S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1015–1022 (2021) УДК 517.51, 517.54
DOI 10.33048/semi.2021.18.076 MSC 30C65, 46E35

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ p-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В R^2

А.С. РОМАНОВ

Abstract. We consider the question of the relationship between p-harmonic functions and extremal functions for p-capacity in R^2.

Keywords: Sobolev spaces, p-harmonic functions, capacity, extremal functions.

Нас интересует вопрос о взаимосвязи p-гармонических функций и экстремальных функций для вариационной p-ёмкости в областях евклидова пространства R^2.

С одной стороны, экстремальная для p-ёмкости пары континуумов K_0 и K_1, принадлежащих замыканию области $G \subset R^2$, функция u минимизирует значение p-интеграла Дирихле и является p-гармонической, т.е. является слабым решением p-уравнения Лапласа. Поскольку всюду в области $0 \leq u(x) \leq 1$ и квазивсюду $u|_{K_0} = 0, u|_{K_1} = 1$, то, конечно, не всякая p-гармоническая функция является p-экстремальной.

С другой стороны, функция $w = a\,u + b$ $(a, b \in R)$ минимизирует значение p-интеграла Дирихле для класса допустимых функций, равных b на множестве K_0 и равных $a + b$ на множестве K_1. Функции такого вида тоже можно считать p-экстремальными.

В работе доказывается следующее утверждение:

если функция u является p-гармонической в области $G \subset R^2$, то у всякой точки $\xi \in G$, в которой $\nabla u(\xi) \neq 0$, существуют окрестность Ω и такие

Romanov, A.S., Extremality of p-harmonic functions in R^2 .

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0007).

Поступила 17 июня 2021 г., опубликована 29 сентября 2021 г.

континуумы $K_0, K_1 \subset \overline{\Omega}$, *что функция* $w = u|_{\Omega}$ *представима в виде* $w = a\,\tilde{u} + b$, *где функция* $\tilde{u}$ *является экстремальной в* Ω *для* p*-ёмкости пары* (K_0, K_1).

1. О p-гармонических функциях

При $1 < p < \infty$ функция u называется p-гармонической в области $G \subset R^2$, если $u \in W^1_{p,loc}(G)$ и является слабым решением p-уравнения Лапласа, т.е.

$$\iint\limits_G \left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u, \nabla\varphi\right)\,dx\,dy = 0$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Свойства p-гармонических функций на плоскости изучались многими авторами, отметим лишь нужные нам свойства.

При $1 < p < \infty$, согласно работе [1], p-гармоническая в области G функция u является гладкой в G,

$$u \in C^{k,\alpha}_{loc}(G) \cap W^{k+2}_{q,loc}(G),$$

где целое $k \geq 1$, показатель $\alpha \in (0,1]$ и

$$k + \alpha \geq \frac{1}{6}\left(7 + \frac{1}{p-1} + \sqrt{1 + \frac{14}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}}\right), \quad 1 \leq q < \frac{2}{2-\alpha}.$$

Из этой оценки следует, что p-гармоническая функция u при всех $1 < p < \infty$ принадлежит классу $C^{1,\alpha}_{loc}(G)$, где $\alpha > 1/3$, при $1 < p < 2$ функция $u \in C^{2,\beta}_{loc}(G)$, где $\beta > 0$.

В работе [2] доказано, что множество критических точек отличной от постоянной p-гармонической функции

$$Z = \{(x,y) \in G \mid \ \nabla u(x,y) = 0\}$$

является дискретным, т.е. его точки являются изолированными в области G, при этом $u \in C^\infty(G \setminus Z)$.

Следовательно существует круг $B \subset G$, в котором $|\nabla u| > \alpha > 0$ и функция $u \in C^\infty(B)$.

Для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$

$$\iint\limits_B \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right)\cdot\varphi\,dx\,dy = -\iint\limits_B \left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u, \nabla\varphi\right)\,dx\,dy = 0.$$

Согласно лемме дю Буа-Реймона

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) = 0$$

в круге B.

2. Сопряженные функции

Рассмотрим p-гармоническую в области G функцию u и круг $B \subset G$, в котором $u \in C^\infty(B)$, $|\nabla u| > \alpha > 0$ и выполняется равенство

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) = 0.$$

Определим в круге B векторное поле $\mathbf{V}$ условием

$$\mathbf{V} = |\nabla u|^{p-2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

и дифференциальную форму ω равенством

$$\omega = |\nabla u|^{p-2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right).$$

Поскольку

$$d\omega = \frac{\partial u}{\partial y}\left(-|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\wedge dx\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\wedge dy\right) =$$

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right)\,dx\wedge dy = 0,$$

то форма ω является замкнутой и по теореме Пуанкаре ω является точной в круге B. Следовательно у дифференциальной формы ω в круге B существует первообразная, т.е. такая функция w, что $dw = \omega$ и $\nabla w = \mathbf{V}$.

Если область G является ограниченной и односвязной, а существование первообразной понимается в обобщенном смысле, то принадлежащая пространству Соболева функция w, для которой почти всюду $\nabla w = \mathbf{V}$, может быть определена во всей области G.

Векторное поле $\mathbf{V} = |\nabla u|^{p-2}\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ однозначно определено в области $G\setminus Z$. Поскольку $|\mathbf{V}| = |\nabla u|^{p-1}$, то полагая $|\mathbf{V}(z)| = 0$ в критических точках функции u $(z\in Z)$, мы можем считать поле $\mathbf{V}$ непрерывным во всей области G. Из равенства $|\mathbf{V}|^{p'} = |\nabla u|^p$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, следует, что $|\mathbf{V}| \in L_{p',loc}$.

Непрерывное векторное поле называется безвихревым в области G, если его циркуляция вдоль любого простого замкнутого липшицева контура, лежащего в G, равна нулю. Как отмечено в [3], нет необходимости проверять данное свойство для всех липшицевых контуров, достаточно проверить равенство нулю циркуляции вдоль контуров, составленных из параллельных координатным осям отрезков.

Лемма 2.1. Циркуляция векторного поля $\mathbf{V}$ вдоль любой простой замкнутой ломаной $L\subset G$, образованной параллельными координатным осям отрезками, равна нулю.

Данное утверждение является непосредственным следствием леммы 1.2 работы [4], которая формально была сформулирована для p-экстремальной функции, но в доказательстве реально использовалась лишь p-гармоничность функции u.

Безвихревое векторное поле $\mathbf{V}$ имеет потенциал в смысле работы [3], т.е. существует такая функция v, что

$$v(b) - v(a) = \int\limits_{\gamma} (\mathbf{V}, \vec{\tau})\,dl$$

для любых точек $a, b\in G$ и для почти всех липшицевых кривых γ, соединяющих точку a с точкой b. Здесь символом $\vec{\tau}$ обозначен касательный вектор к кривой γ, а выражение «*для почти всех липшицевых кривых*» означает равенство нулю p'-модуля семейства кривых, для которых равенство не выполняется.

Согласно работе [3] функция v будет абсолютно непрерывной на почти всех прямых, параллельных координатным осям, и почти всюду в области G будут существовать частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

т.е. $\nabla v = \mathbf{V}$ почти всюду в G.

Сопряженные функции u и v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

которая при $p = 2$ превращается в систему Коши-Римана. При этом $\nabla v \perp \nabla u$ и $|\nabla v|^{p'} = |\nabla u|^p$.

Поскольку для всякого компакта $K \subset G$

$$\iint\limits_K |\nabla v|^{p'}\,dx\,dy = \iint\limits_K |\nabla u|^p\,dx\,dy < \infty,$$

то функция v принадлежит пространству Соболева $L^1_{p',loc}(G)$. Как было ранее отмечено, функция $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(G)$, поэтому $|\nabla u|$ и $|\nabla v| = |\nabla u|^{p-1}$ ограничены на компакте K. Следовательно $v \in W^1_{p',loc}(G)$.

Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Поскольку множество критических точек функции u дискретно, то существует такая подобласть $\Omega \subset G$ и такое значение $r_0 > 0$, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$ и $\overline{B(z_k, r_0)} \subset \Omega$ для всех $z_k \in Z \cap \overline{\Omega}$ ($Z \cap \partial\Omega = \emptyset$).

Пусть $C_{r,k} = \partial B(z_k, r)$ и $\mathbf{W} = |\nabla v|^{p'-2}\nabla v$.

При всех $0 < r < r_0$ в области

$$\Omega_r = \Omega \setminus \bigcup_k \overline{B(z_k, r)}$$

функция u принадлежит пространству $C^\infty(\Omega_r)$. Поэтому в области Ω_r

$$\operatorname{div}\mathbf{W} = \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p'-2}\,\nabla v\right) = \operatorname{div}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Поскольку функция φ ограничена ($|\varphi| \le M < \infty$) и $|\nabla v|^{p'-1} = |\nabla u|$, то

$$\left|\lim_{r\to 0}\int\limits_{C_{r,k}} (\varphi\,\mathbf{W}, \vec{n})\,dl\right| \le M \lim_{r\to 0}\int\limits_{C_{r,k}} |\nabla u|\,dl \to 0 \quad \text{при } r \to 0.$$

Воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{\partial\Omega_r} (\varphi\,\mathbf{W}, \vec{n})\,dl = \iint\limits_{\Omega_r} \varphi\,\operatorname{div}\mathbf{W}\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_r} (\mathbf{W}, \nabla\varphi)\;dxdy.$$

Учитывая финитность функции φ и равенство нулю дивергенции поля $\mathbf{W}$, получаем

$$\iint\limits_G \left(|\nabla v|^{p'-2}\,\nabla v, \nabla\varphi\right)\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega (\mathbf{W}, \nabla\varphi)\;dxdy = \lim_{r\to 0}\iint\limits_{\Omega_r} (\mathbf{W}, \nabla\varphi)\;dxdy =$$

$$\lim_{r\to 0}\sum_k \int\limits_{C_{r,k}} (\varphi\,\mathbf{W}, \vec{n})\,dl = 0.$$

Следовательно функция v является p'-гармонической.

3. Вариационная p-ёмкость

Рассмотрим ограниченную область $G \subset R^2$ и два непересекающихся компакта $K_0, K_1 \subset \overline{G}$. Класс допустимых функций для пары множеств (K_0, K_1) определим условием

$$D(K_0, K_1, G) = \{u \in L_p^1(G) \cap C(G \cup K_0 \cup K_1) \ \mid\ u|_{K_0} = 0,\ u|_{K_1} = 1\},$$

а при $1 < p < \infty$ соответствующую p-ёмкость определим равенством

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \inf_{u \in D(K_0, K_1, G)} \iint\limits_G |\nabla u|^p \, dx \, dy.$$

Существует единственная экстремальная функция $u_0 \in \overline{D(K_0, K_1, G)}$ такая, что

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \iint\limits_G |\nabla u_0|^p \, dx \, dy.$$

Этот факт является следствием выпуклости множества допустимых функций и равномерной выпуклости пространства Лебега L_p при $p > 1$ [5].

Экстремальная функция является решением вариационной задачи и, следовательно, решением уравнения Эйлера-Лагранжа для p-интеграла Дирихле понимаемого в данном случае в слабом смысле:

$$\iint\limits_G \left(|\nabla u_0|^{p-2} \, \nabla u_0, \nabla \varphi\right) \, dx \, dy = 0$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Поскольку экстремальная функция ограничена [5], то она принадлежит пространству Соболева $W_p^1(G)$ и является p-гармонической.

Различные свойства p-экстремальных функций можно найти, к примеру, в [4, 5].

4. Локальная экстремальность p-гармонических функций

Рассмотрим отличную от постоянной p-гармоническую в области $G \subset R^2$ функцию u. Поскольку множество критических точек функции u дискретно, то для всякой точки $\xi \in G \setminus Z$ существует такой круг $B = B(\xi, r)$, что $u \in C^\infty(B)$ и $|\nabla u(z)| > \alpha > 0$ при $z \in B$.

Символом v обозначим p'-гармоническую функцию сопряженную функции u в круге B.

Отображение $\Phi : B \to R^2$ определим равенством $\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Якобиан отображения отличен от нуля в круге B, поскольку

$$J(\Phi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |\nabla u|^{p-2} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = |\nabla u|^p > \alpha^p > 0.$$

Следовательно отображение Φ является диффеоморфизмом в круге B. Рассмотрим содержащий точку $\Phi(\xi)$ прямоугольник $P \subset \Phi(B)$ со сторонами параллельными координатным осям OU и OV. Прообразом прямоугольника P будет окрестность точки ξ, ограниченная линиями уровня функций u и v.

Окрестность такого вида будем называть четырехсторонником, а соответствующие граничные дуги его "сторонами".

Пусть значения $t_0 < t_1$ и $s_0 < s_1$ таковы, что линии уровня $U_{t_0}, U_{t_1}, V_{s_0}, V_{s_1}$ ограничивают четырехсторонник $D_\star \subset G$, в котором "стороны" F_i являются дугами линий уровня U_{t_i}, а "стороны" E_i являются дугами линий уровня V_{s_i}. Положим $t_1 - t_0 = \Delta$, $s_1 - s_0 = \delta$. По теореме Сарда при почти всех $t \in (t_0, t_1)$ линия уровня U_t является гладкой кривой и касательный к ней вектор $\vec{\tau}$ параллелен градиенту функции v, поэтому

$$\delta = \int\limits_{U_t} (\nabla v, \vec{\tau})\, dl = \int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1}\, dl.$$

Используя формулу интегрирования по линиям уровня [6] получаем

$$\iint\limits_D |\nabla u|^p\, dx\, dy = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1}\, dl \right) dt = \delta \cdot \Delta,$$

$$\iint\limits_D |\nabla v|^{p'}\, dx\, dy = \iint\limits_D |\nabla u|^p\, dx\, dy = \delta \cdot \Delta.$$

Рассмотрим функции $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, определяемые в области D равенствами

$$\tilde{u} = \frac{u - t_0}{\Delta}, \quad \tilde{v} = \frac{v - s_0}{\delta}.$$

Поскольку функция $\tilde{u}$ является допустимой для пары (F_0, F_1), а функция $\tilde{v}$ является допустимой для пары (E_0, E_1), то

$$\|\tilde{u}\big|L_p^1(D)\| \geq [\mathrm{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p}, \quad \|\tilde{v}\big|L_{p'}^1(D)\| \geq [\mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'}. \tag{3.1}$$

При этом

$$\|\tilde{u}\big|L_p^1(D)\| \cdot \|\tilde{v}\big|L_{p'}^1(D)\| = \frac{1}{\Delta}\|u\big|L_p^1(D)\| \cdot \frac{1}{\delta}\|v\big|L_{p'}^1(D)\| =$$

$$\frac{(\delta\Delta)^{1/p}(\delta\Delta)^{1/p'}}{\delta\Delta} = 1. \tag{3.2}$$

Поскольку для пар "противоположных сторон" четырехсторонника выполняется равенство [4, 7]

$$[\mathrm{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} \cdot [\mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1, \tag{3.3}$$

то из неравенств (3.1) и равенств (3.2), (3.3) следует, что

$$\|\tilde{u}\big|L_p^1(D)\|^p = \mathrm{cap}_p(F_0, F_1), \quad \|\tilde{v}\big|L_{p'}^1(D)\|^{p'} = \mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1).$$

В силу единственности экстремальной функции, $\tilde{u}$ является экстремальной функцией для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1), а $\tilde{v}$ является экстремальной функцией для p'-ёмкости пары "сторон" (E_0, E_1).

Таким образом в окрестности всякой точки $\xi \in G \setminus Z$ существует четырехсторонник $D_\star$, в котором p-гармоническая функция u представима в виде $u = a\tilde{u} + b$, где функция $\tilde{u}$ является экстремальной для p-ёмкости пары "сторон" четырехсторонника. В четырехстороннике $D_\star$ функция u является локально экстремальной в следующем смысле: для всякой подобласти $\Omega \subset D$ и всякой отличной от нуля функции $h \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\|u\big|L_p^1(\Omega)\| < \|u + h\big|L_p^1(\Omega)\|.$$

Действительно, пусть функция $\tilde{u}$ является экстремальной для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1), тогда функция w, равная $\tilde{u} + h/a$ в Ω и равная $\tilde{u}$ в $D_\star \setminus \Omega$ является допустимой для пары (F_0, F_1), поэтому

$$\|\tilde{u}\big|L^1_p(\Omega)\| \le \|\tilde{u} + h/a\big|L^1_p(\Omega)\|.$$

Однако, в силу единственности экстремальной функции, равенство может выполняться лишь при $h \equiv 0$. Локальная экстремальность p-гармонической функции u является очевидным следствием равенства $u = a\tilde{u} + b$.

Отметим различие между p-гармоничностью и p-экстремальностью. Рассмотрим четырехсторонник $G_\star$ и экстремальную для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1) функцию u. Пусть односвязная подобласть $D \subset G$ такова, что $F_0, F_1 \subset \partial D$ и $m_2(G \setminus D) > 0$. Функция u является p-гармонической в области G, а ее сужение $w = u|_D$ будет p-гармонической в D. При этом, в общем случае, функция w уже не будет p-экстремальной для пары (F_0, F_1) в D.

Проще всего это показать на примере прямоугольника.

Пример 3.1. Рассмотрим прямоугольник

$$P = \{(x, y) \in R^2 \big| 0 < x < a,\ 0 < y < b\}.$$

Обозначим через F_0 нижнее основание прямоугольника, а через F_1 верхнее основание. Известно, что в данном случае экстремальная функция для пары (F_0, F_1) в прямоугольнике P является линейной $u(x, y) = y/b$.

Если подобласть $D \subset P$ такова, что $F_0, F_1 \subset \partial D$ и $m_2(P \setminus D) > 0$, то сечения области D прямыми $y = C$ $(0 < C < b)$ имеют различную длину. Поэтому

$$\int\limits_{U_t \cap D} |\nabla u|^{p-1}\, dl = \int\limits_{U_t \cap D} \frac{dl}{b^{p-1}} \ne const,$$

но это противоречит экстремальности функции u в области D, поскольку характеристическое свойство экстремальной функции [4] заключается в том, что при почти всех $t \in (0, 1)$ должно выполняться равенство

$$\int\limits_{U_t \cap D} |\nabla u|^{p-1}\, dl = \mathrm{cap}_p(F_0, F_1, D).$$

При этом сужение функции u на прямоугольник

$$P^* = \{(x, y) \in R^2 \big| 0 < c < x < d < a,\ 0 < y < b\}$$

будет экстремальной в P^* для пары (F_0^*, F_1^*), где F_i^* - основания прямоугольника P^*.

Для четырехсторонников общего вида ситуация вполне аналогичная. Если функция u является экстремальной для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1) четырехсторонника $G_\star$, то ее сужение на четырехсторонник $D_\star \subset G_\star$, ограниченный линиями уровня функций u и v, будет линейным образом выражаться через p-экстремальную функцию для пары "сторон" четырехсторонника $D_\star$ [4].

References

[1] T. Iwaniec, J.J. Manfredi, *Regularity p-harmonic functions on the plane*, Rev. Mat. Iberoam., **5**:1-2, (1989), 1–19. Zbl 0805.31003

[2] J.J. Manfredi, *p-harmonic functions in the plane*, Proc. AMS, **103**:2, (1988), 473–479. Zbl 0658.35041

[3] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta math., **98**:3-4, (1957), 171–219. Zbl 0079.27703

[4] A.S. Romanov *Mappings related to extremal functions for p-capacity*, Sib. Électron. Mat. Izv., **16**, (2019), 1295–1311. Zbl 1431.30024

[5] V.M. Gold'shtein, Yu.G. Reshetnyak, *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht etc., 1990. Zbl 0687.30001

[6] V.G. Maz'ya, *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1985. Zbl 0692.46023

[7] V.A. Shlyk, *Capacity of a condenser and modulus of a family of separating surfaces*, J. Sov. Math., **59**:6 (1992), 1240–1248. Zbl 0783.31006

Romanov Alexandr Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: asrom@math.nsc.ru