

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

Том 16, стр. 144–144 (2019)  
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 519.176  
MSC 05A17

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА К  
ДВУДОЛЬНО-ПОРОГОВОМУ ВИДУ

В.А. БАРАНСКИЙ AND Т.А. СЕНЬЧОНОК

**ABSTRACT.** A triple of vertices  $(x, v, y)$  in a graph  $G = (V, E)$  such that  $v \in E$  and  $vy \notin E$  is called *lifting* if  $\deg(x) \leq \deg(y)$  and *lowering* if  $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$ . The transformation  $\varphi$  of a graph  $G$  which replaces  $G$  with  $\varphi(G) = G - xv + vy$  is called *rotation of an edge corresponding to a triple of vertices  $(x, v, y)$* .

For a lifting (lowering) triple  $(x, v, y)$ , the rotation of an edge is called a *lifting (lowering) rotation of an edge*. A rotation of an edge in a graph  $G$  is a lifting if and only if the inverse to him rotation of an edge in a graph  $\varphi(G)$  is a lowering.

A bipartite graph  $H = (V_1, E, V_2)$  is called *bipartite-threshold graph* if it has not lifting rotations of edges such that  $x, y \in V_1, v \in V_2$  or  $x, y \in V_2, v \in V_1$ . The rotation of an edge corresponding to a triple of vertices  $(x, v, y)$  such that  $x, y \in V_1$  and  $v \in V_2$  ( $x, y \in V_2$  and  $v \in V_1$ ) is called a  *$V_1$ -rotation ( $V_2$ -rotation) of an edge*. Every bipartite graph  $H = (V_1, E, V_2)$  may be transformed to a bipartite-threshold graph by a finite sequence of  $V_1$ -rotations ( $V_2$ -rotations) of edges.

The aim of the paper is to give a polynomial algorithm which transforms every bipartite graph  $H = (V_1, E, V_2)$  to a bipartite-threshold graph by the shortest finite sequence of  $V_1$ -rotations and  $V_2$ -rotations of edges.

**Keywords:** algorithm, integer partition, threshold graph, bipartite graph, bipartite-threshold graph, Ferrer's diagram.

---

BARANSKY V.A., SENCHONOK T.A., SOME ALGORITHM THAT TRANSFORMS BIPARTITE GRAPHS TO BIPARTITE-THRESHOLD GRAPHS.

© 2021 БАРАНСКИЙ В.А., СЕНЬЧОНОК Т.А..

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Далее под графом мы всегда будем понимать *обыкновенный* граф, т. е. граф без петель и кратных рёбер, и будем использовать терминологию, принятую в [1].

Под *разбиением* (см., например, [2]) мы будем понимать последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  целых неотрицательных чисел, которая является невозрастающей и содержит конечное число ненулевых компонент. Через  $\text{sum}(\lambda)$  будем обозначать сумму всех компонент разбиения  $\lambda$  и называть её *весом* разбиения  $\lambda$ . *Длиной*  $\ell(\lambda)$  разбиения  $\lambda$  будем называть число его ненулевых компонент. Для удобства разбиение  $\lambda$  иногда будем записывать в виде

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t),$$

где  $t \geq \ell(\lambda)$ , т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой нулевой компоненты.

Через  $NPL$  будем обозначать множество всех разбиений, а через  $NPL(m)$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , — множество всех разбиений  $\lambda$  таких, что  $\text{sum}(\lambda) = m$ . *Отношение доминирования*  $\geq$  на множестве  $NPL$  и на множествах вида  $NPL(m)$  задается следующим образом. Выполняется  $\lambda \leq \mu$  тогда и только тогда, когда

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & \leq & \mu_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \leq & \mu_1 + \mu_2 \\ & \dots & \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_t & \leq & \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_t \\ & \dots & \end{array}$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  и  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ , т. е. префиксные суммы разбиения  $\lambda$  не превосходят соответствующих префиксных сумм разбиения  $\mu$ .

Теория разбиений [2] имеет давнюю историю и является одним из активно развивающихся направлений комбинаторики. Продолжаются исследования по перечислению графических разбиений. Во введении к работе [3] приведен полезный обзор статей по проблеме перечисления графических разбиений. Продолжается исследование реализаций графических разбиений и совершенствование алгоритмов построения всех реализаций.

Приведём необходимые для дальнейшего определения и обозначения.

Для натурального числа  $n$  конечную невозрастающую последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  целых неотрицательных чисел будем называть *n-последовательностью*. Такая *n-последовательность* называется *графической*, если существует обыкновенный граф  $G$  на  $n$  вершинах, для которого

$$\deg(v_1) = \lambda_1, \dots, \deg(v_n) = \lambda_n,$$

где  $v_1, \dots, v_n$  — последовательность всех его вершин; граф  $G$  называют *реализацией n-последовательности*  $\lambda$ .

Разбиение  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  называется *графическим*, если графической является последовательность  $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ , где  $\ell = \ell(\lambda)$ . Очевидно, разбиение  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  является графическим тогда и только тогда, когда графической будет любая *n-последовательность*  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , для которой  $n \geq \ell(\lambda)$ .

Разбиения принято изображать в виде диаграмм Ферре, состоящих из конечного набора квадратных блоков одинакового размера, составляющих “ступенчатую” фигуру (см., например, Рис. 1). На Рис. 1 представлена диаграмма Ферре разбиения  $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$  длины 8 и веса 26.

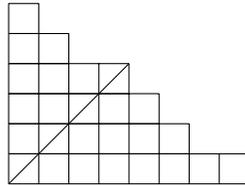


Рис. 1

Для произвольного разбиения  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  определим его *ранг Дёрфи*  $r(\lambda)$  (или просто ранг), полагая

$$r(\lambda) = \max\{i \mid \lambda_i \geq i\}.$$

Ранг  $r = r(\lambda)$  разбиения  $\lambda$  равен числу блоков на главной диагонали его диаграммы Ферре (см. Рис. 1). Максимальный квадрат, составленный из блоков диаграммы Ферре и симметричный относительно главной диагонали диаграммы Ферре, называют *квадратом Дёрфи* разбиения  $\lambda$  (на Рис. 1 указана диагональ квадрата Дёрфи, здесь  $r = 4$ ).

*Головой*  $\text{hd}(\lambda)$  разбиения  $\lambda$  называется разбиение, полученное уменьшением первых  $r$  компонент разбиения  $\lambda$  на одно и то же число  $r - 1$  и обнулением всех компонент с номерами  $r + 1, r + 2, \dots$ . Отметим, что верхняя строка квадрата Дёрфи всегда входит в диаграмму Ферре головы  $\text{hd}(\lambda)$  в качестве первой строки.

*Хвостом*  $\text{tl}(\lambda)$  разбиения  $\lambda$  называется разбиение, для которого диаграмма Ферре получается из диаграммы Ферре разбиения  $\lambda$  удалением первых  $r = r(\lambda)$  столбцов и последующим считыванием компонент по строкам, т.е. заменой строк последовательно на столбцы, продвигаясь снизу вверх.

На Рис. 1 для разбиения  $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$  имеем  $r = r(\lambda) = 4$ ,  $\text{hd}(\lambda) = (3, 2, 1, 1)$  и  $\text{tl}(\lambda) = (4, 2, 1)$ .

Отметим, что всегда  $\ell(\text{hd}(\lambda)) = r(\lambda)$ ,  $\ell(\lambda) - r$  равно величине первой компоненты хвоста  $\text{tl}(\lambda)$  и  $\ell(\text{tl}(\lambda)) = \lambda_{r+1}$ . Разбиение  $\text{hd}(\lambda)$  “считывается” по столбцам, “урезанным” на число  $r - 1$ , слева направо, а разбиение  $\text{tl}(\lambda)$  “считываются” по строкам, “урезанным” на число  $r$ , снизу вверх.

Пусть  $G$  — произвольный граф,  $v_1, \dots, v_n$  — множество всех его вершин и  $\deg(v_1) = \lambda_1 \geq \deg(v_2) = \lambda_2 \geq \dots \geq \deg(v_n) = \lambda_n$ . Разбиение  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$  будем называть *графическим разбиением*, отвечающим графу  $G$ , и будем обозначать его через  $\text{gpt}(G)$ . Граф  $G$  называют *реализацией* графического разбиения  $\lambda$ .

Добавление к графу или удаление из него изолированных вершин не меняет отвечающего ему разбиения, т.е. реализации графических разбиений можно исследовать с точностью до изолированных вершин. В силу леммы о рукопожатиях графическое разбиение имеет чётный вес, который равен удвоенному числу рёбер в каждой из его реализаций.

В [4] указан критерий графичности разбиения, который мы приведем в терминологии, предложенной нами в работе [5].

*Разбиение  $\lambda$  чётного веса является графическим тогда и только тогда, когда  $\text{hd}(\lambda) \leq \text{tl}(\lambda)$ .*

На Рис. 1 для разбиения  $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$  очевидно выполняется  $\text{hd}(\lambda) = (3, 2, 1, 1) \leq \text{tl}(\lambda) = (4, 2, 1)$ , поэтому разбиение  $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$  является графическим.

Несложно установить, что критерий Кохнерта графичности разбиения эквивалентен известному критерию Эрдёша-Галлаи [6] графичности  $n$ -последовательности. Прямое доказательство критерия Кохнерта, не использующее [6], приведено в [7].

Пусть  $(x, v, y)$  — тройка различных вершин графа  $G = (V, E)$  такая, что  $xv \in E$  и  $vy \notin E$ . Такую тройку назовём

- (1) *повышающей*, если  $\text{deg}(x) \leq \text{deg}(y)$ ;
- (2) *понижающей*, если  $\text{deg}(x) \geq 2 + \text{deg}(y)$ ;
- (3) *сохраняющей*, если  $\text{deg}(x) = 1 + \text{deg}(y)$ .

Рассмотрим преобразование  $\varphi$  графа  $G$  такое, что  $\varphi(G) = G - xv + vy$ , т.е. из  $G$  сначала удаляется ребро  $xv$ , а затем добавляется ребро  $vy$  (см. Рис. 2).

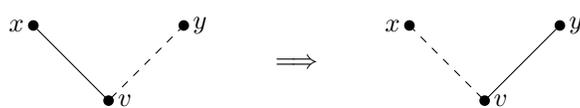


Рис. 2

Преобразование  $\varphi$  называется *вращением ребра* (в графе  $G$  вокруг вершины  $v$ ), отвечающим тройке  $(x, v, y)$ . Вращение ребра в графе  $\varphi(G)$ , отвечающее тройке  $(y, v, x)$  называется *обратным вращением* ребра для вращения  $\varphi$ .

Вращение ребра в графе  $G$ , отвечающее тройке  $(x, v, y)$ , называется

- (1) *повышающим*, если тройка  $(x, v, y)$  повышающая;
- (2) *понижающим*, если тройка  $(x, v, y)$  понижающая;
- (3) *сохраняющим*, если тройка  $(x, v, y)$  сохраняющая.

Отметим, что случаи, когда  $\text{deg}(x) = 1$  или  $\text{deg}(y) = 0$  будем рассматривать как допустимые, т.е. после вращения ребра может возникнуть изолированная вершина или вращение ребра произойдёт в графе  $G$  с добавлением новой изолированной вершины. Для того, чтобы избежать возникновения проблем с изолированными вершинами, для графов  $G = (V, E)$  можно было бы зафиксировать в качестве множества вершин  $V$  множество мощности больше или равной  $2|E|$  (к графу, в случае надобности, всегда можно добавить недостающее множество изолированных вершин).

Из определений следует, что вращение ребра в графе является повышающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение является понижающим.

Хорошо известно, что множество всех разбиений чётного веса  $2m$  является решёткой относительно отношения доминирования, обозначаемой через  $NPL(2m)$  (см., например, [8]), а множество всех графических разбиений фиксированного веса  $2m$ , где  $m$  — натуральное число, образует порядковый идеал

в решётке  $NPL(2m), \leq$  (см., например, [9]). Максимальные элементы этого порядкового идеала называют *максимальными графическими разбиениями* (веса  $2m$ ).

Граф  $G$  называется *пороговым* (см., например, [10]), если его множество вершин представимо в виде дизъюнктного объединения клики  $V_1$  и антиклики  $V_2$  (т.е.  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1$  порождает полный подграф  $K(V_1)$  и  $V_2$  порождает нулевой подграф  $O(V_2)$  в  $G$ ), а множество окрестностей в  $G$  вершин из  $V_2$  образует цепь подмножеств множества  $V_1$  относительно теоретико-множественного включения. Отметим, что случаи  $V_1 = \emptyset$  или  $V_2 = \emptyset$  допускаются, т.е. полные и нулевые графы являются пороговыми. Для порогового графа  $G$  множество всех рёбер представимо в виде дизъюнктного объединения множества всех рёбер полного подграфа  $K(V_1)$  и множества  $E$  всех его рёбер, соединяющих вершины из  $V_1$  с вершинами из  $V_2$ . Таким образом, пороговый граф можно представить в виде  $G = (K(V_1), E, O(V_2))$ . Мы будем писать просто  $G = (K(V_1), E, V_2)$ . Граф  $H = (V_1, E, V_2)$  будем называть *сэндвич-подграфом* порогового графа  $G = (K(V_1), E, V_2)$ . В тривиальных случаях, когда  $V_1 = \emptyset$  или  $V_2 = \emptyset$  сэндвич-подграф  $H$  является пустым подграфом в  $G$ .

Из определения порогового графа следует, что добавление или удаление изолированных вершин не меняет свойство графа быть пороговым. Другие равносильные определения пороговых графов и их многочисленные свойства можно найти в монографии [10].

Известно [5], что

*Граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не содержит повышающих троек вершин.*

Пусть  $H = (V_1, E, V_2)$  — двудольный граф. Рассмотрим тройки вершин  $(x, v, y)$  вида:

- (1)  $x, y \in V_1$  и  $v \in V_2$ ;
- (2)  $x, y \in V_2$  и  $v \in V_1$ .

Повышающие тройки графа  $H = (V_1, E, V_2)$  вида (1) будем называть *повышающими тройками первой доли* или, кратко, *повышающими  $V_1$ -тройками*, а вида (2) — *повышающими тройками второй доли* или, кратко, *повышающими  $V_2$ -тройками*.

По аналогии с пороговыми графами произвольный двудольный граф будем называть *двудольно-пороговым графом* [9], если он не имеет повышающих троек как первой, так и второй доли. В [9] для любого двудольного графа  $H = (V_1, E, V_2)$  в частности была доказана эквивалентность следующих условий:

- (1)  $H$  является сэндвич-подграфом порогового графа  $G = (K(V_1), E, V_2)$ ;
- (2)  $H$  является сэндвич-подграфом порогового графа  $G = (K(V_2), E, V_1)$ ;
- (3) В  $H$  окрестности вершин каждой из долей  $V_1$  и  $V_2$  образуют цепи относительно теоретико-множественного включения;
- (4) В  $H$  окрестности вершин доли  $V_1$  образуют цепь относительно теоретико-множественного включения;
- (5) В  $H$  окрестности вершин доли  $V_2$  образуют цепь относительно теоретико-множественного включения;
- (6)  $H$  является двудольно-пороговым графом, т.е. не содержит повышающих  $V_1$ -троек и повышающих  $V_2$ -троек;
- (7)  $H$  не содержит повышающих  $V_1$ -троек;

- (8)  $H$  не содержит повышающих  $V_2$ -троек;
- (9)  $\text{dpt}_H(V_2) = \text{dpt}_H(V_1)^*$ ;
- (10)  $\text{dpt}_H(V_1) = \text{dpt}_H(V_2)^*$ ;

Здесь через  $\text{dpt}_H(V_1)$  и  $\text{dpt}_H(V_2)$  обозначены *степенные разбиения долей* графа  $H$ , составленные из степеней вершин долей  $V_1$  и  $V_2$ , соответственно, в невозрастающем порядке и дополненные бесконечными последовательностями из нулей, а  $\text{dpt}_H(V_1)^*$  и  $\text{dpt}_H(V_2)^*$  — сопряжённые к ним разбиения, которые могут быть получены при взятии зеркальной симметрии диаграмм Ферре относительно главной диагонали.

Каждый граф  $G$  с помощью конечной последовательности повышающих вращений рёбер может быть преобразован в пороговый граф [7]. В [7] нами была найдена нижняя оценка для длины кратчайшей из таких последовательностей. Она равна

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|,$$

где  $\mu$  — степенное разбиение, отвечающее графу  $G$ ,  $r = r(\mu)$  — ранг Дёрфи разбиения  $\mu$ , а  $\text{tl}(\mu)_i$  и  $\text{hd}(\mu)_i$  — компоненты с номером  $i$ , соответственно головы и хвоста разбиения  $\mu$ .

В [9] отмечено, что любой двудольный граф последовательными вращениями рёбер, каждое из которых отвечает повышающей тройке первой доли или второй доли, приводится к двудольно-пороговому графу. Также любой двудольный граф последовательными вращениями рёбер, каждое из которых отвечает повышающей тройке только первой доли, также приводится к двудольно-пороговому графу. Конечно, аналогичное утверждение верно и для повышающих троек второй доли.

Пусть двудольный граф  $H_2 = (V_1, E, V_2)$  может быть получен из графа  $H_1 = (V_1, E, V_2)$  с помощью конечной последовательности  $V_1$ -вращений рёбер.

Наименьшее число  $V_1$ -вращений рёбер, в последовательности, переводящей  $H_1$  в  $H_2$ , обозначим через  $V_1\text{-dist}(H_1, H_2)$ , и будем называть  $V_1$ -расстоянием от  $H_1$  до  $H_2$ .

**Цель данной работы** состоит в построении полиномиального алгоритма, который произвольный двудольный граф  $H = (V_1, E, V_2)$  преобразует в двудольно-пороговый граф  $G$  с помощью конечной последовательности наименьшей возможной длины, состоящей из  $V_1$ -вращений рёбер.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Пусть  $H = (V_1, E, V_2)$  — двудольный граф такой, что

$$\text{dpt}_H(V_1) = \alpha \text{ и } \text{dpt}_H(V_2) = \beta$$

— степенные разбиения его долей. Конечно,  $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta)$  и в силу теоремы Гейла–Райзера выполняется  $\alpha \leq \beta^*$  (новое прозрачное доказательство теоремы Гейла–Райзера см. в [9]). Класс всех таких двудольных графов будем обозначать через  $\text{BG}(\alpha, \beta)$ .

Для произвольного разбиения  $\beta$  через  $\text{btg}(\beta^*, \beta)$  будем обозначать двудольно-пороговый граф с долями  $V_1$  и  $V_2$  без изолированных вершин такой, что

$$\text{dpt}_G(V_1) = \beta^* \text{ и } \text{dpt}_G(V_2) = \beta.$$

Любой двудольный граф  $H = (V_1, E, V_2)$  без изолированных вершин из семейства графов  $BG(\alpha, \beta)$  с помощью конечной последовательности повышающих  $V_1$ -вращений рёбер приводится к единственному двудольно-пороговому графу с точностью до изоморфизма и изолированных вершин, который изоморфен  $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ , и граф  $H = (V_1, E, V_2)$  получается из графа  $\text{btg}(\beta^*, \beta)$  с помощью обратной последовательности понижающих  $V_1$ -вращений рёбер [9].

Длина последовательности, состоящей из  $V_1$ -вращений рёбер, которая преобразует произвольный двудольный граф  $H = (V_1, E, V_2)$  в двудольно-пороговый граф  $G$ , как следует из результатов работы [9], ограничена снизу высотой разбиения  $\beta^*$  над разбиением  $\alpha$ , т. е. числом

$$(1) \quad \text{height}(\beta^*, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_i |\beta_i^* - \alpha_i|,$$

где  $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots)$  — разбиение, сопряжённое к  $\beta$ , и его разложение по компонентам. Здесь под высотой  $\text{height}(\beta^*, \alpha)$  разбиения  $\beta^*$  над разбиением  $\alpha$  понимается длина кратчайшей убывающей цепи от  $\beta^*$  до  $\alpha$  в решётке разбиений веса  $\text{sum}(\alpha)$  (отметим,  $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta^*)$ ), поскольку граф является двудольным.

Отметим, что оценка (1) при рассмотрении нашего Алгоритма и его обосновании нигде не понадобится. Она приведена для полноты картины и для удобства при рассмотрении примеров, хотя и примеры можно обосновать без этой оценки, проделав дополнительные несложные вычисления.

Развернем теперь наше построение алгоритма, которое мы будем иллюстрировать на конкретном примере двудольного графа.

**Пример.** Пусть  $H = (V_1, E, V_2)$  — это двудольный граф такой, что

$$V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}, V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

и множество рёбер  $E$  отвечает системе окрестностей:

$$\begin{aligned} N(v_1) &= \{u_3, u_6\}, & N(v_2) &= \{u_2, u_3, u_4, u_6\}, & N(v_3) &= \{u_5, u_6\}, \\ N(v_4) &= \{u_1, u_2, u_6, u_7\}, & N(v_5) &= \{u_2, u_4, u_5, u_7\}, & N(v_6) &= \{u_2, u_3, u_5, u_6\}, \\ N(v_7) &= \{u_2, u_3, u_6, u_7\}, & N(v_8) &= \{u_1, u_5, u_6\}. \end{aligned}$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} N(u_1) &= \{v_4, v_8\}, & N(u_2) &= \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \\ N(u_3) &= \{v_1, v_2, v_6, v_7\}, & N(u_4) &= \{v_2, v_5\}, \\ N(u_5) &= \{v_3, v_5, v_6, v_8\}, & N(u_6) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8\}, \\ N(u_7) &= \{v_4, v_5, v_7\}. \end{aligned}$$

Матрица смежности нашего двудольного графа  $H = (V_1, E, V_2)$  имеет следующий вид (будем считать, что эта матрица, так же как шахматная доска,

состоит из квадратных клеток одинакового размера).

3	$u_7$				1	1		1	
7	$u_6$	1	1	1	1		1	1	1
4	$u_5$			1		1	1		1
2	$u_4$		1			1			
4	$u_3$	1	1				1	1	
5	$u_2$		1		1	1	1	1	
2	$u_1$				1				1
		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
		2	4	2	4	4	4	4	3

Матрица смежности — это  $n \times m$ -матрица, состоящая из единиц и нулей (нули мы обычно будем опускать и говорить, что соответствующая клетка пуста), к которой для удобства добавлены два служебных столбца и две служебные строки для указания вершин и их степеней. Строки матрицы смежности очевидно являются характеристическими векторами для вершин, которые соответствуют строкам (при зафиксированном порядке на  $V_2$ ), аналогичное утверждение верно и для столбцов. Строки матрицы смежности двудольного графа будем всегда нумеровать снизу вверх, а столбцы — слева направо.

Для нашего **Примера** выполняется  $n = 7$ ,  $m = 8$ ,

$$\alpha = (7, 5, 4, 4, 3, 2, 2) \text{ и } \beta = (4, 4, 4, 4, 4, 3, 2, 2).$$

Поэтому двудольный граф  $H = (V_1, E, V_2)$  принадлежит классу двудольных графов  $BG(\alpha, \beta)$ . Следовательно, его можно привести с помощью  $V_1$ -вращений рёбер к двудольно-пороговому графу  $G = (V_1, E', V_2)$  такому, что  $dpt_G(V_1) = \beta^*$  и  $dpt_G(V_2) = \beta$  (отметим, что при  $V_1$ -вращениях степени вершин из  $V_2$  не изменяются).

Перепишем матрицу смежности графа  $H$ , упорядочив слева направо по не возрастанию степеней вершины из  $V_2$ .

В нашем **Примере** получим

3	$u_7$	1		1	1				
7	$u_6$	1	1		1	1	1	1	1
4	$u_5$		1	1			1		1
2	$u_4$			1		1			
4	$u_3$	1	1			1		1	
5	$u_2$	1	1	1	1	1			
2	$u_1$				1		1		
		$v_7$	$v_6$	$v_5$	$v_4$	$v_2$	$v_8$	$v_1$	$v_3$
		4	4	4	4	4	3	2	2

В полученной матрице голубым цветом выделим область, представляющую собой диаграмму Ферре разбиения  $\beta$ . Эту область матрицы смежности для удобства будем называть *трафаретом*.

Далее каждое преобразование матриц будем иллюстрировать нашим **Примером**.

3	$u_7$	1		1	1				
7	$u_6$	1	1		1	1	1	1	1
4	$u_5$		1	1			1		1
2	$u_4$			1		1			
4	$u_3$	1	1			1		1	
5	$u_2$	1	1	1	1	1			
2	$u_1$				1		1		
		$v_7$	$v_6$	$v_5$	$v_4$	$v_2$	$v_8$	$v_1$	$v_3$
		4	4	4	4	4	3	2	2

Очевидно, по определению диаграммы Ферре в каждом столбце количество пустых мест в трафарете равно числу единиц этого столбца, не попавших в трафарет. Общее число единиц, не попавших в трафарет в нашем Примере сейчас равно 15.

Теперь, совершая  $V_1$ -вращения рёбер, мы переместим все единицы, лежащие вне трафарета, вертикально вниз на пустые места в трафарет.

В нашем **Примере**  $V_1$ -вращение ребра, отвечающее тройке  $(u_7, v_4, u_3)$ , переместит единицу с координатами  $(7, 4)$  (7-я строка и 4-й столбец) в матрице смежности на пустое место с координатами  $(3, 4)$  (перемещение единицы происходит в четвертом столбце, отвечающем  $v_4$ ). Аналогично совершаются и 14 других вращений ребер. Совершая  $V_1$ -вращения рёбер 15 раз в произвольном порядке, мы получим граф, матрица смежности которого имеет следующий вид: все места в трафарете заполнены единицами и вне трафарета нет единиц. Полученный двудольный граф очевидно является двудольно-пороговым графом с набором степеней вершин  $(\beta^*, \beta)$  и его диаграмма Ферре представлена трафаретом.

Такой способ преобразования графа к двудольно-пороговому виду, которое мы будем называть *стандартным*, можно осуществить, используя его матрицу смежности, построенную по любому возможному упорядочению вершин из  $V_1$  (напомним, что нами был зафиксирован порядок вершин из  $V_2$  по не убыванию их степеней).

Теперь временно приостановим построение нашего алгоритма.

Докажем некоторое вспомогательное утверждение, которое обеспечит корректность нашего алгоритма.

Пусть  $A_0$  — матрица смежности графа  $H = (V_1, E, V_2)$ , отвечающая некоторому упорядочению вершин из  $V_1$ . Пусть граф  $H$  каким-либо произвольным способом приведен к двудольно-пороговому графу  $G = (V_1, E', V_2)$  с помощью последовательности длины  $t$ , состоящей из  $V_1$ -вращений рёбер. Поскольку при  $V_1$ -вращениях рёбер степени вершин из  $V_2$  не меняются, для графа  $G$  выполняется  $\text{dpt}_G(V_1) = \beta^*$  и  $\text{dpt}_G(V_2) = \beta$ .

Рассмотрим последовательность матриц, которая получается из матрицы  $A_0$  с помощью перемещений единиц на пустые места в соответствии с  $V_1$ -вращениями рёбер из последовательности  $P$ :

$$(2) \quad A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_t.$$

Рассмотрим также последовательность двудольных графов, которая получается из двудольного графа  $H = (V_1, E, V_2)$  с помощью последовательных  $V_1$ -вращений рёбер из последовательности  $P$ :

$$H = H_0 \rightarrow H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \dots \rightarrow H_t = G$$

Ясно, что каждое  $A_i$  является матрицей смежности для  $H_i$  и граф  $H_t$  — двудольно-пороговый граф.

Совершим в матрице  $A_t$  подстановку  $\sigma$  на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  номеров строк, переставляя строки матрицы таким образом, чтобы при новом расположении вес строк не возрастал при увеличении номера строки, начиная с первой строки (в начале стоит строка наибольшего веса и при переходе вверх от строки к следующей строке вес сохраняется или уменьшается). Мы получим новую матрицу смежности  $A'_t$  графа  $G$  в новом упорядочении вершин из  $V_1$  (теперь для  $V_1$  имеется *старое упорядочение* и *новое упорядочение*).

Совершим также перестановку строк в соответствии с подстановкой  $\sigma$  во всех матрицах последовательности (2), получим последовательность:

$$(3) \quad A'_0 \rightarrow A'_1 \rightarrow A'_2 \rightarrow \dots \rightarrow A'_t.$$

Отметим, что здесь для каждого  $q = 0, 1, \dots, t-1$  при переходе от  $A'_q$  к  $A'_{q+1}$  переносится единица из клетки с координатами  $(\sigma(i), k)$  в пустую клетку с координатами  $(\sigma(j), k)$ , если при переходе от  $A_q$  к  $A_{q+1}$  переносится единица из клетки с координатами  $(i, k)$  в пустую клетку с координатами  $(j, k)$ , где  $k$  — номер столбца, в котором перемещается единица.

Матрица  $A'_0$  — это матрица графа  $H = (V_1, E, V_2)$ , отвечающая новому упорядочению вершин из  $V_1$ . В матрицах  $A'_0$  и  $A'_t$  мы будем рассматривать графареты, расположенные точно также, как в матрице  $A_0$  (упорядочение множества  $V_2$  нами зафиксировано).

Поскольку граф  $G = H_t$  является двудольно-пороговым, окрестности вершин из  $V_1$  образуют цепь относительно теоретико-множественного включения, отсюда следует, что в матрице  $A'_t$  для любой единицы выполняется следующее свойство:

- либо единица лежит в первой строке,
- либо все элементы, лежащие ниже этой единицы в её столбце, также являются единицами.

Передвигаясь по столбцам матрицы  $A'_t$  слева направо, в силу этого свойства мы видим, что все единицы этой матрицы сосредоточены в графарете и в графарете нет пустых мест (напомним, что графарет фактически является диаграммой Ферре для  $G$ ).

Поскольку все единицы матрицы  $A'_t$  сосредоточены в графарете, каждая из единиц матрицы  $A'_0$ , лежащая вне графарета, должна участвовать в процессе перемещения единиц при переходе от  $A'_0$  до  $A'_t$ .

Следовательно,  $t \geq s$ , где  $s$  — число единиц матрицы  $A'_0$ , лежащих вне графарета.

Таким образом, справедлива следующая

**Лемма 1.** *Если произвольный двудольный граф  $H = (V_1, E, V_2)$  преобразуется в двудольно-пороговый граф  $G$  с помощью последовательности длины  $t$ , составленной из  $V_1$ -вращений рёбер, то двудольный граф  $H$  можно преобразовать в двудольно-пороговый граф  $G$  некоторым стандартным способом при помощи последовательности длины, не превосходящей  $t$  и составленной из  $V_1$ -вращений рёбер.*

Продолжим построение нашего алгоритма.

Теперь наша цель в силу леммы 1 состоит в том, чтобы найти такое упорядочение вершин из  $V_1$ , при котором в матрице смежности графа  $H = (V_1, E, V_2)$  вне трафарета лежит наименьшее возможное число единиц.

Для наименьшего числа  $V_1$ -вращений рёбер, в последовательности, переводящей  $H$  в  $G$ , в виду оценки (1) выполняется

$$\text{height}(\beta^*, \alpha) \leq V_1\text{-dist}(H, G).$$

В нашем **Примере**  $\beta^* = (8, 8, 6, 5)$  и

$\beta^*$	=	8	8	6	5	0	0	0
$\alpha$	=	7	5	4	4	3	2	2
$\beta^* - \alpha$	=	+1	+3	+2	+1	-3	-2	-2

Следовательно,  $\text{height}(\beta^*, \alpha) = \frac{1}{2}(1 + 3 + 2 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2) = 7$ , т. е. для преобразования  $H$  в  $G$  требуется не менее семи  $V_1$ -вращений рёбер.

Перепишем матрицу смежности графа  $H$ , упорядочив снизу вверх по не возрастанию степеней вершины из  $V_1$ . (Это преобразование матрицы смежности не обязательно. Такое преобразование может ускорить решение некоторой задачи о назначениях в дальнейшем.)

(4)

2	$u_1$				1		1		
2	$u_4$			1		1			
3	$u_7$	1		1	1				
4	$u_3$	1	1			1		1	
4	$u_5$		1	1			1		1
5	$u_2$	1	1	1	1	1			
7	$u_6$	1	1		1	1	1	1	1
		$v_7$	$v_6$	$v_5$	$v_4$	$v_2$	$v_8$	$v_1$	$v_3$
		4	4	4	4	4	3	2	2

По определению диаграммы Ферре в каждом столбце количество пустых мест в трафарете (в них стоят нули) равно числу единиц этого столбца, не попавших в трафарет. Общее число единиц, не попавших в трафарет в данной ситуации для нашего **Примера** равно 9.

Рассмотрим теперь следующую задачу: найти такое упорядочение вершин из  $V_1$ , при котором вне трафарета лежит наименьшее возможное число единиц, т. е. внутри трафарета лежит наибольшее возможное число единиц.

Такое упорядочение будем искать, решая вспомогательную задачу о назначениях на максимум (см., например, [1]).

Построим  $n \times m$ -матрицу весов для задачи о назначениях. Для нашего **Примера** она имеет следующий вид.

$u_1$	2	2	2	1	0	0	0
$u_4$	2	2	2	2	0	0	0
$u_7$	3	3	3	3	0	0	0
$u_3$	4	4	3	3	0	0	0
$u_5$	4	4	3	2	0	0	0
$u_2$	5	5	5	5	0	0	0
$u_6$	7	7	5	4	0	0	0
	1	2	3	4	5	6	7

Столбцы матрицы весов снизу во вспомогательной строке пронумерованы номерами, отвечающими номерам строк матрицы смежности. Строки пронумерованы вершинами из  $V_1$ . Для каждой вершины  $u_i$  на  $j$ -м месте в качестве веса возьмем число единиц, попадающих в трафарет при размещении строки матрицы смежности, отвечающей вершине  $u_i$ , в строку с номером  $j$ .

Далее, решаем задачу о назначениях на максимум.

Находим оптимальное упорядочение множества  $V_1$ , для которого в трафарете находится наибольшее возможное число единиц.

Затем выполняем стандартное преобразование графа к двудольно-пороговому виду.

На этом алгоритм завершает работу.

Для нашего **Примера**, решая задачу о назначениях, каким-либо известным образом, можно проверить, что при оптимальном заполнении в трафарете будет содержаться 19 единиц, поэтому вне трафарета будет  $27 - 19 = 8$  единиц. Следовательно,  $V_1\text{-dist}(H, G) = 8$ , т. е. для нашего **Примера** нижняя оценка, равная 7, не достигается. Оптимальное решение получается при следующем распределении вершин по строкам:

$$u_6 \rightarrow 1, u_2 \rightarrow 3, u_5 \rightarrow 2, u_3 \rightarrow 4, u_7 \rightarrow 5, u_4 \rightarrow 6, u_1 \rightarrow 7.$$

Таким образом, в исходной матрице смежности двудольного графа  $H$  нужно поменять местами вторую и третью строки (они отвечают вершинам  $u_2$  и  $u_5$ , соответственно). Ясно, что такая перестановка в исходной матрице приводит к увеличению числа единиц в трафарете! Оптимальность такой перестановки строк нетрудно проверить напрямую, т. е. никакие перестановки строк не увеличат число единиц в трафарете.

2	$u_1$				1		1		
2	$u_4$			1		1			
3	$u_7$	1		1	1				
4	$u_3$	1	1			1		1	
5	$u_2$	1	1	1	1	1			
4	$u_5$		1	1			1		1
7	$u_6$	1	1		1	1	1	1	1
		$v_7$	$v_6$	$v_5$	$v_4$	$v_2$	$v_8$	$v_1$	$v_3$
		4	4	4	4	4	3	2	2

Здесь вне трафарета находится 8 единиц. Поэтому двудольный граф  $H$  можно привести к двудольно-пороговому виду с помощью восьми  $V_1$ -вращений рёбер и  $V_1\text{-dist}(H, G) = 8$ .

Отметим, что для нашего **Примера** нетрудно установить (не решая задачу о назначении), что при перестановке строк нельзя уменьшить количество вершин вне трафарета.

Приведем теперь краткое описание нашего алгоритма, решающего задачу о  $V_1$ -приведении двудольного графа  $H = (V_1, E, V_2)$  к двудольно-пороговому виду.

**Алгоритм.** На входе имеем  $n \times m$ -матрицу смежности  $M$  двудольного графа  $H = (V_1, E, V_2)$  (нумерацию строк берём снизу вверх, а нумерацию столбцов — слева направо). Последовательно выполняем следующие действия.

- (1) Перепишем матрицу смежности  $M$ , упорядочив слева направо по не возрастанию степеней вершины из  $V_2$  и переставив соответствующим образом столбцы матрицы  $M$ .
- (2) Перепишем текущую матрицу смежности  $M$ , упорядочив слева направо по не возрастанию степеней вершины из  $V_1$  и переставив соответствующим образом строки матрицы  $M$  (выполнение шага (2) можно пропустить, но лучше выполнить для убыстрения решения задачи о назначениях).
- (3) Формируем трафарет в текущей матрице  $M$  (см. выше определение трафарета).
- (4) Формируем  $n \times n$ -матрицу весов для задачи о назначениях на максимум (где  $i$ -вес строки матрицы  $M$  (точнее вершины ей отвечающей) равен количеству единиц, которое она вносит в трафарет, будучи размещённой в строку матрицы с номером  $i$ ).
- (5) Решаем каким-либо способом задачу о назначениях на максимум. Получаем новое упорядочение множества  $V_1$ .
- (6) Преобразуем текущую матрицу  $M$ , переставляя строки в соответствии с полученным упорядочением множества  $V_1$ .
- (7) Находим единицы, которые не попали в трафарет. Строим ответ: последовательность наименьшей возможной длины, состоящую из  $V_1$ -вращений рёбер, которая двудольный граф  $H = (V_1, E, V_2)$  преобразует в двудольно-пороговый граф  $G$ . Для этого по очереди все такие единицы перемещаем вниз в своем столбце на пустое место в трафарете. При этом длина полученной последовательности равна  $V_1\text{-dist}(H, G)$ . Stop.

Очевидно, алгоритм решает задачу за полиномиальное время [1], которое зависит от выбора алгоритма, решающего задачу о назначениях.

## 2. ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Рассмотрим теперь решение задачи о  $V_2$ -приведении двудольного графа  $H = (V_1, E, V_2)$  к двудольно-пороговому виду для нашего **Примера**.

Рассмотрим матрицу смежности (4) нашего графа, и выделим в ней трафарет относительно последовательности вершин из  $V_1$ .

(5)

2	$u_1$				1		1		
2	$u_4$			1		1			
3	$u_7$	1		1	1				
4	$u_3$	1	1			1		1	
4	$u_5$		1	1			1		1
5	$u_2$	1	1	1	1	1			
7	$u_6$	1	1		1	1	1	1	1
		$v_7$	$v_6$	$v_5$	$v_4$	$v_2$	$v_8$	$v_1$	$v_3$
		4	4	4	4	4	3	2	2

Заметим, что из условия  $\alpha \leq \beta^*$  вытекает условие  $\beta \leq \alpha^*$ , так как переход к сопряжённому разбиению является антиавтоморфизмом решётки  $NPL(m)$  [11]. В силу свойств антиавтоморфизма получаем

$$\text{height}(\beta^*, \alpha) = \text{height}(\alpha^*, \beta) \leq V_2\text{-dist}(H, G).$$

Для нашего **Примера** эта оценка снизу равна 7.

Поменяем местами столбцы с номерами 1 и 3, а также — столбцы с номерами 2 и 4. Матрица смежности примет следующий вид.

2	$u_1$	1				1			
2	$u_4$	1			1				
3	$u_7$	1	1	1					
4	$u_3$			1	1	1		1	
4	$u_5$	1			1		1	1	
5	$u_2$	1	1	1	1	1			
7	$u_6$		1	1	1	1	1	1	
		$v_5$	$v_4$	$v_7$	$v_6$	$v_2$	$v_8$	$v_1$	$v_3$
		4	4	4	4	4	3	2	2

Теперь вне графарета содержится семь единиц. Совершая семь  $V_2$ -вращений рёбер, мы переместим вдоль строк в графарет все единицы, а граф  $H = (V_1, E, V_2)$  станет двудольно-пороговым графом  $\text{btg}(\alpha, \alpha^*)$ . Поскольку мы достигли оценки снизу, задача об оптимальном  $V_2$ -приведении нашего двудольного графа  $H = (V_1, E, V_2)$  к двудольно-пороговому виду решается за семь  $V_2$ -вращений рёбер, т. е.  $V_2\text{-dist}(H, G) = 7$ . Оптимальность такой перестановки столбцов нетрудно проверить напрямую, т. е. никакие перестановки столбцов не увеличат число единиц в графарете.

Ранее мы установили, что  $V_1\text{-dist}(H, G) = 8$ . Эти числа разные!

**Вопрос 1.** Пусть граф  $H = (V_1, E, V_2)$  — двудольный граф, который не является двудольно-пороговым графом. При каких условиях рассматриваемые числа  $V_1\text{-dist}(H, G)$  и  $V_2\text{-dist}(H, G)$  совпадают?

Двудольный граф  $H = (V_1, E, V_2)$  можно приводить к двудольно-пороговому виду с помощью последовательности преобразований, в которой могут присутствовать и  $V_1$ -вращения рёбер, и  $V_2$ -вращения рёбер.

**Вопрос 2.** Какое количество двудольно-пороговых графов можно таким образом получить для двудольного графа  $H = (V_1, E, V_2)$  и как они устроены?

## REFERENCES

- [1] M.O. Asanov, V.A. Baransky, V.V. Rasin, *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy*, Lan', SPb, 2010. [In Russian]
- [2] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. MR1634067
- [3] A. Ivanyi, L. Lucz, G. Gombos, T. Matuszka, *Parallel enumeration of degree sequences of simple graphs*, Acta Univ. Sapientiae, Informatica, **4(2)** (2012), 260–288.
- [4] A. Kohnert, *Dominance order and graphical partitions*, Electronic Journal of Combinatorics, **11(4)** (2004), 1–17. MR2035320
- [5] V.A. Baransky, T.A. Senchonok, *O porogovyh grafah i realizaciyah graficheskikh posledovatel'nostei*, Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO PAN, **23(2)** (2017), 22–31. [In Russian] DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-22-31
- [6] P. Erdős, T. Gallai, *Graphs with given degree of vertices*, Math. Lapok, **11** (1960), 264–274.
- [7] V.A. Baransky, T.A. Senchonok, *On maximal graphical partitions which are nearest to a given graphical partition*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 338–363. [Russian, English abstract] DOI: 10.33048/semi.2020.17.022
- [8] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *On the partition lattice of all integers*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 744–753. [Russian, English abstract] DOI: 10.17377/semi.2016.13.060

- [9] V.A. Baransky, T.A. Senchonok, *Dvydol'no-porogovye grafy*, Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO PAN, **26(2)** (2020), 56–67. [In Russian] DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-56-67
- [10] N.V.R. Mahadev, U.N. Peled, *Threshold Graphs and Related Topics*, Annals of Discrete Mathematics, Elsevier Science, 1995. MR1417258
- [11] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *O reshetke razbieniyy natural'nogo chisla*, Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO PAN, **21(3)** (2015), 30–36. [In Russian] MR3468086

VITALY ANATOLIEVICH BARANSKY  
URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
PR. LENINA, 51,  
620083, EKATERINBURG, RUSSIA  
*E-mail address:* `vitaly.baransky@urfu.ru`

TATIANA ALEXANDROVNA SENCHONOK  
URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
PR. LENINA, 51,  
620083, EKATERINBURG, RUSSIA  
*E-mail address:* `tatiana.senchonok@urfu.ru`