S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1023–1026 (2021) УДК 514
DOI 10.33048/semi.2021.18.077 MSC 53C

О МЕТРИКАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ДИСКОНТИНУУМ НЕКОНГРУЕНТНЫХ ПОГРУЖЕНИЙ В $\mathbb{R}^3$

И.Х. САБИТОВ

Abstract. We present a description of metrics of revolution immersible in $\mathbb{R}^3$ by a discontinuum set of non-congruent isometric surfaces.

Keywords: metric, isometric immersion, surface of revolution, equation, set of solutions.

1. Вопрос о единственности/неединственности изометрического погружения данной метрики в пространство является одним из важнейших вопросов метрической геометрии. В свою очередь, вопрос о единственности имеет разные постановки в зависимости от требований на класс погружений. В частности, можно требовать, чтобы множество искомых изометрических погружений составляло *непрерывное* относительно некоторого параметра семейство. Тогда говорят о возможности *изгибания* поверхности, понимая под поверхностью некоторое рассматриваемое изометрическое погружение данной метрики (а иногда просто берется некоторая заданная поверхность и ищется ее непрерывная деформация с сохранением метрики — в этом случае вопрос о существовании изометрического погружения данной метрики отпадает). Поверхности, получаемые друг из друга деформацией изгибания, называются *наложимыми.*

Можно ставить вопрос о существовании хотя бы двух изометрических погружений данной метрики или вопрос о существовании еще одной поверхности, изометричной данной поверхности, в этом случае говорят о вопросе *однозначной определенности* рассматривамой поверхности ее метрикой или о *дискретной изометрической деформации*, когда не предполагается, что другая изометричная поверхность получается из исходной ее непрерывной изометрической

Sabitov, I.Kh., On metrics admitting a discontinuum set of non-congruent immersions in $\mathbb{R}^3$.

Поступила 1 августа 2021 г., опубликована 5 октября 2021 г.

деформацией. До недавнего времени в русскоязычной литературе для всех видов изометрических деформаций употреблялся общий термин "изгибание сейчас предпочитают говорить "изгибание имея в виду *непрерывную* изометрическую деформацию, и говорить об изометрическом *преобразовании*, имея в виду дискретную изометрическую деформацию. Но *семейство* изометричных поверхностей, каждая из которых получена из данной поверхности некоторым дискретным преобразованием, само может и не быть дискретным, в том смысле, что его элементы не обязательно будут изолированными точками этого множества. Поэтому, имея в виду только факт отсутствия деформации изгибания, говорят о *множестве неналожимых* изометричных поверхностей, а какое оно, дискретное или нет, это уточняется в каждом конкретном случае.. Одной из самых интересных задач теории изгибаний является до сих пор не доказанная и не опровергнутая гипотеза Эйлера о неизгибаемости компактной поверхности (без края). В его времена еще не было уточнения, о каких изометрических деформациях идет речь. Необходимость уточнения стала очевидной после построения в 1977 г. примера изгибаемого замкнутого многогранника без самопересечений. В 1989 был построен пример счетного семействах компактных поверхностей [1], в котором в окрестности каждой поверхности существовала изометричная ей поверхность, и тем самым было показано, что гипотезу Эйлера надо исследовать в классе изгибаний, так как в классе неналожимых или дискретных изометрических деформаций она неверна. В той же работе [1] без подробного доказательства было приведено утверждение, что предложенный метод пригоден также для построения семейства неналожимых изометричных поверхностей мощности континуума. В 2002 г. в работе [2] дано подробное его доказательство с уточнением, что это множество неналожимых изометричных поверхностей может иметь внутреннюю структуру любого замкнутого нигде не плотного множества на отрезке, в том числе и положительной меры[1].

Мы хотим представить тот же результат из [1] и [2] не как свойство поверхности, а как свойство погружаемой метрики.

2. Докажем теорему

Теорема 1. *Существуют метрики, которые можно изометрически погрузить в $\mathbb{R}^3$ в виде дисконтинуума неналожимых поверхностей гладкости C^∞.*

Доказательство. Пусть метрика вращения

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho)(d\xi^2 + d\eta^2), \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{1}$$

задана в области $D^= : 0 \le \rho < \infty$ (мы сразу ищем компактную поверхность рода 0; можно было бы найти, как в [2], часть поверхности как поверхность вращения и к ней гладко приклеить любую неподвижную поверхность, чтобы получилась поверхность любого желательного рода). Требование регулярности метрики в другом полюсе приводит к равенству $\Lambda(\infty) = 0$. Изометрическое погружение метрики (1) в $\mathbb{R}^3$ задается уравнениями

$$x = \rho\Lambda(\rho)\cos\varphi,\ y = \rho\Lambda(\rho)\sin\varphi,\ z = g(\rho), \tag{2}$$

[1]Как критическое замечание отметим, что 1) приведенное на стр. 888 в русском оригинале слово "bending"надо заменить на "bendable"; 2) к упоминаемой на той же стр. 888 работе [14] и использованному оттуда результату Р. Коннелли не имеет никакого отношения (возможно, Коннелли сообщал авторам некоторые свои соображения по теме вопроса).

где функция $g(\rho)$ должна удовлетворять равенству

$$g'^2(\rho) = -\rho\Lambda'(\rho)(2\Lambda(\rho) + \rho\Lambda'(\rho)). \tag{3}$$

Пусть значение $\rho = 0$ соответствует полюсу $(0, 0, 0)$. В этой точке требование гладкости метрики (1) приводит к условию $\Lambda'(0) = 0$, а в окрестности полюса должно быть $\Lambda'(\rho) \leq 0$. Предположим, что в малой проколотой окрестности полюса выполнено строгое неравенство $\Lambda'(\rho) < 0$ и что там

$$g'(\rho) = \sqrt{-\rho\Lambda'(\rho)(2\Lambda(\rho) + \rho\Lambda'(\rho))},\ g(\rho) = \int_0^\rho \sqrt{-t\Lambda'(t)(2\Lambda(t) + t\Lambda'(t))}dt.$$

А дальше пусть появляются значения ρ, в которых $g'(\rho) = 0$. Предполагаем, что $\Lambda(\rho)$ класса C^∞. Производная $\Lambda'(\rho)$ не может быть положительной, иначе получится $g'^2 < 0$, значит, всюду $\Lambda'(\rho) \leq 0$, и положительная функция Λ убывает от $\Lambda(0)$ до $\Lambda(\infty)$ (причем $\Lambda(R) = 0$, если $R = \infty$). Нули функции $\rho\Lambda'(\rho)(2\Lambda(\rho)+\rho\Lambda'(\rho))$ заполняют замкнутое множество и на каждом интервале, где $g'^2(\rho) > 0$, мы можем выбирать значение $g'(\rho) > 0$ или $g'(\rho) < 0$, тем самым получая разные поверхности с одинаковой метрикой. Так как построение C^∞-гладких функций с обращением в нуль в концевых точках счетного числа интервалов общеизвестно, то соответствующим образом построенные функции $\Lambda(\rho)$ дадут метрики, реализуемые дисконтинуумом неналожимых изометричных поверхностей. Теорема доказана. □

Замечание 1. *В уравнении (1) параметр ρ не играет роль расстояния до оси вращения, поэтому не исключено, что меридиан имеет самопересечения.*

Замечание 2. *Точки, где $g'(\rho) = 0$, соответствуют точкам, где меридиан поверхности вращения имеет касательную, ортогональную к оси вращения, — оси Oz. А наличие такой касательной приводит к жесткости 2-го порядка сколь угодно узкого пояса с соответствующей параллелью* [3]. *Это значит, что рассматриваемые поверхности являются неизгибаемыми в классе аналитических по параметру деформаций, т.е. эти поверхности действительно являются неналожимыми.*

Замечание 3. *Гипотеза Эйлера верна для всех компактных поверхностей, жестких относительно бесконечно малых изгибаний 1-го или 2-го порядков, если предполагать, что рассматриваются только аналитические по параметру изгибания. В частности, в такой постановке гипотеза верна для всех торообразных поверхностей вращения, так как они обладают свойством жесткости 2-го порядка при очень широких условиях на меридиан.*

.

References

[1] I.Kh. Sabitov, *Local theory of the bendings of surfaces*, in Burago Yu.D.(ed.), Zalgaller V.A.(ed.), Gamkrelidze R.V.(ed.), *Geometry III. Theory of surfaces*, Springer, Berlin, 1992. 179–250. MR1039820

[2] R. Sa Erp, É. Tubian, *Discrete and nondiscrete isometric deformations of surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Sib. Math. J., **43**:4 (2002), 714–718. MR1934588

[3] I.Kh. Sabitov, *Infinitesimal bendings of trough of revolution*, Math. USSR, Sb., **27**:1 (1075), 103–117. MR0405299

Idzhad Kh. Sabitov
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory,
Moscow, 119991, Russia
Email address: isabitov@mail.ru