_2} = \operatorname{tg}\angle(OO_1L_N) = \frac{r}{\sqrt{R_1^2-r^2}}$$

Отсюда

$$R_2 = \frac{R_3\sqrt{R_1^2-r^2}}{2r}, \quad R_3 = R_2\frac{2r}{\sqrt{R_1^2-r^2}}, \quad r = \frac{R_1R_3}{\sqrt{4R_2^2+R_3^2}}$$

Таким образом, из четырёх параметров схемы R_1, R_2, R_3, r только три (любые три) могут быть независимыми. Пусть C_k, D_k - точки пересечения k-й прямой l_k с окружностью, L_k - середина отрезка C_kD_k. Тогда $|OL_k| = |p_k|, OL_k \perp l_k (0 < |k| < N)$. Удобно рассматривать прямую l_k как луч, направленный в правую полуплоскость. Это определяет в соответствии со сказанным выше выбор нормального вектора $\vec{n}_k^+$, а значит, и угла θ_k. Имеем: $\theta_k = \zeta_k + \pi/2$, где ζ_k - угол наклона l_k к оси X_1. Если $k > 0$, то $\zeta_k > 0$, а если $k < 0$, то $\zeta_k < 0$. Подставим координаты точки O_1 в (15): $-R_1 \cos\theta_k - p_k = 0$, или:

$$p_k = -R_1 \cos(\zeta_k + \pi/2) = R_1 \sin\zeta_k$$

Отсюда следует, что $p_k > 0$ для $k > 0$, $p_k < 0$ для $k < 0$, $p_0 = 0, p_{-k} = -p_k$. Итак,

$$p_k = -R_1 \cos(\theta_k) \tag{16}$$

Для $k = 0$ и $k = \pm N$ эта формула также верна. Так как $0 < \theta_k < \pi$, то из (16) получаем: $\theta_k = \arccos(-\dfrac{p_k}{R_1})$

Теперь представим себе, что центральный луч l_0, а вместе с ним и все лучи l_k мы повернули на угол $\varDelta_0$ против часовой стрелки вокруг точки O. Очевидно, на тот же угол повернутся и нормальные векторы $\vec{n}_k^+$. Полученную пачку векторов назовём первой пачкой. Точно так же повернём первую пачку на угол $\varDelta$ и т.д., пока не получим последнюю пачку с номером M. Пусть пара $(p_{k,j}, \theta_{k,j})$ определяет k-й луч в j-й пачке; $k = -N, ..., N; j = 1, ..., M$. Тогда

$$\theta_{k,j} = \theta_k + \varDelta_0 + (j-1)\varDelta, \ \ p_{k,j} = p_k$$

Откуда находим соотношение между $\theta_{k,j}$ и $p_{k,j} = p_k$: $\quad \theta_{k,j} = \arccos(-\dfrac{p_k}{R_1}) + \varDelta_0 + (j-1)\varDelta$

То есть, точки $(p_{k,j}, \theta_{k,j})$ расположены при фиксированном j на графике функции

$$\theta = \psi_j(p) = \arccos(-\frac{p}{R_1}) + \varDelta_0 + (j-1)\varDelta, \tag{17}$$

который получается сдвигом графика функции $\theta = \psi_j(p) = \arccos(-\dfrac{p}{R_1})$ на константу вдоль оси θ. В техническом устройстве бывает важно, чтобы точки регистрации лучей (точки $M_{k,j}$) были бы расположены в какой-то одной полуплоскости (желательно близкой к нижней относительно данной системы координат). Это условие будет выполнено, если все $\theta_{k,j}$ уместятся на отрезке длины π. Как видно из формулы (14), мы не понесём при этом никакой потери информации. Итак, мы потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\theta_{N,M} - \theta_{-N,1} \le \pi$. То есть,

$$\left[\arccos(-\frac{r}{R_1}) + \varDelta_0 + (M-1)\varDelta\right] - \left[\arccos(\frac{r}{R_1}) + \varDelta_0\right] = \arccos(-\frac{r}{R_1}) - \arccos(\frac{r}{R_1}) + (M-1)\varDelta \le \pi$$

Поскольку $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$, последнее неравенство перепишется в виде

$$(M-1)\varDelta \le 2\arccos(\frac{r}{R_1}) \tag{18}$$

Оно будет выполнено, если, например, $\varDelta = \frac{\pi}{M-1} - \frac{4}{M(M-1)}, r/R_1 = 1/M, \ M \ge 5$. Действительно, в этом случае

$$\pi - 2\arccos(\frac{r}{R_1}) = -2(\arccos\frac{1}{M} - \arccos 0) = \frac{2}{M}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \ \ (\xi \in (0, 1/M)) \le \frac{2}{M}\frac{1}{\sqrt{1-1/25}} < \frac{4}{M} = \pi - (M-1)\varDelta$$

В дальнейшем предполагаем, что условие (18) выполнено. Укажем ещё выражение p_k через δ_k. Пусть $1 \le k \le N$. Тогда $|OL_k| = p_k, \operatorname{tg}\zeta_k = \dfrac{\delta_k}{R_2} = \dfrac{p_k}{\sqrt{R_1^2 - p_k^2}}$, откуда

$$p_k = R_1 \frac{\delta_k}{\sqrt{R_2^2 + \delta_k^2}} \tag{19}$$

Поскольку $\delta_0 = p_0 = 0, \delta_{-k} = -\delta_k, p_{-k} = p_k$, то (19) верно для всех $k \in \{-N, ..., N\}$.

Примем в формуле (14) $\delta = \pi/2 - \theta_{-N,1}$.Все кривые (17) являются графиками возрастающих функций и целиком пропадают в прямоугольник $D = [-r, r] \times [\pi/2 - \delta, 3\pi/2 - \delta]$.

Зафиксируем пару $(x_1, x_2) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, зафиксируем ε и будем искать формулу для приближённого вычисления двойного интеграла

$$\iint\limits_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} G(p,\theta)\, dpd\theta,$$

где $\Omega_{\varepsilon,\delta}$ - суть прямоугольник D без выброшенной "ε - полосы" кривой $\{(p,\theta) : p = p_0(\theta) = \rho\cos(\theta - \varphi)\}$ ("особой кривой"), а $G(p,\theta) = \dfrac{\frac{\partial \check{f}}{\partial p}(p,\theta)}{p - p_0}$. Для хорошего вычисления частной производной $\frac{\partial \check{f}}{\partial p}(p,\theta)$ желательно располагать значениями функции $\check{f}(p,\theta)$ на прямых, параллельных оси p (на горизонталях). Основная наша идея состоит в том, чтобы осуществить замену переменных так, чтобы все кривые (17) перешли бы в горизонтали, но чтобы точки $(p_{k,j}, \theta_{k,j})$ при фиксированном k по-прежнему лежали бы на вертикалях. По этой причине мы называем наш алгоритм вычисления "выпрямляющим алгоритмом". Полагаем

$$\left\{ \begin{array}{c} x = p \\ y = \theta - \psi(p) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p = x \\ \theta = y + \psi(x) \end{array} \right. , \quad \psi(x) = \arccos(-\frac{x}{R_1}) \tag{20}$$

Уравнения (17) перейдут в уравнения горизонталей: $y = \varDelta_0 + (j-1)\varDelta = y_j$. Соответственно, точки $(p_{k,j}, \theta_{k,j}) = (p_k, \theta_{k,j})$ перейдут в точки $(x_k, y_j) = (p_k, y_j)$, то есть, при фиксированном j они лежат на горизонтали, а при фиксированном k -на вертикали. Ясно, что отображение $\varPhi : (p, \theta) \to (x, y)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами D и $\varPhi(D) = D^*$, $\Omega_{\varepsilon,\delta}$ и $\varPhi(\Omega_{\varepsilon,\delta}) = \Omega^*_{\varepsilon,\delta}$. Якобиан перехода от переменных (p, θ) к переменным (x, y) равен 1. Заметим, что производная $\psi'(x) = (\arccos(-\frac{x}{R_1}))' = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 - x^2}}$ определена и непрерывна на отрезке $[-r, r]$, поскольку $r < R_1$. Замена переменных в двойном интеграле даёт нам:

$$I_\varepsilon(\check{f}) = -\frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{\Omega^*_{\varepsilon,\delta}} G(p(x,y), \theta(x,y)) dxdy = -\frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{\Omega^*_{\varepsilon,\delta}} \frac{\frac{\partial \check{f}}{\partial p}(x, y + \arccos(-\frac{x}{R_1}))}{x - \rho\cos(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi)} dxdy \tag{21}$$

Введём обозначения:

$$\begin{gathered} h(x,y) = \frac{\partial \check{f}}{\partial p}(x, y + \arccos(-\frac{x}{R_1})) = \frac{\partial \check{f}}{\partial p}(x, y + \psi(x)) \\ \lambda(x,y) = x - \rho\cos(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi) = x - \rho\cos(y + \psi(x) - \varphi) \end{gathered} \tag{22}$$

Заметим, что множество $\Omega^*_{\varepsilon,\delta}$ характеризуется как подмножество тех точек (x, y) множества D^*, для которых $|\lambda(x,y)| \geq \varepsilon$. Перепишем (21) в виде

$$I_\varepsilon(\check{f}) = -\frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{\Omega^*_{\varepsilon,\delta}} \frac{h(x,y)}{\lambda(x,y)} dxdy \tag{23}$$

Мы располагаем значениями функции $g_{sp}(x,y) = \check{f}(x, y + \psi(x))$ в точках вида (x_k, y_j):

$$g_{sp}(x_k, y_j) = \check{f}(x_k, y_j + \psi(x_k)) = \check{f}(p_{k,j}, \theta_{k,j})$$

Условимся обозначать в дальнейшем

$$\bar{F}_{k,j} = \check{f}(p_{k,j}, \theta_{k,j})$$

Найдём связь между функциями $h(x,y)$ и $g_sp(x,y)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \check{f}}{\partial p}(p(x,y), \theta(x,y)) \frac{\partial p}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \check{f}}{\partial \theta}(p(x,y), \theta(x,y)) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) = \\ &= \frac{\partial \check{f}}{\partial p}(x, y + \psi(x)) + \frac{\partial \check{f}}{\partial \theta}(x, y + \psi(x))\psi'(x) = h(x,y) + \frac{\partial \check{f}}{\partial \theta}(x, y + \psi(x)) \frac{1}{\sqrt{R_1^2 - x^2}} \\ &\frac{\partial g_{sp}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \check{f}}{\partial p}(p(x,y), \theta(x,y)) \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \check{f}}{\partial \theta}(p(x,y), \theta(x,y)) \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \check{f}}{\partial \theta}(x, y + \psi(x)) \end{aligned} \tag{24}$$

Следовательно,

$$h(x,y) = \frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y) - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 - x^2}} \frac{\partial g_{sp}}{\partial y}(x,y) \tag{25}$$

Получаем выражение интеграла в (23) через частные производные функции $g_{sp}(x,y)$, значениями которой мы располагаем в точках прямоугольной (но неравномерной по x) сетки:

$$I_\varepsilon(\check{f}) = -\frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{\Omega^*_{\varepsilon,\delta}} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y) - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 - x^2}} \frac{\partial g_{sp}}{\partial y}(x,y)}{\lambda(x,y)} dxdy$$

Появлением второго слагаемого в (25) мы как бы расплачиваемся за "выпрямление" сетки исходных данных. Пусть

$$I_\varepsilon^{(1)}(\check{f}) = -\frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{\Omega^*_{\varepsilon,\delta}} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y)}{\lambda(x,y)} dxdy$$

$$I_\varepsilon^{(2)}(\check{f}) = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{\Omega^*_{\varepsilon,\delta}} \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{\lambda(x,y)\sqrt{R_1^2 - x^2}} dxdy \tag{26}$$

Тогда

$$I_\varepsilon(\check f) = I_\varepsilon^{(1)}(\check f) + I_\varepsilon^{(2)}(\check f)$$

Выясним, как устроены множества D^* и $\Omega^*_{\varepsilon,\delta}$. Прежде всего, кривые $p = p^*$ и $\theta = \theta^*$ (то есть, вертикали и горизонтали), лежащие в области D, перейдут в кривые вида $x = p^*$ (вертикали) и

$$y = \theta^* - \psi(x) = \theta^* - \arccos(-\frac{x}{R_1})$$

В частности, боковые границы области D перейдут в вертикальные отрезки, а нижние и верхние границы области D - соответственно в кривые

$$y = \pi/2 - \delta - \arccos(-\frac{x}{R_1}) = y_n(x), \qquad y = 3\pi/2 - \delta - \arccos(-\frac{x}{R_1}) = y_v(x)$$

(горизонтальные отрезки переходят в семейство кривых, представляющих собой смещённые вдоль оси y графики функции $y = -\arccos(-\frac{x}{R_1})$). Посмотрим теперь, во что перейдут границы "ε-полосы" - кривые, определяемые уравнениями

$$p = \rho\cos(\theta - \varphi) - \varepsilon, \quad p = \rho\cos(\theta - \varphi) + \varepsilon$$

Как мы покажем ниже, образы этих кривых можно рассматривать как графики гладких функций, которые мы соответственно обозначим $x_{-\varepsilon}(y)$ и $x_\varepsilon(y)$. Эти функции возникают как неявные функции, определяемые соответственно уравнениями

$$x - \varepsilon - \rho\cos(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi) = \lambda(x,y) - \varepsilon = 0, \quad x + \varepsilon - \rho\cos(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi) = \lambda(x,y) + \varepsilon = 0$$

Мы имеем следующие соотношения:

$$x'_{\pm\varepsilon}(y) = -\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y)} = -\frac{\rho\sin(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi)}{1 + \rho\sin(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi)\frac{1}{\sqrt{R_1^2 - x^2}}}, \tag{27}$$

где в одном случае надо положить $x = x_\varepsilon(y)$, а в другом случае $x = x_{-\varepsilon}(y)$. Мы будем считать всегда, что $\rho < r$. В дальнейшем будем предполагать также, что $r < \frac{\sqrt2}{2}R_1 = \frac{R_1}{\sqrt2}$ (то есть, "угол обзора"в нашей схеме меньше 90°). Тогда

$$|\rho\sin(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi)\frac{1}{\sqrt{R_1^2 - r^2}}| \le \frac{r}{\sqrt{R_1^2 - x^2}} < 1$$

и (так как $a \ge -|a|$)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y) = 1 + \rho\sin(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi)\frac{1}{\sqrt{R_1^2 - x^2}} > 1 - 1 = 0$$

Рассмотрим вопрос о нахождении координаты x точки пересечения горизонтали $y = \widetilde{y}$ и образа кривой $p = \rho\cos(\theta - \varphi) \pm \varepsilon$ (две такие кривые образуют боковые границы выброшенной области $\widetilde{\Omega}^*_{\varepsilon,\delta}$, а при $\varepsilon = 0$ речь идёт об "особой кривой"). Итак, пусть $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ - точка пересечения. Мы должны из соотношения

$$\widetilde{x} = \rho\cos(\widetilde{y} + \arccos(-\frac{\widetilde{x}}{R_1}) - \varphi) \pm \varepsilon \tag{28}$$

выразить $\widetilde{x}$ через $\widetilde{y}$. Перепишем (28) в виде

$$\widetilde{x} = \rho\left(\cos(\widetilde{y} - \varphi)(-\frac{\widetilde{x}}{R_1}) - \sin(\widetilde{y} - \varphi)\sqrt{1 - \frac{\widetilde{x}^2}{R_1^2}}\right) \pm \varepsilon,$$

или:

$$\widetilde{x}\left(1 + \frac{\rho}{R_1}\cos(\widetilde{y} - \varphi)\right) = \frac{\rho}{R_1}\sin(\varphi - \widetilde{y})\sqrt{R_1^2 - \widetilde{x}^2} \pm \varepsilon$$

Обозначим

$$A = 1 + \frac{\rho}{R_1}\cos(\widetilde{y} - \varphi), \; B = \frac{\rho}{R_1}\sin(\varphi - \widetilde{y})$$

Тогда

$$A\widetilde{x} \mp \varepsilon = B\sqrt{R_1^2 - \widetilde{x}^2} \tag{29}$$

Из (29) следует, что знак

$$sign(A\,\widetilde{x}\mp\varepsilon) = sign(B) \tag{30}$$

Из (29) следует также:

$$A^2\,\widetilde{x}^2\mp 2A\varepsilon\,\widetilde{x}+\varepsilon^2 = B^2(R_1^2-\widetilde{x}^2),$$

или:

$$\widetilde{x}^2\,(A^2+B^2)\mp(2A\varepsilon)\,\widetilde{x}-(B^2R_1^2-\varepsilon^2) = 0,$$

откуда

$$x_{\pm\varepsilon} = \widetilde{x} = \frac{\pm A\varepsilon\pm\sqrt{A^2\varepsilon^2+(B^2R_1^2-\varepsilon^2)(A^2+B^2)}}{A^2+B^2} \tag{31}$$

Теперь предположим, что $r<\frac{1}{2}R_1$ (сузим "веер"). $A>1-\rho/R_1>1-r/R_1>1-1/2=1/2>0$. Значит, $A^2+B^2>0$. Если $B>0$, то из (31) следует, что

$$A\,\widetilde{x}>\pm\varepsilon, \tag{32}$$

а если $B<0$, то должно быть

$$A\,\widetilde{x}<\pm\varepsilon \tag{33}$$

Перепишем выражение C под корнем в (31) виде

$$C = B^2R_1^2(A^2+B^2)-\varepsilon^2B^2 = B^2\left(R_1^2(A^2+B^2)-\varepsilon^2\right)$$

Выберем ε_0 таким, чтобы при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$ было

$$R_1^2(A^2+B^2)-\varepsilon^2\ge 0 \tag{34}$$

Неравенство (34) будет заведомо выполняться, если будет выполняться неравенство

$$2\varepsilon^2\le R_1^2A^2 \tag{35}$$

Но мы знаем, что $A>1/2$, значит, $R_1^2A^2>(R_1/2)^2$, и (35) будет выполнено при

$$2\varepsilon^2\le(R_1/2)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \varepsilon\le\frac{1}{2\sqrt{2}}R_1$$

Итак, мы считаем, что

$$\varepsilon\le\varepsilon_0\le\frac{1}{2\sqrt{2}}R_1 \tag{36}$$

Тогда $\sqrt{C}>|B|\varepsilon$. Кроме того,

$$|B|\le\rho/R_1\le r/R_1<1/2<A \tag{37}$$

Пусть $B>0$. Тогда, если в (31) взять перед корнем знак "минус" , то для $+\varepsilon$ получаем:

$$A\,\widetilde{x} = Ax_\varepsilon<\frac{A^2\varepsilon}{A^2+B^2}<\varepsilon,$$

а для $-\varepsilon$ получаем (см.(37)):

$$A\,\widetilde{x} = Ax_{-\varepsilon}<\frac{-A^2\varepsilon-A|B|\varepsilon}{A^2+B^2}<\frac{-A^2\varepsilon-B^2\varepsilon}{A^2+B^2} = -\varepsilon$$

В любом случае получаем противоречие с (32). Значит, при $B>0$ в (31) надо перед корнем брать знак "плюс". Пусть теперь $B<0$. Если в (31) взять перед корнем знак "плюс" , то для $-\varepsilon$ получаем:

$$A\,\widetilde{x} = Ax_{-\varepsilon}>\frac{-A^2\varepsilon}{A^2+B^2}>\frac{-A^2\varepsilon-B^2\varepsilon}{A^2+B^2} = -\varepsilon,$$

а для $+\varepsilon$ получаем:

$$A\,\widetilde{x} = Ax_\varepsilon>\frac{A^2\varepsilon+A|B|\varepsilon}{A^2+B^2}>\frac{A^2\varepsilon+B^2\varepsilon}{A^2+B^2} = \varepsilon$$

В обоих случаях получаем противоречие с (33). Значит, при $B<0$ в (31) надо брать знак "минус" . Поскольку для $B\ge 0$ $|B|=B$, а для $B<0$ $|B|=-B$, то в итоге наших рассуждений мы получаем формулы:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(\widetilde{y}) &= \frac{A\varepsilon+B\sqrt{R_1^2(A^2+B^2)-\varepsilon^2}}{A^2+B^2}, \\ x_{-\varepsilon}(\widetilde{y}) &= \frac{-A\varepsilon+B\sqrt{R_1^2(A^2+B^2)-\varepsilon^2}}{A^2+B^2}, \\ A &= 1+\frac{\rho}{R_1}\cos(\widetilde{y}-\varphi),\ B=\frac{\rho}{R_1}\sin(\varphi-\widetilde{y}), \end{aligned} \tag{38}$$

однозначно определяющие координату $\widetilde{x}$ точки пересечения. То есть, такая точка ровно одна. Кроме того, функции $x_{\pm\varepsilon}(y)$ определены на всей оси и непрерывно дифференцируемы любое число раз, а также 2π-периодичны. Так как $A>0$ и $\varepsilon>0$, то $x_{-\varepsilon}(y)<x_\varepsilon(y)$. При $\varepsilon=0$ мы получаем уравнение "особой кривой".

3 Построение функционала ("выпрямляющего функционала" , "выпрямляющего алгоритма"), вычисляющего приближённое значение функции в заданной точке по известным проекциям для схемы веерного пучка

Сведём интеграл $I_\varepsilon^{(1)}(\check{f})$ к интегралу по прямоугольнику $[-r,r]\times[\Delta_0,\Delta_0+(M-1)\Delta]$, целиком попадающему в D^* при выполнении (18), поскольку значениями вне его мы всё равно не располагаем. Оценку потери при этом см. ниже. Оставшийся интеграл сведём к повторному, причём внутренний интеграл будем вычислять по переменной x, а внешний - по переменной y. Итак, принимаем пока приближённое равенство:

$$I_\varepsilon^{(1)}(\check{f}) \approx -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\Delta_0}^{\Delta_0+(M-1)\Delta} Z_\varepsilon^{(1)}(y)\,dy = \tilde{I}{}_\varepsilon^{(1)}(\check{f}), \qquad Z_\varepsilon^{(1)}(y) = \int\limits_{[-r,x_{-\varepsilon}(y)]\cup[x_\varepsilon(y),r]} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx}{\lambda(x,y)} \tag{39}$$

Интеграл в (39) вычислим по формуле трапеций по значениям функции $Z_\varepsilon^{(1)}(y)$ в точках $y_j=\Delta_0+(j-1)\Delta$, $j=1,...,M$. Получаем ещё одно приближённое равенство:

$$\tilde{I}{}_\varepsilon^{(1)}(\check{f}) \approx \overset{\approx}{I}{}_\varepsilon^{(1)}(\check{f}) = \left(-\frac{1}{2\pi^2}\right)\frac{\Delta}{2}\left\{Z_\varepsilon^{(1)}(y_1)+Z_\varepsilon^{(1)}(y_M)+\sum_{j=2}^{M-1} Z_\varepsilon^{(1)}(y_j)\right\} \tag{40}$$

Пусть j фиксировано. Имеем:

$$Z_\varepsilon^{(1)}(y_j) = \int_{-r}^{x_{-\varepsilon}(y_j)} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx + \int_{x_\varepsilon(y_j)}^{r} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx \tag{41}$$

Предположим, что $x_{-\varepsilon}(y_j) > -r$. Найдётся номер $i_1=i_1(j)$ такой, что

$$p_{i_1} \le x_{-\varepsilon}(y_j) < p_{i_1+1} \tag{42}$$

Тогда внутренний интеграл ("левый")

$$\int_{-r}^{x_{-\varepsilon}(y_j)} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx = \sum_{i=-N}^{i_1-1}\int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx + \int_{p_{i_1}}^{x_{-\varepsilon}(y_j)} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx \tag{43}$$

(если $i_1=0$, то сумма отсутствует). Принимаем приближённое равенство:

$$\int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx \approx \frac{g_{sp}(p_{i+1},y_j)-g_{sp}(p_i,y_j)}{p_{i+1}-p_i}\int_{p_i}^{p_{i+1}}\frac{1}{\lambda(x,y_j)}\,dx, \qquad -N\le i\le i_1-1\ , \tag{44}$$

или:

$$\int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx \approx \frac{F_{i+1,j}-F_{i,j}}{p_{i+1}-p_i}\alpha_{i,j},$$

$$\alpha_{i,j} = \int_{p_i}^{p_{i+1}}\frac{dx}{\lambda(x,y_j)} = \frac{\left(1+\frac{\rho}{R_1}\cos(y_j-\varphi)\right)\ln\left|\frac{p_{i+1}-\rho\cos(\theta_{i+1,j}-\varphi)}{p_i-\rho\cos(\theta_{i,j}-\varphi)}\right| + \frac{\rho}{R_1}\sin(\varphi-y_j)(\theta_{i+1,j}-\theta_{i,j})}{1+(\frac{\rho}{R_1})^2+2\frac{\rho}{R_1}\cos(y_j-\varphi)} \tag{45}$$

Если $x_{-\varepsilon}(y_j) > p_{i_1}$, то принимаем приближённое равенство:

$$\int_{p_{i_1}}^{x_{-\varepsilon}(y_j)} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx \approx \frac{g_{sp}(p_{i_1+1},y_j)-g_{sp}(p_{i_1},y_j)}{p_{i_1+1}-p_{i_1}}\int_{p_i}^{x_{-\varepsilon}(y_j)}\frac{1}{\lambda(x,y_j)}\,dx,$$

или:

$$\int_{p_{i_1}}^{x_{-\varepsilon}(y_j)} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx \approx \frac{F_{i_1+1,j}-F_{i_1,j}}{p_{i_1+1}-p_{i_1}}\ \overset{\sim}{\alpha}_{-\varepsilon,j} \tag{46}$$

Для $\overset{\sim}{\alpha}_{-\varepsilon,j}$ выписывается аналитическое выражение (в (45) взять $x_{-\varepsilon}(y_j)$ вместо p_{i+1}) Аналогично поступаем со вторым ("правым") интегралом в (41) (если $x_\varepsilon(y_j)<r$), находя номер i_2такой, что $p_{i_2}\le x_\varepsilon(y_j)<p_{i_2+1}$:

$$\int_{x_\varepsilon(y_j)}^{r} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}dx = \sum_{i=i_2+1}^{N-1}\int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}dx + \int_{x_\varepsilon(y_j)}^{p_{i_2}} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}dx \tag{47}$$

(сумма отсутствует, если $i_2=N-1$). Принимаем приближённое равенство:

$$\int_{x_\varepsilon(y_j)}^{r} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}dx \approx \sum_{i=i_2+1}^{N-1}\frac{F_{i+1,j}-F_{i,j}}{p_{i+1}-p_i}\alpha_{i,j} + \frac{F_{i_2+1,j}-F_{i_2,j}}{p_{i_2+1}-p_{i_2}}\ \overset{\sim}{\alpha}_{\varepsilon,j},$$

В итоге получаем:

$$Z_\varepsilon^{(1)}(y_j) \approx S_{\varepsilon,j}^{(1)} = \sum_{i=-N}^{N-1}{}' \frac{F_{i+1,j}-F_{i,j}}{p_{i+1}-p_i}\alpha_{i,j} + \frac{F_{i_1+1,j}-F_{i_1,j}}{p_{i_1+1}-p_{i_1}}\,\tilde{\alpha}_{-\varepsilon,j} + \frac{F_{i_2+1,j}-F_{i_2,j}}{p_{i_2+1}-p_{i_2}}\,\tilde{\alpha}_{\varepsilon,j} \tag{48}$$

Штрих над знаком суммы указывает на отсутствие слагаемых, соответствующих отрезкам $[p_i, p_{i+1}]$, покрывающихся отрезком $[x_{-\varepsilon}(y_j), x_\varepsilon(y_j)]$. Мы приходим к приближённому равенству:

$$I_\varepsilon^{(1)}(\check{f}) \approx -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\Delta}{2}\left\{S_{\varepsilon,1}^{(1)} + S_{\varepsilon,M}^{(1)} + 2\sum_{j=2}^{M-1} S_{\varepsilon,j}^{(1)}\right\} \tag{49}$$

Окончательная приближённая формула имеет вид (второй интеграл $I_\varepsilon^{(2)}(\check{f})$ отбрасываем - обоснование в следующем параграфе):

$$I_\varepsilon(\check{f}) \approx I_\varepsilon^{(1)}(\check{f}) \approx \sum_{\substack{i=-N,\dots,N\\ j=1,\dots,M}} F_{i,j}A_{i,j}\ , \tag{50}$$

где коэффициенты $A_{i,j} = Ai,j(\rho,\varphi,\varepsilon,N,M,\varDelta_0,\varDelta,r,...)$ не зависят от входной информации - чисел $\{F_{i,j}\}$, то есть, значений функции $\check{f}(p,\theta)$. Запишем ещё (50) так:

$$I_\varepsilon(\check{f}) \approx \sum_{\substack{i=-N,\dots,N\\ j=1,\dots,M}} \check{f}(p_{i,j},\theta_{i,j})A_{i,j} = I_{appr}(\check{f})$$

Из этой записи видно, что I_{appr} является линейным функционалом, то есть, для любых $\alpha,\beta,\check{f}_1,\check{f}_2$

$$I_{appr}(\alpha\check{f}_1 + \beta\check{f}_2) = \alpha I_{appr}(\check{f}_1) + \beta I_{appr}(\check{f}_2)$$

Полагаем, наконец,

$$f(x_1,x_2) = f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) \approx I_{appr}(\check{f}) = I_{appr,x_1,x_2}(\check{f})$$

На практике удобно зафиксировать некоторую сетку (например, прямоугольную) с узлами в точках $z_{k,l} = (x_k, y_l)$ и рассчитать по фиксированным параметрам $\varepsilon, N, M, ..., \rho_{k,l}, \varphi_{k,l}$ (полярные координаты точек $z_{k,l}$) массивы $\{A_{i,j}\}$, сохранив эти массивы в памяти ЭВМ. После чего обрабатывать экспериментальную (или аналитическую) информацию простым выполнением в двойном цикле операций сложения и умножения.

4 Оценка погрешности для неискажённых данных

Приступим к оценке сверху величины $\left|f(x_1,x_2) - I_{appr,x_1,x_2}(\check{f})\right|$.

ТЕОРЕМА 1. "Выпрямляющий" функционал $\tilde{I}_{appr}\ (\check{f})$ восстанавливает значение функции из W_2^{r,x_1,x_2} в наперёд заданной точке с наперёд заданной точностью по конечному набору значений её преобразования Радона. Точнее, пусть дано число $\varepsilon,\quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{3}} min\,\{1,r\}$. Пусть, далее, в соответствии с формулами (39)-(49),

$$I_{appr,x_1,x_2}(\check{f}) = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\Delta}{2}\left\{S_{\varepsilon,1}^{(1)} + S_{\varepsilon,M}^{(1)} + 2\sum_{j=2}^{M-1} S_{\varepsilon,j}^{(1)}\right\}$$

и выполнены соотношения:

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right] + 1,\ M = N,\ R_1 = R_2 = Nr,\ \varDelta = \frac{\pi}{N-1} - \frac{4}{N(N-1)} \tag{51}$$

Тогда для любой функции из банахова пространства W_2^{r,x_1,x_2} и для любой точки $(x_1,x_2),\ x_1^2 + x_2^2 \le r^2$, справедливы неравенства:

$$\left|f(x_1,x_2) - I_{appr,x_1,x_2}(\check{f})\right| \le C(r)\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\varepsilon \le \tilde{C}\ (r)\cdot\|f\|_{W_2^{r,x_1,x_2}}\cdot\varepsilon$$

в которых константы $C(r)$ и $\tilde{C}\ (r)$ зависят только от r.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Фиксируем $(x_1,x_2) = (\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$. В предыдущих обозначениях, и поскольку мы исходим из справедливости формулы обращения, $f(x_1,x_2) = I(\check{f})$. Прежде всего заметим, что соотношения (18) и (36) выполнены. Заметим ещё, что $N \ge 6$. Далее,

$$R_3 = \frac{2rR_2}{\sqrt{R_1^2 - r^2}} = \frac{2r}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R_1}\right)^2}} = \frac{2r}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{N}\right)^2}} < 3r \tag{52}$$

Далее (см. (19)),

$$
\begin{aligned}
&|x_{k+1}-x_k| = |p_{k+1}-p_k| = R_1\left|\frac{\delta_{k+1}}{\sqrt{R_2^2+\delta_{k+1}^2}} - \frac{\delta_k}{\sqrt{R_2^2+\delta_k^2}}\right| \le \\
&\le R_1 \max_{[\delta_k,\delta_{k+1}]}\left|\left(\frac{t}{\sqrt{R_2^2+t^2}}\right)'\right| |\delta_{k+1}-\delta_k| = \frac{R_1R_3}{2N}\max_{[\delta_k,\delta_{k+1}]}\left|\frac{1}{(R_2^2+t^2)^{3/2}}\right| R_2^2 \le \frac{R_1}{R_2}\frac{R_3}{2N} = \frac{R_3}{2N} < \frac{3r}{2N} < \frac{3}{2}r\varepsilon^3
\end{aligned} \tag{53}
$$

Оценим потерю при отбрасывании интеграла по "особой ε - полосе" , где модуль знаменателя подынтегральной функции не превосходит ε (см. (8), где вместо g надо взять $\check{f}$):

$$
\widetilde{\varepsilon}_0 = \left|I(\check{f}) - I_\varepsilon(\check{f})\right| \le \frac{\varepsilon}{\pi}\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}
$$

Оценим потерю интеграла $I_\varepsilon^{(2)}(\check{f})$. Имеем (см. (26) и (52)):

$$
|I_\varepsilon^{(2)}(\check{f})| \le \frac{1}{2\pi^2}\cdot\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\cdot mes(\Omega_\varepsilon^*)\frac{1}{R_1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{N})^2}}\frac{1}{\varepsilon} \le C_0(r)\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\frac{1}{N\varepsilon} \le \widetilde{C}_0(r)\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\varepsilon^2
$$

Для оценки последней нормы выпишем частные производные функции $g_{sp}(x,y)$ до второго порядка включительно. Имеем: $g(x,y) = \check{f}(x, y+\arccos(-\frac{x}{R_1}))$. Далее (см.(24)):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \check{f}}{\partial p}(x, y+\arccos(-\frac{x}{R_1})) + \frac{\partial \check{f}}{\partial \theta}(x, y+\arccos(-\frac{x}{R_1}))\frac{1}{\sqrt{R_1^2-x^2}} \\
&\frac{\partial g_{sp}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \check{f}}{\partial \theta}(x, y+\arccos(-\frac{x}{R_1})) = \frac{\partial \check{f}}{\partial \theta}(\cdot,\cdot) \\
&\frac{\partial^2 g_{sp}}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial p^2}(\cdot,\cdot) + \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial\theta\partial p}(\cdot,\cdot)\frac{1}{\sqrt{R_1^2-x^2}} + \\
&+\left(\frac{\partial^2 \check{f}}{\partial p\partial\theta}(\cdot,\cdot) + \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial\theta^2}(\cdot,\cdot)\frac{1}{\sqrt{R_1^2-x^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{R_1^2-x^2}} + \frac{\partial \check{f}}{\partial\theta}(\cdot,\cdot)\frac{x}{(\sqrt{R_1^2-x^2})^3} \\
&\frac{\partial^2 g_{sp}}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial\theta^2}(\cdot,\cdot) \\
&\frac{\partial^2 g_{sp}}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 g_{sp}}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial p\partial\theta}(\cdot,\cdot) + \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial\theta^2}(\cdot,\cdot)\frac{1}{\sqrt{R_1^2-x^2}}
\end{aligned}
$$

Учитывая, что $|x| \le r$ и $\frac{1}{\sqrt{R_1^2-x^2}} = \frac{1}{R_1}\frac{1}{\sqrt{1-(x/R_1)^2}} \le \frac{1}{rN}\frac{1}{\sqrt{1-(1/N)^2}} < \frac{4}{3rN} < \frac{1}{3}\frac{1}{r}$, получаем оценку:

$$
\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \le 3(max\left\{1,\frac{1}{r}\right\})^2\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \tag{54}
$$

Таким образом, погрешность, возникающая при отбрасывании интеграла $I_\varepsilon^{(2)}(\check{f})$,

$$
\widetilde{\varepsilon}_1 \le c_0(r)\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\frac{1}{N\varepsilon} \le \widetilde{c}_0(r)\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\varepsilon^2
$$

Оценим площадь "тёмной зоны" (где мы не располагаем исходными данными) с учётом того, что $\delta = \pi/2 - arccos(\frac{r}{R_1}) - \varDelta_0$ и пользуясь уже полученными выше оценками:

$$
\begin{aligned}
&S_T \le 2r\left(\left[(\pi/2-\delta) - \arccos(-\frac{r}{R_1}) - ((\pi/2-\delta) - \arccos(\frac{r}{R_1}))\right] + [(\varDelta_0+\pi) - (\varDelta_0 + (M-1))\varDelta]\right) = \\
&= 2r((\pi - 2\arccos(\frac{r}{R_1})) + 4/N) < \frac{16r}{N} < 16r\varepsilon^3
\end{aligned} \tag{55}
$$

Таким образом, отбрасывая интеграл по "тёмной зоне" (что и было сделано при построении функционала), мы несём в $I_\varepsilon^{(1)}(\check{f})$ потерю, которая не будет превосходить

$$
\widetilde{\varepsilon}_2 \le S_T\frac{1}{\varepsilon}\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \le 16r\varepsilon^2\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \le c_1(r)\varepsilon^2\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}
$$

Займёмся оценкой погрешности $\widetilde{\varepsilon}_3$, возникающей при замене интеграла (39) квадратурной формулой трапеций. Учитывая известную оценку погрешности формулы трапеций и константу при интеграле, получим:

$$
\widetilde{\varepsilon}_3 \le \varDelta\cdot\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\pi^2}\max_{y_{min}\le y\le y_{max}}\left|\left(Z_\varepsilon^{(1)}(y)\right)'\right|
$$

Имеем:

$$\left(Z_{\varepsilon}^{(1)}(y)\right)' = \left(\int_{-r}^{x_{-\varepsilon}(y)} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y)}{\lambda(x,y)}\,dx\right)' + \left(\int_{x_{\varepsilon}(y)}^{r} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y)}{\lambda(x,y)}\,dx\right)' =$$

$$= \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x_{-\varepsilon}(y),y)}{\lambda(x_{-\varepsilon}(y),y)}\,(x_{-\varepsilon}(y))' - \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x_{\varepsilon}(y),y)}{\lambda(x_{\varepsilon}(y),y)}\,(x_{\varepsilon}(y))' +$$

$$+ \int_{-r}^{x_{-\varepsilon}(y)} \left(\frac{\frac{\partial^2 g_{sp}}{\partial y \partial x}(x,y)}{\lambda(x,y)} - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\lambda^2(x,y)}\frac{\partial \lambda}{\partial y}(x,y)\right) dx + \int_{x_{-\varepsilon}(y)}^{r} \left(\frac{\frac{\partial^2 g_{sp}}{\partial y \partial x}(x,y)}{\lambda(x,y)} - \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y)}{\lambda^2(x,y)}\frac{\partial \lambda}{\partial y}(x,y)\right) dx$$

$$\lambda(x,y) = x - \rho\cos(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi),$$

$$x_{\pm\varepsilon}(y) = \frac{\pm A\varepsilon + B\sqrt{R_1^2(A^2+B^2) - \varepsilon^2}}{A^2+B^2},$$

$$A = 1 + \frac{\rho}{R_1}\cos(y-\varphi),\ B = \frac{\rho}{R_1}\sin(\varphi - y),$$

$$x'_{\pm\varepsilon}(y) = -\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial y}(x_{\pm\varepsilon}(y),y)}{\frac{\partial \lambda}{\partial x}(x_{\pm\varepsilon}(y),y)} = -\frac{\rho\sin(y + \arccos(-\frac{x_{\pm\varepsilon}(y)}{R_1}) - \varphi)}{1 + \rho\sin(y + \arccos(-\frac{x_{\pm\varepsilon}(y)}{R_1}) - \varphi)\frac{1}{\sqrt{R_1^2 - (x_{\pm\varepsilon}(y))^2}}}$$

- см. (27), (31), (38), (22). Далее,

$$|x'_{\pm\varepsilon}(y)| \le \frac{r}{1 - \frac{r}{\sqrt{R_1^2 - r^2}}} = \frac{r}{1 - \frac{1}{N}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{N})^2}}} < \frac{3}{2}r$$

Далее,

$$\left|\frac{\partial \lambda}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\rho\sin(y + \arccos(-\frac{x}{R_1}) - \varphi)\right| \le r$$

и $\lambda(x_{\pm\varepsilon}(y),y) = \pm\varepsilon$. Учитывая, что в области интегрирования $|\lambda(x,y)| \ge \varepsilon$, получаем:

$$\left|\left(Z_{\varepsilon}^{(1)}(y)\right)'\right| \le \|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\left(\frac{3r}{\varepsilon} + \frac{4r}{\varepsilon} + \frac{4r^2}{\varepsilon^2}\right) \le \frac{11r}{\varepsilon^2}(max\,\{1,r\})\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}$$

Следовательно, учитывая, что $\varDelta \le \frac{6}{N} < 6\varepsilon^3$,

$$\widetilde{\varepsilon}_3 \le C_3(r)\varepsilon\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \le \widetilde{C}_3\ (r)\varepsilon\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}$$

Оценим теперь погрешность $\widetilde{\varepsilon}_4$ от замены точной двойной суммы в (40) (там каждое слагаемое суть сумма внутренних интегралов по отрезкам) двойной суммой, в которой внутренние интегралы отличаются от точных вследствие замены производных $\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y)$ разностными отношениями $\frac{g_{sp}(x_{k+1},y_j) - g_{sp}(x_k,y_j)}{x_{k+1}-x_k} = \frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x'_k,y_j)$, где $x'_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Заметим, что

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x,y_j)}{\lambda(x,y_j)}\,dx = \frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x''_k,y_j)\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{\lambda(x,y_j)}dx, \quad x''_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

по теореме о среднем - вследствие того, что на всём отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ функция $\lambda(x,y_j)$ либо больше нуля либо меньше нуля (иначе в силу её непрерывности в какой-то из точек этого отрезка она обратилась бы в нуль, но это не так, поскольку мы выбросили из области интегрирования целую область, окружающую такие точки). В любом случае точки x'_k и x''_k лежат внутри отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Тогда соответствующие слагаемые разности двух вышеуказанных сумм по модулю (поскольку $\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x'_k,y_j) - \frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(x''_k,y_j) = (x'_k - x''_k)\frac{\partial^2 g_{sp}}{\partial x^2}(x'''_k,y_j)$ для некоторой точки (x'''_k,y_j), лежащей между точками (x'_k,y_j) и (x''_k,y_j)) не превосходят (см. ещё (53))

$$\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \cdot |x'_k - x''_k| \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{|\lambda(x,y_j)|}dx \le \|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}(x_{k+1}-x_k)^2\frac{1}{\varepsilon} \le (\frac{3r}{2N})^2\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}$$

(То же будет и с крайними интегралами). Учитывая, что в (40) общее число слагаемых равно $(2N+1)N$, а также множитель $\varDelta < 6\varepsilon^3$, получаем, что

$$\widetilde{\varepsilon}_4 \le C_4(r)\|g_{sp}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\varepsilon^2 \le \widetilde{C}_4\ (r)\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \cdot \varepsilon^2 \tag{56}$$

Суммируя все оценки погрешностей и учитывая (6), приходим к результирующим неравенствам:

$$\left|f(x_1,x_2) - I_{appr,x_1,x_2}(\check{f})\right| \le \sum_{i=0}^{4}\widetilde{\varepsilon}_i \le C(r)\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\varepsilon \le \widetilde{C}\ (r) \cdot \|f\|_{W_2^{r,x_1,x_2}} \cdot \varepsilon$$

Теорема доказана.

5 Оценка погрешности для искажённых данных

Теперь предположим, что входные данные, то есть, значения функции $\check{f}(p,\theta)$, известны нам не точно, а с некоторым искажением, величина которого "в масштабе $\check{f}$ " не превышает некоторого порога ω, причём искажённые данные мы интерпретируем как значения некоторой функции $\widetilde{f}\in W_2^{r,p,\theta}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2 (Об устойчивости "выпрямляющего" функционала). Пусть функция $f(x_1,x_2)$ принадлежит банахову пространству W_2^{r,x_1,x_2}, и пусть функция $\widetilde{f}\ (p,\theta)$ принадлежит банахову пространству $W_2^{r,p,\theta}$, и при этом

$$\|\check{f}-\widetilde{f}\ \|_{W_2^{r,p,\theta}} \le \omega \|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}$$

Пусть $(x_1,x_2)\in D_r$. Если для параметров "выпрямляющего" функционала I_{appr,x_1,x_2}, определяемого формулами (29)-(37), выполнены соотношения (51), и при этом $\varepsilon=\omega^{1/2},\quad 0<\omega<\frac{1}{3}(min\,\{1,r\})^2$, то справедливо неравенство

$$|f(x_1,x_2)-I_{appr,x_1,x_2}(\widetilde{f})|\le C(r)\|f\|_{W_2^{r,u,v}}\cdot\omega^{1/2}, \tag{57}$$

в котором константа $C(r)$ зависит только от r.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для соответствующих функций g_{sp} и $\widetilde{g}_{sp}$ (см. выше) вследствие линейности операции "sp-перехода" будет (см.(54)):

$$\|g_{sp}-\widetilde{g}_{sp}\ \|_{W_2^{r,x,y}}=\|(g-\widetilde{g})_{sp}\|_{W_2^{r,x,y}}\le C_{10}(r)\|\check{f}-\widetilde{f}\ \|_{W_2^{r,p,\theta}}\le C_{10}(r)\omega\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}$$

Вместо матрицы $g_{sp}(x_k,y_j)$ у нас в распоряжении искажённая матрица $\widetilde{g}_{sp}\ \ (x_k,y_j)$. Применяя к ней "выпрямляющий" функционал I_{appr,x_1,x_2}, мы получаем число $I_{appr,x_1,x_2}(\widetilde{f})$. Оценим величину погрешности, пользуясь линейностью I_{appr,x_1,x_2}:

$$\begin{aligned}&\left|I_{appr,x_1,x_2}(\check{f})-I_{appr,x_1,x_2}(\widetilde{f})\right|=\left|I_{appr,x_1,x_2}(\check{f}-\widetilde{f})\right|\le\\&\le C_{11}(r)\cdot\Delta\cdot\sum_j\sum_k\left|\frac{(g_{sp}-\widetilde{g}_{sp})(x_{k+1},y_j)-(g_{sp}-\widetilde{g}_{sp})(x_k,y_j)}{x_{k+1}-x_k}\right|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{1}{|\lambda(x,y_j)|}dx\end{aligned}$$

В некоторых ("приграничных") слагаемых интегрирование распространяется лишь на ту часть отрезка $[x_k,x_{k+1}]$, которая не попадает в "особую ε - полосу" . Поскольку значение дроби по теореме Лагранжа равно $\frac{\partial}{\partial x}(g_{sp}-\widetilde{g}_{sp})(\xi_k,y_j)$, где $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\begin{aligned}&\left|I_{appr,x_1,x_2}(\check{f})-I_{appr,x_1,x_2}(\widetilde{f})\right|\le C_{11}(r)\|g_{sp}-\widetilde{g}_{sp}\ \|_{W_2^{r,x,y}}\sum_j\sum_k(x_{k+1}-x_k)\frac{\Delta}{|\lambda(\zeta_k,y_j)|}\le\\&\le C_{12}(r)\cdot\omega\cdot\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\cdot\frac{1}{\varepsilon},\ \zeta_k\in[x_k,x_{k+1}]\cap\Omega^*_\varepsilon\end{aligned} \tag{58}$$

Тогда, на основании ТЕОРЕМЫ 1,

$$\begin{aligned}&\left|f(x_1,x_2)-I_{appr,x_1,x_2}(\widetilde{f})\right|\le\left|f(x_1,x_2)-I_{appr,x_1,x_2}(\check{f})\right|+\left|I_{appr,x_1,x_2}(\check{f})-I_{appr,x_1,x_2}(\widetilde{f})\right|\le\\&\le C_{15}(r)\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\left(\varepsilon+\omega\frac{1}{\varepsilon}\right)=2C_{15}(r)\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\cdot\varepsilon=C(r)\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}}\cdot\omega^{1/2}\end{aligned}$$

Теорема доказана.

6 Восстановление функции "в целом" и равномерная оценка погрешности

Рассмотрим вопрос о восстановлении функции "в целом" , а не в одной только точке. Воспользуемся равномерностью полученных выше оценок. Возьмём достаточно густую прямоугольную сетку, разбивающую на прямоугольники или их части круг D_r - в координатах (x_1,x_2) - и предъявим непрерывную функцию $\hat{g}(x_1,x_2)$ ("крышу"), значения которой в точках сетки (x_1^t,x_2^s) (занумерованных парами (t,s)) совпадают со значениями соответствующих функционалов $I_{appr,x_1^t,x_2^s}(\widetilde{f})$. Она устроена так, что её график состоит из треугольников - кусочков плоскостей, проходящих через точки $(x_1^t,x_2^s,I_{appr,x_1^t,x_2^s}(\widetilde{f}))$ и образующих "крышу" из двух треугольников "над" каждым прямоугольником сетки (клеткой), причём строим один треугольник "над" левым (относительно координаты x_1) нижним (относительно координаты x_2), левым верхним и правым верхним вершинами клетки, а другой - "над" левым нижним, правым нижним и правым верхним вершинами; во всех вершинах тех клеток, которые пересекают окружность хотя бы в одной точке, вместо $I_{appr,x_1^t,x_2^s}(\widetilde{f})$ берём нули (зануляем "крыши"на окружности). Линейность операции построения крыши следует из линейности параметров плоскостей, что легко усматривается из уравнений этих плоскостей в R^3:

$$\begin{vmatrix} x_1 - u_1 & x_2 - v_1 & x_3 - w_1 \\ u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \end{vmatrix} = 0, \ (u_i, v_i, w_i) = (x_1^{t_i}, x_2^{s_i}, I_{appr,x_1^{t_i},x_2^{s_i}}(\widetilde{f}))$$

Обозначив такую "функцию-крышу" , построенную для произвольной заданной в узлах сетки функции $h(x_1, x_2)$, через $Kr(h)(x_1, x_2)$, имеем из геометрических соображений:

$$|Kr(h)(x_1, x_2)| \leq max \left\{|h(x_1^t, x_2^s)|\right\} \tag{59}$$

Если "крыша" строится по значениям в узлах сетки определённой на всём D_r функции $h(x_1, x_2)$, причём она имеет непрерывные первые производные и равна 0 на границе D_r, то

$$|h(x_1, x_2) - Kr(h)(x_1, x_2)| \leq dl \cdot \left(max|\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2)| + max|\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2)| \right), \tag{60}$$

где dl - максимальная из длин сторон прямоугольной сетки (надо $Kr(h)(x_1, x_2)$ представить как выпуклую линейную комбинацию значений в трёх узлах сетки). Обозначим $\|\phi\|_{W_0} = \sup\{|\phi(x_1, x_2)|, (x_1, x_2) \in D\}$. Имея в виду линейность операции построения "крыши" , получаем из неравенств (57), (59), (60):

$$\begin{aligned} &\|f(x_1, x_2) - \hat{g}(x_1, x_2)\|_{W_0^{r,x_1,x_2}} = \|f(x_1, x_2) - Kr((I_{appr,x_1^{t_i},x_2^{s_i}})(\widetilde{f}))(x_1, x_2)\|_{W_0^{r,x_1,x_2}} \leq \\ &\leq \|f(x_1, x_2) - Kr(f)(x_1, x_2)\|_{W_0^{r,x_1,x_2}} + \|Kr(f - I_{appr,x_1^{t_i},x_2^{s_i}}(\widetilde{f}))(x_1, x_2)\|_{W_0^{r,x_1,x_2}} \leq \\ &\leq C_{20} \cdot dl \cdot \|f\|_{W_1^{r,x_1,x_2}} + C_{16}(r)\|\check{f}\|_{W_2^{r,p,\theta}} \cdot \omega^{1/2} \leq C_{20} \cdot dl \cdot \|f\|_{W_2^{r,x_1,x_2}} + C_{17}(r)\|f\|_{W_2^{r,x_1,x_2}} \cdot \omega^{1/2} \end{aligned} \tag{61}$$

Взяв dl порядка $\omega^{1/2}$ (например, можно взять квадратную сетку с числом клеток, равным $\left[\frac{1}{\omega}\right]$), получаем:

$$\|f(x_1, x_2) - \hat{g}(x_1, x_2)\|_{W_0} \leq C_{21}(r) \cdot \omega^{1/2} \cdot \|f\|_{W_2^{r,x_1,x_2}} \tag{62}$$

Полученные результаты могут быть резюмированы в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Функцию из пространства W_2^{r,x_1,x_2} можно сколь угодно точно восстановить в более широком пространстве W_0^{r,x_1,x_2} по её радоновскому образу, и это восстановление устойчиво относительно малых относительных искажений в пространстве $W_2^{r,p,\theta}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $W_{2,0}^{r,p,\theta}$ - подпространство банахова пространства $W_2^{r,p,\theta}$, состоящее из таких функций $g(p, \theta)$, для которых носитель $supp(R_l^{-1}(g)) \subseteq D_r$. В частности, $R(W_2^{r,x_1,x_2}) \subseteq W_{2,0}^{r,p,\theta}$. Утверждается, что линейный оператор R_l^{-1} непрерывно действует из $W_{2,0}^{r,p,\theta}$ в W_0^{r,x_1,x_2}. При этом он может быть сколь угодно хорошо приближен на каждой функции $g \in W_{2,0}^{r,p,\theta}$ конечномерным оператором $\check{I}_{appr,\varepsilon} = Kr(I_{appr,x_1^{t_i},x_2^{s_i}})$, построенным в ТЕОРЕМЕ 3 с $dl = (2r)/\left[(2r)/\varepsilon\right]$, именно:

$$\|(R_l^{-1}(g) - \check{I}_{appr,\varepsilon}(g))(x_1, x_2)\|_{W_0^{r,x_1,x_2}} \leq 4\varpi(R_l^{-1}(g), \varepsilon) + d(r) \cdot \varepsilon \cdot \|g\|_{W_2^{r,p,\theta}}, \tag{63}$$

где $\varpi(R_l^{-1}(g), \delta)$ -модуль непрерывности функции $R_l^{-1}(g)(x_1, x_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Заметим, что $\varepsilon \leq dl < 2\varepsilon$. Неравенство (63) выводится, как и выше (вместо f берём $R_l^{-1}(g)$), если в (60) правую часть записать в виде $2\varpi(R_l^{-1}(g), dl)$ - что тоже верно. Докажем непрерывность. Для этого не обязательно требовать финитности $(R_l^{-1}(g)(x_1, x_2)$. В самом деле, пусть $g(p, \theta) \in W_2^{r,p,\theta}$. Обозначим $p_0 = \rho\cos(\theta - \varphi) = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta$, $f(x_1, x_2) = R_l^{-1}(g)(x_1, x_2)$, а внутренний интеграл в (7) обозначим $F(p_0, \theta)$. По определению и учитывая финитность подынтегральной функции, имеем:

$$F(p_0, \theta) = \int_{-r}^{r} \frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta)dp}{p - p_0} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int_{-r}^{p_0 - \varepsilon} \frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta)dp}{p - p_0} + \int_{p_0 + \varepsilon}^{r} \frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta)dp}{p - p_0} \right) \tag{64}$$

Возьмём произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных достаточно малых чисел, мотонно убывающую и стремящуюся к нулю, и рассмотрим функции от (p_0, θ)

$$F_n(p_0, \theta) = \int_{-r}^{p_0 - \varepsilon_n} \frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta)dp}{p - p_0} + \int_{p_0 + \varepsilon_n}^{r} \frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta)dp}{p - p_0}$$

Ясно, что эти функции непрерывны по (p_0, θ). Докажем, что последовательность функций $F_n(p_0, \theta)$ сходится равномерно на R^2 (к функции $F(p_0, \theta)$ - по определению). Пусть $m > n$. Выпишем цепочку преобразований, применяя в конце теорему Лагранжа:

$$F_m(p_0,\theta)-F_n(p_0,\theta)=\int_{p_0-\varepsilon_n}^{p_0-\varepsilon_m}\frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)dp}{p-p_0}+\int_{p_0+\varepsilon_m}^{p_0+\varepsilon_n}\frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p,\theta)dp}{p-p_0}=\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}\frac{\frac{\partial g}{\partial p}(p_0+t,\theta)-\frac{\partial g}{\partial p}(p_0-t,\theta)}{t}dt=$$

$$=\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}\frac{(\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p_0+\xi(t),\theta))2t}{t}dt=2\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p_0+\xi(t),\theta)dt,\quad \xi(t)\in(-t,t)$$

Отсюда:

$$|F_m(p_0,\theta)-F_n(p_0,\theta)|\le 2\sup_{(p,\theta):\,|p|\le r}\left\{|\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p,\theta)|\right\}(\varepsilon_n-\varepsilon_m)\le 2(\varepsilon_n-\varepsilon_m)\|g\|_{W_2^{r,p,\theta}} \tag{65}$$

Из фундаментальности последовательности $\{\varepsilon_n\}$ будет следовать фундаментальность в равномерной метрике на любом компакте в R^2 последовательности $\{F_n(p_0,\theta)\}$ и - по критерию Коши - равномерная её сходимость. Следовательно, предельная функция $F(p_0,\theta)$ будет непрерывна по (p_0,θ), а поскольку p_0 непрерывно зависит от (x_1,x_2,θ), то $F(x_1,x_2,\theta)=F(p_0(x_1,x_2,\theta),\theta)$ непрерывно зависит от (x_1,x_2,θ), а тогда и $f(x_1,x_2)$ непрерывно зависит от (x_1,x_2). Ограниченность же оператора установлена выше - см. (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пространство $W_{2,0}^{r,p,\theta}$ - банахово, так как (9) обеспечивает финитность предельной функции.

Уместно задаться вопросом, какими свойствами должна обладать искажающая функция (шум) $g=\overset{\sim}{\check{f}}-\check{f}$, чтобы её можно было интерпретировать как возникшую вследствие каких-то физических причин, а не вследствие, например, неполадок аппаратуры. То есть: когда g можно рассматривать как радоновский образ?

7 Некоторые соображения относительно оператора (преобразования) Радона

Мы будем далее под "$const$" подразумевать константы, обычно разные, зависящие, быть может, от $r,m,...$, но не зависящие от функций, а также их аргументов. Рассмотрим правый обратный оператор R_r^{-1}. Мы следуем в основном книге Хелсона [1], в которой рассмотрен общий конечномерный случай; приводимая там теорема Шварца устанавливает биекцию преобразования Радона для линейных пространств бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций. Как мы ниже выясним, в плоском случае, используя условие финитности, можно заменить быстрое (быстрее любой степенной функции) убывание всех частных производных функции $g_\xi(p,\xi_1,\xi_2)$ на непрерывность частных производных лишь по переменным ξ_1,ξ_2 от её первых нескольких производных по p. В конструкции построения оператора R_r^{-1} обыгрывается связь преобразований Фурье и Радона. Отправной точкой является формула:

$$F(\lambda_1,\lambda_2)=\iint\limits_{R^2}f(x_1,x_2)e^{-i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}dx_1dx_2=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(y,\theta)e^{-i\lambda y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy, \tag{66}$$

в которой $(\lambda_1,\lambda_2)=(\lambda\cos\theta,\lambda\sin\theta),\ \lambda>0$. Все преобразования, включая дифференцирование несобственных интегралов по параметру и применение теоремы Фубини, будут справедливы, если функция $f(x_1,x_2)$ и её частные производные будут достаточно быстро убывать на бесконечности, например, если потребовать, чтобы для некоторой абсолютной $const$ и для некоторого $r_1>0$ при $x_1^2+x_2^2\ge r_1^2$ выполнялись неравенства

$$|f(x_1,x_2)|,|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)|,|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)|\le const(\sqrt{x_1^2+x_2^2})^{-3} \tag{67}$$

Далее, если абсолютно интегрируемая функция $f(x_1,x_2)$ непрерывно дифференцируема, то (см. [3], стр.437) справедлива двумерная формула обращения:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2\pi}\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}F(\lambda_1,\lambda_2)e^{i\lambda_1x_1}d\lambda_1\right)e^{i\lambda_2x_2}d\lambda_2 \tag{68}$$

Если же $F(\lambda_1,\lambda_2)\in L_1(R^2)$, то есть, абсолютно интегрируема на плоскости, то эта формула может быть преобразована к виду

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}F(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1d\lambda_2 \tag{69}$$

Известно (см.[1]), что если функция $g(p,\theta)$ - радоновский образ (то есть $g=\check{f}$, причём f сосредоточена в D_r), то она обладает следующими свойствами:

(a) g(p,$\theta)=g_\xi(p,\cos\theta,\sin\theta)$, причём функция $g_\xi(p,\xi_1,\xi_2)$ определена на всём R^3,

(b) g$_\xi(-p,-\xi_1,-\xi_2)=g_\xi(p,\xi_1,\xi_2)$,

(c) g$_\xi(p,\xi_1,\xi_2)=0$ при $|p|\ge r$, (70)

(d) $\int_{-r}^{r}g(p,\theta)dp=c_0=const$, то есть, не зависит от θ,

(e) для любого целого $m\ge 1$ функция $g(p,\theta)$ обладает свойством "радоновской $m-$ однородности" : интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^m g(p,\theta)dp$$

является однородным многочленом степени m относительно $\{\cos\theta, \sin\theta\}$.

Последние два свойства объединяют в одно, считая константу однородным многочленом степени 0, но мы будем рассматривать этот случай отдельно. "Радоновская однородность" (называемая также "условием Кавальери" - см.[11]) является весьма существенным свойством. Разумеется, о ней можно в общей (нефинитной) ситуации говорить, если сходятся соответствующие интегралы. В свою очередь, это так, если гарантировано существование всех моментов. В самом деле, после перехода к повёрнутым на угол θ координатам получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^m \check{f}(p,\theta)dp = \iint\limits_{R^2} (x\cos\theta + y\sin\theta)^m f(x,y)dxdy = \sum_{j=0}^{m} \left(C_m^j \iint\limits_{R^2} x^j y^{m-j} f(x,y)dxdy \right) (\cos\theta)^j (\sin\theta)^{m-j} \quad (71)$$

Пусть функция $g(p,\theta)$ удовлетворяет условиям (70). Наложим на неё дополнительное условие

$$\begin{array}{ll} (f) & \mathrm{g}_\xi(p,\xi_1,\xi_2)\ \ k \text{ раз непрерывно дифференцируема по } p, \text{ а по переменным} \\ & (\xi_1,\xi_2) \text{ дифференцируемы любое число раз - сама функция и первые } k \text{ её частные производные по } p \end{array} \quad (72)$$

Положим

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\xi(y, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}) e^{-i\lambda y}dy = \int_{-r}^{r} g_\xi(y, \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}, \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}) e^{-i\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot y}dy, \ \ \lambda_1^2+\lambda_2^2>0 \quad (73)$$

и $F_1(0,0) = c_0$, где c_0 - константа из условия (d) в (70). Проинтегрируем в (73) k раз по частям, учитывая обнуление $g_\xi(y,\cdot,\cdot)$ и соответствующих её частных производных в точках $(-r,\cdot,\cdot)$ и $(r,\cdot,\cdot)$:

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{i\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}} \int_{-r}^{r} \frac{\partial g_\xi}{\partial y}(y,\cdot,\cdot) e^{-i\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot y}dy = \dots = \left(\frac{1}{i\lambda}\right)^k \int_{-r}^{r} \frac{\partial^k g_\xi}{\partial y^k}(y,\cdot,\cdot) e^{-i\lambda y}dy \quad (74)$$

Следовательно, при $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} > 0$

$$|F_1(\lambda_1,\lambda_2)| \le const(\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2})^{-k} \ , \quad (75)$$

что следует из условия (f). Покажем, что $F_1(\lambda_1,\lambda_2)$ непрерывна в точке (0,0). Запишем:

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2) = \int_{-r}^{r} g_\xi(y, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda})dy + \int_{-r}^{r} g_\xi(y, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda})(e^{-i\lambda y}-1)dy$$

Первый интеграл по условию (d) равен c_0 при любых $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^2+\lambda_2^2>0$, а второй интеграл стремится к 0 при $\lambda \to 0$ в силу ограниченности $g_\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ и равномерной малости $e^{-i\lambda y}-1$, поскольку $|-i\lambda y| \le r\lambda$. Положим

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} F_1(\lambda_1,\lambda_2) e^{i(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)} d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (76)$$

Из приведённых оценок следует, что все частные производные функции $f(x_1,x_2)$ можно получить дифференцированием под знаком интеграла:

$$\frac{\partial^{l_1+l_2} f}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}}(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} (i\lambda_1)^{l_1} (i\lambda_2)^{l_2} F_1(\lambda_1,\lambda_2) e^{i(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)} d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (77)$$

если в (77) подынтегральные функции абсолютно интегрируемы, а это так при $k \ge l_1+l_2+3$. Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ А. Пусть функция $g(p,\theta)$ обладает свойствами (70) и (72) с $k \ge 4$. Тогда функция $f(x_1,x_2)$, определённая выше, обладает следующими свойствами:
(I) $f(x_1,x_2)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $k-3$ включительно,
(II) $f(x_1,x_2) = 0$ при $x_1^2+x_2^2 \ge r^2$,
(III) $R(f)(p,\theta) = \check{f}(p,\theta) = g(p,\theta)$ $\forall (p,\theta) \in R^2$, то есть, является радоновским прообразом функции $g(p,\theta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 . Мы не можем здесь сослаться на результаты Солмона ([7]), выводившему (более тонко!) порядок дифференцируемости $f(x_1,x_2)$ из порядка "m- однородности" , а также напрямую на теорему Хелгасона из [1] о носителе, имея несколько другое представление для правого обратного оператора Радона, а также отказываясь от бесконечной дифференцируемости $g(p,\theta)$ по первой переменной. Однако основные идеи рассуждения берём у Хелгасона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ А. (I) следует из (77) и (75). Докажем теперь, что имеет место

(IV) функции $|f(x_1,x_2)x_1^{l_1}x_2^{l_2}|$ ограничены на R^2 для любых целых неотрицательных l_1, l_2.
Для доказательства (IV) нужно в (76) соответствующее число раз проинтегрировать по частям по переменным λ_1, λ_2 подынтегральное выражение, обосновав такую возможность. Тогда получится представление:

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{i^{l_1+l_2}}{x_1^{l_1}x_2^{l_2}}\iint\limits_{R^2}\frac{\partial^{l_1+l_2}F_1}{\partial\lambda_2^{l_2}\partial\lambda_1^{l_1}}(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}d\lambda_1 d\lambda_2, \;\; x_1x_2 \neq 0, \tag{78}$$

Если интеграл в (78) сходится абсолютно, то (IV), очевидно, будет выполнено. Кроме того, учитывая неравенство $\sqrt{x_1^2+x_2^2} \leq \sqrt{2}max\{|x_1|,|x_2|\}$, мы получаем оценку:

$$|f(x_1,x_2)| \leq const\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^{-k}, \quad k=1,2,... \tag{79}$$

Абсолютная сходимость этого интеграла (а вместе и доказательство его существования) обосновывается следующим образом. Отдельно рассматриваются два случая: $|\lambda| \geq 1$ и $|\lambda| < 1$. Для первого случая, исходя из (74), обосновывается формула:

$$\frac{\partial^{l_1+l_2}F_1}{\partial\lambda_2^{l_2}\partial\lambda_1^{l_1}}(\lambda_1,\lambda_2) = \lambda^{-k}\int_{-r}^{r}e^{-i\lambda y}\left(\sum_{k_1,k_2,n,l}\frac{\partial^{k_1+k_2+k}g_1}{\partial\xi_2^{k_2}\partial\xi_1^{k_1}\partial y^k}(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})\frac{Q_n(y,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda^l}\right)dy,$$
$$0\leq k_1\leq l_1, 0\leq k_2\leq l_2, n=n(k_1,k_2)\leq l=l(k_1,k_2)\leq 3(l_1+l_2)$$

В сумме одни и те же производные могут встречаться несколько раз. Формула доказывается индукцией по порядку производной. При этом используется тот факт, что если $Q_n(y,\lambda_1,\lambda_2)$ - многочлен степени n относительно λ_1, λ_2, а $l=1,2,...$, то

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{Q_n(y,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda^l}\right) = (-l)\frac{\lambda_i Q_n(y,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda^{l+1}\lambda} + \frac{Q_{n-1}(y,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda^l} = \frac{Q_{n+1}(y,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda^{l+2}}, \;\; i=1,2$$

где $Q_{n-1}(y,\lambda_1,\lambda_2)$ и $Q_{n+1}(y,\lambda_1,\lambda_2)$ - многочлены степеней соответственно $n-1$ и $n+1$ относительно λ_1, λ_2. Далее, с учётом того, что все частные производные функции $g_\xi(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})$ непрерывны и ограничены на $[-r,r]\times[-1,1]\times[-1,1]$ и внутри всех многочленов справедливы оценки $|\lambda_1^{l_1}\lambda_2^{l_2}| \leq \lambda^{l_1+l_2} \leq \lambda^l$, имеем при $\lambda \geq 1$:

$$\left|\frac{\partial^{l_1+l_2}F_1}{\partial\lambda_2^{l_2}\partial\lambda_1^{l_1}}(\lambda_1,\lambda_2)\right| \leq const\lambda^{-k}, \;\; k=1,2,...\;, \; \lambda=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\;, \tag{80}$$

Для случая $\lambda < 1$ используется условия "радоновской m - однородности" для любого m - условие (e). Покажем, что все частные производные функции $F_1(\lambda_1,\lambda_2)$ непрерывны (а значит, и ограничены) в некоторой окрестности точки (0,0). Разложим экспоненту по формуле Тейлора-Маклорена до n-го члена, а n выберем позже. Тогда правая часть в (73) распадётся на два слагаемых, первое из которых превратится по условию (e) после интегрирования по y в полином по (λ_1,λ_2) степени n, а второе, вследствие абсолютной и равномерной на любом конечном отрезке сходимости степенного ряда - по y и по λ, - его умножения на равномерно непрерывную функцию $g_\xi(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})$ и последующего интегрирования по отрезку $[-r,r]$, - в произведение $\lambda^{n+1}\Psi(\lambda,\lambda_1,\lambda_2)$, где второй множитель - бесконечно дифференцируемая - благодаря условию (f) - по $\lambda,\lambda_1,\lambda_2$ функция. Имеем:

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2) = \int_{-r}^{r}g_\xi(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})e^{-i\lambda y}dy = \int_{-r}^{r}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-i)^m y^m\lambda^m}{m!}g_\xi(y,\frac{\lambda_1}{\lambda},\frac{\lambda_2}{\lambda})dy + \lambda^{n+1}\Psi(\lambda,\lambda_1,\lambda_2) =$$
$$= c_0 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-i)^m}{m!}\left(\sum_{j=0}^{m}\zeta_{m,j}\lambda_1^j\lambda_2^{m-j}\right) + \lambda^{n+1}\Psi(\lambda,\lambda_1,\lambda_2)$$

Так же, как и выше, можно установить (беря $k=0$), что если $l=l_1+l_2\leq n$, то

$$\frac{\partial^{l_1+l_2}F_1}{\partial\lambda_2^{l_2}\partial\lambda_1^{l_1}}(\lambda_1,\lambda_2) = T_{n-l}(\lambda_1,\lambda_2) + \lambda^{n-2l}\Psi_{l_1,l_2}(\lambda_1,\lambda_2)$$

Первое слагаемое - многочлен, а во втором слагаемом второй множитель - благодаря условию (f) - будет ограниченным в любой окрестности точки $(0,0)$, следовательно, будет существовать и предел при стремлении (λ_1,λ_2) к $(0,0)$, если взять $n\geq 2l+1$. Итак, выясняется, что функция $f(x_1,x_2)$ обладает всеми условиями для существования её преобразования Радона, двумерного преобразования Фурье $F(\lambda_1,\lambda_2)$ и справедливости формул (66) и (69) - см. (67). Перепишем (76) в виде:

$$4\pi^2 f(x_1,x_2) = \iint\limits_{R^2}F_1(-\lambda_1,-\lambda_2)e^{-i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}d\lambda_1 d\lambda_2$$

Из него видно, что $4\pi^2 f(x_1,x_2)$ суть двумерное преобразование Фурье функции $F_1(-\lambda_1,-\lambda_2)$, которая, как было установлено выше, непрерывно дифференцируема и абсолютно интегрируема на R^2. по упомянутой уже теореме $F_1(-\lambda_1,-\lambda_2)$

восстанавливается посредством обратного преобразования Фурье, которое, вследствие абсолютной интегрируемости $4\pi^2 f(x_1,x_2)$ может быть записано так:

$$F_1(-\lambda_1,-\lambda_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}4\pi^2 f(x_1,x_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}dx_1dx_2=\iint\limits_{R^2}f(x_1,x_2)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}dx_1dx_2$$

Откуда

$$F_1(\lambda_1,\lambda_2)=\iint\limits_{R^2}f(x_1,x_2)e^{-i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}dx_1dx_2 \tag{81}$$

Сравнивая (66) и (76), находим, что $F(\lambda_1,\lambda_2)\equiv F_1(\lambda_1,\lambda_2)$. Обосновывается непрерывность и абсолютная интегрируемость $\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)$. Далее, фиксируем θ и $\lambda>0$ и полагаем $\lambda_1=\lambda\cos\theta, \lambda_2=\lambda\sin\theta$. Из (66) и (73) будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}g_\xi(y,\cos\theta,\sin\theta)e^{-i\lambda y}dy \tag{82}$$

Это равенство распространяется на $\lambda=0$ - по непрерывности и на $\lambda<0$ - опираясь на свойство (b). После этого - на основании известной теоремы о единственности преобразования Фурье - делается вывод о тождественности $\check{f}(y,\cos\theta,\sin\theta)$ и $g_\xi(y,\cos\theta,\sin\theta)$, и свойство (III) доказано. Финитность доказывается как у Хелгасона (с обоснованием абсолютной сходимости возникающих несобственных интегралов, возможности применения теоремы Фубини и т.д.) - через вывод уравнения Радона (являющегося внешним интегральным уравнением Абеля), связывающего средние значения $f(x_1,x_2)$ по окружностям, охватывающим круг D_r, ($U(t)/(4\pi t)$), - и средние по тем же окружностям интегралов по касательным к ним $(V(s)/(2\pi))$:

$$\int_s^{\infty}\frac{U(t)}{\sqrt{t^2-s^2}}dt=V(s),\ \ s>0 \tag{83}$$

В теории доказывается следующая формула обращения:

$$\int_x^{\infty}U(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_x^{\infty}\frac{2tV(t)}{\sqrt{t^2-x^2}}dt,\ \ x>0 \tag{84}$$

При наших предположениях и установленных оценках преобразования (см. в книге [4], стр.32-33), приводящие к формуле обращения, оказываются корректными. Свойство (с) из условий (70) влечёт, что при $x\geq r+\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2}$ (окружность с центром в точке (x_1^0,x_2^0) охватывает круг D_r), имеем:

$$\int_x^{\infty}U(t)dt=0\ \ \Rightarrow \int_x^{\rho}U(t)dt=0\ \ \forall\rho>r+\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2}$$

Учитывая непрерывность $U(\rho)$ и дифференцируя по ρ последнее равенство, получаем, что $U(\rho)=4\pi\cdot\ \bar{g_0}\ (\rho)\cdot\rho=0$, следовательно, $\bar{g_0}\ (\rho)=0$, то есть,

$$\bar{g_0}\ (\rho)=\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\psi+x_1^0,\rho\sin\psi+x_2^0)d\psi=0\ \ \forall\rho\geq q_0(x_1^0,x_2^0)=r+\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2}$$

Таким образом, все средние по указанным окружностям - нули. Далее по схеме Хелгасона (теорема о носителе из [1]) устанавливается - на основании существования всех моментов функции $f(x_1,x_2)$, - что она тождественно равна нулю на каждой указанной окружности, а стало быть - во всех точках вне и на границе круга D_r.
ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в условиях УТВЕРЖДЕНИЯ А $k\geq 5$, то соответсвующая функция $R_r^{-1}(g)$ принадлежит W_2^{r,x_1,x_2}, то есть, g является "естественным" , "доаппаратурным" шумом в ситуации восстановления функции, описанной в предыдущих параграфах. В силу инъективности оператора Радона (см. ниже) значения левого и правого обратного операторов совпадают, совпадая со значением общего обратного : $R_r^{-1}(g)=R_l^{-1}(g)=R^{-1}(g)$.

Для приближения самих функций $g(p,\theta)$, удовлетворяющих (70) и (72), а стало быть, принадлежащих соответствующим банаховым пространствам $W_l^{r,p,\theta}$, можно использовать тригонометрические ряды Фурье, которые будут сходиться равномерно за счёт гладкости по переменной θ - см.[6], и также будут сходиться продифференцированные по p соответствующие ряды для производных. Итак, запишем (выбирая для удобства формул в качестве отрезка изменения переменной θ вместо $[0,2\pi]$ отрезок $[-\pi,\pi]$):

$$\begin{gathered}g(p,\theta)=\frac{\alpha_0(p)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n(p)\cos(n\theta)+\beta_n(p)\sin(n\theta)\right),\\ \alpha_n(p)=\alpha_n(g,p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi,\ \ \beta_n(p)=\beta_n(g,p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(p,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi,\end{gathered} \tag{85}$$

Поскольку после интегрирования l раз по частям получаем оценку

$$|\alpha_n(p)\cos(n\theta)|,\ |\beta_n(p)\sin(n\theta)|\leq\frac{1}{n^l}\frac{1}{\pi}max\left\{|\frac{\partial^l g}{\partial\theta^l}(p,\theta)|,\ (p,\theta)\in[-r,r]\times[-\pi,\pi]\right\},n\geq 1,$$

то остаётся применить теорему Вейерштрасса о мажоранте, чтобы убедиться в упомянутой сходимости для $g(p,\theta)$, ..., $\frac{\partial^k g}{\partial p^k}(p,\theta)$. Заметим (в этом легко убедиться по индукции), что $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ являются однородными многочленами $n-$й степени относительно пары $(\xi_1, \xi_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Рассмотрим фейеровские средние ряда (85)

$$\sigma_n(g,\theta) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(g,\theta), \qquad S_k(g,\theta) = \sum_{j=0}^{k}(\alpha_j(p)\cos(j\theta) + \beta_j(p)\sin(j\theta))$$

Запишем их в виде свёртки с ядром Фейера (см.[6], стр.137-139):

$$\sigma_n(g,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(p,t+\theta)K_n(t)dt, \quad K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

Ядро Фейера обладает следующими замечательными свойствами:

$$(1)\,K_n(t) \geq 0, \qquad (2)\;K_n(t) \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2},\; 0 < \delta \leq |t|, \qquad (3)\;\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1 \tag{86}$$

В наших предположениях относительно функции $g(p,\theta)$ и пользуясь свойством (3) ядра Фейера для $l = 0, ..., k$ можно записать:

$$\frac{\partial^l}{\partial p^l}\left(g(p,\theta) - \sigma_n(g,\theta)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^l g}{\partial p^l}(p,\theta) - \frac{\partial^l g}{\partial p^l}(p,t+\theta)\right)K_n(t)dt$$

Тогда, используя (86), и разбивая отрезок интегрирования на три части: $[-\pi, -\delta_0], [-\delta_0, \delta_0], [\delta_0, \pi]$, - для $l = 0, ..., k$ получаем следующие оценки:

$$|\frac{\partial^l}{\partial p^l}\left(g(p,\theta) - \sigma_n(g,\theta)\right)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^l g}{\partial p^l}(p,\theta) - \frac{\partial^l g}{\partial p^l}(p,t+\theta)\right|K_n(t)dt \leq \omega_l(g,\delta_0) + 4\cdot\|\frac{\partial^l g}{\partial p^l}\|\frac{\pi^2}{2(n+1)\delta_0^2},$$

где $\|\frac{\partial^l g}{\partial p^l}\| = max\left\{|\frac{\partial^l g}{\partial p^l}(p,\theta)|, (p,\theta) \in [-r,r]\times[-\pi,\pi]\right\}$, а $\omega_l(g,\delta)$ - модули непрерывности на $[-r,r]\times[-\pi,\pi]$ непрерывных функций $\frac{\partial^l g}{\partial p^l}(p,\theta)$. В наших предположениях $\omega_l(g,\delta_0) \leq \delta_0\cdot\|\frac{\partial^l g}{\partial\theta\partial p^l}\|$. Пусть $\delta_0 = \varepsilon/2,\; n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[16\pi^2\varepsilon^{-3}\right] + 1$. Тогда

$$\|g(p,\theta) - \sigma_n(g,\theta)\|, ..., \|\frac{\partial^l}{\partial p^{k-1}}\left(g(p,\theta) - \sigma_n(g,\theta)\right)\| \leq \left(\|g\|_{W_k^{r,p,\theta}}\right)\varepsilon,\; n \geq n_0 \tag{87}$$

Выясним, насколько отличаются функции $F_1(\lambda_1,\lambda_2)$ и $F_{1,n}(\lambda_1,\lambda_2)$, построенные по функциям $g(p,\theta)$ и $\sigma_n(g)(p,\theta)$ (заметим, что это полином степени не выше n от $\cos\theta, \sin\theta$ с коэффициентами, зависящими от p, то есть, получение функции $F_{1,n}(\lambda_1,\lambda_2)$ корректно) при $n \geq n_0(\varepsilon)$. При $k \geq 3$ из (74)-(75) получаем:

$$|F_1(\lambda_1,\lambda_2) - F_{1,n}(\lambda_1,\lambda_2)| \leq 2r\lambda^{-3}\left(\|\frac{\partial^3}{\partial p^3}(g - \sigma_n(g))\|\right)$$

Эту оценку мы применим для $(\lambda_1,\lambda_2) : \lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \geq 1$. Для $\lambda \leq 1$ используем оценку:

$$|(F_1 - F_{1,n})(\lambda_1,\lambda_2)| \leq \left|\int_{-r}^{r}(g - \sigma_n(g))(y, \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda})e^{-i\lambda y}dy\right| \leq 2r\cdot\|g - \sigma_n(g)\|$$

Обозначим через $f(x_1,x_2) = R_r^{-1}(g)$ и $f_n(x_1,x_2) = R_r^{-1}(\sigma_n(g))$ (Мы не утверждаем, что f_n - радоновский прообраз $\sigma_n(g)$!). Имеем:

$$\begin{aligned}|(f - f_n)(x_1,x_2)| &\leq \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2}|(F_1 - F_{1,n})(\lambda_1,\lambda_2)|e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}|d\lambda_1 d\lambda_2 \leq \\ &\leq \left(\|g - \sigma_n(g)\| + \|\frac{\partial^3}{\partial p^3}(g - \sigma_n(g))\|\right)\frac{1}{4\pi^2}2r\left(\iint_{|\lambda|\leq 1}d\lambda_1 d\lambda_2 + \iint_{|\lambda|\geq 1}\lambda^{-3}d\lambda_1 d\lambda_2\right) \leq \frac{3r}{2\pi}\cdot\|g\|_{W_k^{r,p,\theta}}\cdot\varepsilon\end{aligned} \tag{88}$$

Таким образом, мы сколь угодно хорошо равномерно приближаем как саму функцию $g(p,\theta)$, так и её радоновский прообраз $R_r^{-1}(g)(x_1,x_2)$. Приведём в заключение утверждение о "сильной инъективности" преобразования Радона для финитной ситуации.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть $f(x_1,x_2)$ - сосредоточенная в круге D_r ограниченная, измеримая по Борелю функция. Утверждается, что если интеграл по всякой прямой от $f(x_1,x_2)$ равен нулю, то сама функция равна нулю почти всюду относительно меры Лебега. (Частный случай непрерывной функции немедленно следует из теоремы о носителе из [1].)
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЯ 5. Свойство измеримости по Борелю (и как следствие - интегрируемости по Лебегу)

переносится на ограничение $f(x_1, x_2)$ на любую прямую, так что условие корректно. Измеримость $\check{f}(p, \theta)$ можно установить стандартными рассуждениями, руководствуясь определениями измеримости (множества и функции) по Лебегу и по Борелю, интеграла Лебега, а также известными предельными теоремами теории интеграла Лебега. Можно убедиться в том, что все выкладки, приводящие к уравнению Радона, остаются в силе, а значит, интегралы по всем окружностям равны нулю, поскольку радиус r из УТВЕРЖДЕНИЯ А можно взять сколь угодно малым, а начало координат выбрать любым; следовательно, - равны нулю интегралы по всем кругам; следовательно, - это доказывается, - равны нулю и по всем квадратам. Рассмотрим разложение множества тех точек плоскости, в которых $f(x_1, x_2)$ отлична от нуля (оно может быть и пустым):

$$E((x_1, x_2) : f(x_1, x_2) \neq 0) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+((x_1, x_2) : f(x_1, x_2) > \frac{1}{n}) \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^-((x_1, x_2) : f(x_1, x_2) < -\frac{1}{m}) \right)$$

Поскольку мера множества E

$$mes(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} mes(E_n^+) + \sum_{n=1}^{\infty} mes(E_n^-),$$

то если она не равна нулю, то хотя бы одно из слагаемых ненулевое. Пусть, например, $mes(E_{n_0}^+) > 0$ при некотором $n_0 \geq 1$. Почти все точки этого множества являются его точками плотности - см. [5],стр.312. Пусть (x_1^0, x_2^0) - одна из таких точек (она найдётся!). По определение точки плотности, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $d > 0$, что для квадрата P_d диаметра d с центром в точке (x_1^0, x_2^0) выполняется неравенство $mes(E_{n_0}^+ \cap P_d) > (1-\varepsilon) mes(P_d) = (1-\varepsilon) d^2/2$. Пусть $|f(x_1, x_2)| \leq c \ \forall \, (x_1, x_2)$. Имеем:

$$\iint\limits_{P_d} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \geq \frac{1}{n_0} \cdot (1-\varepsilon) \cdot d^2/2 - c \cdot \varepsilon \cdot d^2/2 > 0, \ \ if \ \varepsilon < \frac{1}{1 + n_0 \cdot c}$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Итак, мы рассмотрели приближение специальными конечномерными операторами и по неполному набору интегральных данных оператора (левого обратного к оператору Радона), восстанавливающего функцию с предполагаемыми определёнными свойствами. Мы выяснили, что это приближение устойчиво относительно искажений, являющихся функциями той же гладкости и свойств в пространстве радоновских образов, в предположении, что их относительная погрешность задана $apriori$, - и получили гарантированную оценку погрешности. В заключительном разделе мы нашли, каких свойств гладкости и однородности можно потребовать от искажающей функции-образа ("шума"), чтобы восстанавливаемая (с помощью правого обратного оператора Радона) функция-оригинал была заведомо с теми же свойствами; мы указали также способ приближать радоновский образ конечномерными операторами (средними Фурье-Фейера) - с гарантированным приближением соответствующей функции-оригинала.

References

[1] S. Helgason, *The Radon transform*, Mir Pub. House, Moscow, 1983.

[2] G.T. Herman, *Image reconstruction from projections. The Fundamentals of Computerized Tomography*, Mir Pub. House, Moscow, 1983.

[3] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka Pub. House, Moscow, 1976.

[4] P.P. Zabreiko, A.I. Koshelev, M.A. Krasnoselski and others, *Integral equations*, Nauka Pub. House, Moscow, 1968.

[5] I.M. Vinogradov (editor-in-chief), *Mathematical Encyclopedia, vol. 4*, Soviet Encyclopedia Pub. House, Moscow, 1985.

[6] N.K. Bari, *Trigonometric Series*, Fizmatgiz Pub. House, Moscow, 1961.

[7] D.C.Solmon, *Asymptotic Formulas for the Dual Radon Transform and Applications*, Math. Z., 195 (1987), 321-343.

[8] S.I. Gonchar, *Convergence of computational algorithms for recovering discontinuous functions from the Radon transform* , Russian Math. Surveys, 41:3 (1986), 205–206

[9] O.V. Shestakov, *On the stability of image reconstruction in problems of emission tomography*, Inform. and its appl, 3:3 (2009), 47-51

[10] A.H. Begmatov, A.O. Pirimbetov, A.K. Seidullaev, *Weakly incorrect problems of integral geometry with perturbation on a family of polylines*, Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics, 15:1 (2015), 5-12

[11] E.E. Petrov, *Cavalieri conditions for a k-dimensional radon transformation*, Math. Notes, 50:5 (1991), 1135–1141