S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том ??, стр. ?–? (202?) УДК 512.54

MSC 05C25

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ TI-ПОДГРУППЫ ПОРЯДКА 4 В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

Н. Д. Зюляркина, Т. Г. Ножкина

Abstract. We study linear groups for the presence of elementary Abelian TI-subgroups of order 4. It is proved that if $G = XA$, $X = F^*(G)$ be a quasisimple group, A an elementary abelian TI–subgroup of order 4, then X is not a covering group for $L_n(q)$, where q is odd.

Keywords: finite group, elementary Abelian TI-subgroup, centralizers of involutions and semi-involutions.

1. Введение

Многие задачи теории конечных групп связаны с описанием классов групп, содержащих подгруппы с рядом определённых свойств. В частности, большой интерес представляют так называемые плотно вложенные подгруппы и TI-подгруппы.

Подгруппа H конечной группы G называется *плотно вложенной* в G, если $|H|$ – чётен, а $|H \cap H^g|$ – нечётен для любого $g \in G - N_G(H)$.

Подгруппа A группы G называется *TI-подгруппой*, если $A \cap A^g = 1$ для любого $g \in G - N_G(A)$.

Заметим, что плотно вложенная 2-группа является TI-подгруппой.

Исследование плотно вложенных подгрупп началось с работы М. Судзуки, где были описаны группы, в которых силовская 2-подгруппа является TI-подгруппой. Следующий важный результат в этом направлении был получен Х. Бендером, который описал группы с сильно вложенной подгруппой. М. Ашбахером изучались плотно вложенные подгруппы корневого типа. При этом остались неисследованными случаи, когда силовская 2-подгруппа этой группы элементарная абелева или содержит единственную инволюцию. Им же были изучены группы с плотно вложенной подгруппой, у которой силовская 2-подгруппа является группой кватернионов.

Zyulyarkina, N.D., Nozhkina, T.G.,

А.А. Махневым был изучен случай плотно вложенной подгруппы корневого типа с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой A при условии, что слабое замыкание инволюции из A в силовской 2-подгруппе - абелева группа. Им же показано, что при изучении плотно вложенных подгрупп с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой можно ограничиться случаем, когда эта подгруппа циклическая порядка 4.

Ввиду того, что в известных простых группах, содержащих плотно вложенную подгруппу, эта подгруппа оказывается в большинстве случаев 2-группой, особый интерес представляет изучение групп, содержащих 2-подгруппу, являющуюся TI-подгруппой. Описанию таких групп посвящены многие работы Ф.Тиммесфельда и его соавторов.

А.А.Махневым была доказана редукционная теорема для TI-подгрупп, из которой следует, что наименее иссследованы случаи, когда эта подгруппа элементарная абелева или цициклическая.

В дальнейшем циклический случай исследовался в работах А.А. Махнёва и Н.Д. Зюляркиной. В частности, ими было показано [3], что циклическая TI-подгруппа нормализует любую компоненту (если таковые имеются).

2. Предварительные результаты

В дальнейшем будем считать, что $A \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{e, a_0, b_0, a_0b_0\}$ - TI-подгруппа конечной группы G.

Лемма 1. *Пусть x -- элемент нечётного порядка из $C_G(a_0)$. Тогда $x \in C_G(A)$.*

Доказательство. Пусть $|x| = 2n+1$. Так как A – TI-подгруппа группы G, то $x \in N_G(A)$. Если $x \notin C_G(A)$, то $a_0^x = a_0, b_0^x = a_0b_0, (a_0b_0)^x = b_0$. Тогда

$$b_0 = b_0^{x^{2n+1}} = \left(b_0^{x^{2n}}\right)^x = b_0^x = a_0b_0.$$

Из полученного противоречия, следует, что $x \in C_G(A)$.

Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что если конечная группа G содержит элементарную абелеву TI-подгруппу A порядка 4, то A нормализует любую компоненту из G, если таковые имеются.

Лемма 2. *Пусть A – элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4 конечной группы G, L — компонента из G, тогда $A \leq N_G(L)$.*

Доказательство. Так как A - TI-подгруппа, то A нормальна в централизаторе любого не единичного элемента из A.

Действительно, пусть $x \in C_G(a)$. Тогда для $a \in A, a \neq e$, имеем $a = a^x \in A^x \cap A$, следовательно, $A^x = A$ и $A \trianglelefteq C_G(a)$. Пусть G - контрпример наименьшегопорядка к лемме.

Тогда $\langle L^A \rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0b_0} \leq G$ и $G = \langle L^A \rangle \cdot A$.

Случай 1. $\langle L^A \rangle = L \times L^{a_0} \times L^{b_0} \times L^{a_0b_0}$.

Введём следующие обозначения: $L = L_1$, $L^{a_0} = L_2$, $L^{b_0} = L_3$, $L^{a_0b_0} = L_4$, $H_{1,2} = \{ll^{a_0} \,|l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}$, $H_{3,4} = \left\{l^{b_0}l^{a_0b_0} \,\middle|l^{b_0} \in L_3, l^{a_0b_0} \in L_4\right\}$. Для диагонали $H_{1,2} = \{ll^{a_0} \,|l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}$ выполняется равенство $(ll^{a_0})^{a_0} = l^{a_0}l = ll^{a_0}$, поэтому $H_{1,2} \leq N_G(A)$. Так как $H_{1,2}$ порождается элементами нечётного порядка, то, по лемме 1, получим, что $H_{1,2} \leq C_G(A)$ и $H_{1,2}^{b_0} = H_{3,4}$. Тогда $H_{1,2} = H_{3,4}$ и $G = (L_1L_2) \cdot A$.

Допустим $L_1 \neq L_2$ и $L_1L_2 = L_1 \times L_2$. Заметим, что $ll^{a_0} \in C_G(A)$. Не нарушая общности, можно считать, что a_0 и b_0 переставляют компоненты L_1 и L_2, а (a_0b_0) их нормализует. То есть, для любого $l \in L_1$ будем иметь $l^{a_0b_0} \in L_1$ и для любого $l^{a_0} \in L_2$ будем иметь $(l^{a_0})^{a_0b_0} \in L_2$.

Обозначим $l^{a_0b_0} = l_1 \in L_1$, $(l^{a_0})^{a_0b_0} = l_2 \in L_2$. Тогда $(ll^{a_0})^{a_0b_0} = ll^{a_0} = l^{a_0b_0}(l^{a_0})^{a_0b_0} = l_1l_2$, следовательно, $l = l_1$, $l^{a_0} = l_2$, $a_0b_0 \in C_G(L_1)$ и $L_1 \leq N_G(A)$. Элементы нечётного порядка, по лемме 1, централизуют A, следовательно, $L_1 = L_2$, $G = L_1 \cdot A$ и $A \leq N_G(L_1)$.

Случай 2. Пусть $\langle L^A \rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0b_0} = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4$– центральное произведение.

Как в случае прямого произведения, получим, что

$$H_{1,2} = \{ll^{a_0} |\ l \in L_1,\quad l^{a_0} \in L_2\}$$

централизует A. Из чего также следует, что $H_{1,2} = H_{3,4}$ и $G = (L_1L_2) \cdot A$.

Допустим, что $L_1 \neq L_2$. Как было показано выше, $ll^{a_0} \in C_G(A)$, то есть, диагональ централизует любой элемент $x \in A$. Так как $A \nleq C_G(L_1)$, то для любого простого p, делящего $|L_1|$, и для любого $x \in A, x \neq e$, существует p-элемент h, такой, что $h \notin C_G(x)$. Для него, с одной стороны, $(hh^{a_0})^x = hh^{a_0}$, а с другой, $(hh^{a_0})^x = h^x (h^{a_0})^x$. Следовательно, $hh^{a_0} = h^x (h^{a_0})^x$. Так как произведение $L_1 \cdot L_2$ – центральное, то $\begin{cases} h^x = hz \\ (h^{a_0})^x = z^{-1}h^{a_0} \end{cases}$. Следовательно, z-является не единичным p-элементом из центра. Таким образом, порядок центра делится на p. Тогда, в силу выбора p, порядок центра делится на все простые делители $|L_1|$.

Центры квазипростых групп и их порядки полностью описаны в [1] и таких групп нет. Следовательно, $L_1 = L_2$, $G = L_1 \cdot A$ и $A \leq N_G(L_1)$.

Лемма доказана.

Лемма 2 показывает, что при исследовании групп, содержащих компоненты, вопрос сводится к изучению групп вида $G = F^*(G) \cdot A$, где $F^*(G)$ – квазипростая группа.

3. Линейные группы

Ввиду того, что классические группы Шевалле можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств, нам понадобятся сведения об инволюциях и полуинволюциях в таких группах.

Пусть V – векторное пространство размерности n над полем $k = GF(q)$, q нечетно, $\tilde{Y} = GL_n(k)$ и $Y \leq \tilde{Y}$. Обозначим через Iv тождественный автоморфизм пространства V, а через $\gamma Iv \quad (\gamma \in k^*)$ – автоморфизм, при котором каждый вектор из V умножается на γ. Неединичные элементы ω из Y, для которых $\omega^2 = \gamma Iv$, называются *полуинволюциями*. Ясно, что инволюции из Y – это полуинволюции. Полуинволюции, не являющиеся инволюциями, называются *истинными*.

Как показано в разделе 3A из [4], каждой инволюции $\omega \in Y$ соответствуют два подпространства V_ω^+ и V_ω^-из V:

$$V_\omega^+ = {}_V(\omega) = \{v \in V \mid \omega(v) = v\}, V_\omega^- = [V, \omega] = \{v \in V | \omega(v) = -v\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_\omega^+ \bigoplus V_\omega^-$, и тип инволюции ω определяется как $\dim V_\omega^-$. Для инволюции ω типа m базис в V называется стандартным, если в нем первые $n-m$ векторов выбраны из V_ω^+, а последние m векторов – из V_ω^-.

Пусть теперь $\omega \in Y$– истинная полуинволюция и $\omega^2 = \gamma Iv$.

Если $\gamma = \beta^2$ для некоторого элемента β из k, то $\omega = \beta Iv\omega_1$, где ω_1 – инволюция из $\tilde{Y}$. Определим в этом случае тип ω как минимум из типов двух инволюций ω_1 и $-Iv\omega_1$. Стандартный базис для ω определяется как стандартный базис той из инволюций ω_1 или $-Iv\omega_1$, тип которой минимален.

Если $\gamma \notin (k^*)^2$, то тип для ω считается равным 0.

Через X^* обозначим множество таких расширений группы X, что для любой подгруппы $\tilde{X}$ из X^* любой элемент из $\tilde{X} - X$ индуцирует на X внешний внутренне-диагональный автоморфизм.

Теорема 1. *Пусть $G = XA$, $X = F^*(G)$ – квазипростая группа, A – элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4. Тогда X не является накрывающей группой для $L_n(q)$, где q нечётно.*

Разобьём доказательство теоремы на три леммы.

Пусть G - контрпример к теореме. $G = XA, \quad X = F^*(G)$ - частное $SL_n(q)$, $n \geq 2, \quad q$ нечётно.

Лемма 3. *Случай $n \geq 3$ и $G \in X^*$ невозможен.*

Доказательство.

Допустим существует элементарная абелева TI – подгруппа $A \leq G$. $A = \{e, \ a_0, \ b_0, \ a_0b_0\}$, тогда $A \trianglelefteq C_G(a)$ для любого $a \in A$, $a \neq e$. Классы сопряжённых инволюций в частном $SL_n(q)$ описаны в [4].

Возможны два случая:

(1) либо a_0 соответствует инволюции u типа m,

(2) либо a_0 соответствует полуинволюции u типа 0.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай 1.

Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m, которая в стандартном базисе имеет вид: $u(e_i) = e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $u(e_i) = -e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Если $m \neq \frac{n}{2}$ или частное берётся по центральной подгруппе нечётного порядка, то

$$\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2} \leq C_{GL_n(q)}(a_0) \leq G_{n-m}(q) \times GL_m(q)$$

L_1 и L_2 – нормальные подгруппы в централизаторе инволюции a_0. Если $m > 2$ и $n-m > 2$, $q \neq 3$, то L_1 и L_2 – компоненты. Так как $A \trianglelefteq C_G(a_0)$, то A централизует L_1 и L_2. Таким образом, $a_0 \in C_{GL_n(q)}(L_1) \quad a_0 \in C_{GL_n(q)}(L_2)$. Следовательно, a_0 в стандартном базисе имеет вид: $a_0(e_i) = \alpha e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $a_0(e_i) = -\alpha e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$.

Аналогично, так как $b_0 \in C_{GL_n(q)}(L_1) \ \ b_0 \in C_{GL_n(q)}(L_2)$, то b_0 в стандартном базисе имеет вид: $b_0(e_i) = \gamma e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $b_0(e_i) = -\gamma e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$.

В любом случае, $a_0b_0 \in Z(G)$ и $A \trianglelefteq C_G(a_0b_0) = G$. Но $Z(G)$ – циклический и не содержит элементарных абелевых подгрупп.

Пусть теперь $m = \frac{n}{2}$, $X = SL_n(q)/Z_1$, порядок Z_1 – чётен.

По разделу 3A из [4] полный прообраз $C_{GL_n(q)/Z_1}(a_0)$ в $GL_n(q)$ при естественном гомоморфизме содержит подгруппу:

$$(\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2}) \cdot \langle \tau \rangle .$$

Если $m > 2$ и $q \neq 3$, то L_1 и L_2 –компоненты. Инволюция τ, которая в стандартном базисе имеет вид: $\tau(e_i) = e_{m+i}, \quad \tau(e_{m+i}) = e_i$ при $1 \leq i \leq m$, переставляет L_1 и L_2. Подгруппа $A \trianglelefteq C_G(a_0)$ централизует L_1 и L_2. Повторяя рассуждения, аналогичные случаю $m \neq \frac{n}{2}$, также получим, что A – подгруппа центра G, что невозможно.

Если $m = 1$ или $n - m = 1$, то данная ситуация разбирается аналогично.

При $m = 2$ и $q = 3$ в централизаторе инволюции содержится нормальная подгруппа, изоморфная $SL_2(3)$. В этом случае, по лемме 1, она централизуется подгруппой A, так как порождается элементами нечётного порядка.

Случай 2. Пусть a_0 соответствует полуинволюции u типа 0 из $GL_n(q)$. Тогда $u^2 = \gamma I_V$ для некоторого $\gamma \in k^* - (k^*)^2$, $n = 2m$ – чётно.

В данном случае $U = \langle Z, u \rangle$ – циклическая и $C_G(U) = C_G(u) \cong GL_m(q^2)$. Тогда из [4] следует, что существует элемент $x \in GL_n(q) = G$, имеющий в стандартном базисе вид: $x(e_i) = e_{m+i}, \quad x(e_{m+i}) = -e_i$ при $1 \leq i \leq m, \quad det(x) = (-1)^m, \quad |x| = 2, \quad u^x = -u$, такой, что

$$C_{GL_n(q)/Z}(u) = \left(GL_m(q^2)/Z\right) \cdot \langle x \rangle ,$$

где x индуцирует полевой автоморфизм порядка 2 на $GL_m(q^2)/Z$. Тогда в централизаторе инволюции a_0 есть компонента $L \cong SL_m(q^2)$. Подгруппа A централизует L, что невозможно, так как $C_X(L)$ – циклический.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Случай $n = 2$, $q \geq 5$ невозможен.*

Доказательство.

(1) Допустим $A = \{e, a_0, b_0, a_0b_0\}$ является TI-подгруппой группы G и $G \in X^*$, $G = GL_2(q), q \geq 5$. Все инволюции из A соответствуют инволюциям типа 1 из $GL_2(q)$. Тогда можно считать, что $a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и $a_0b_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Z(G)$. То есть $A \trianglelefteq C_G(a_0b_0) = Z(G)$. Противоречие.

(2) В A есть инволюция, соответствующая полуинволюции типа 0. Тогда G является подгруппой $G = GL_2(q)/Z_1$, $|Z_1|$ чётен.

Пусть $a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \notin k^2, \quad q \geq 5$, тогда

$$b_0 \in C_G(a_0) = \left\{ e, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma\beta & -\alpha \end{pmatrix} \right\},$$

$\alpha, \beta, \gamma \in F_q$.

Непосредственный подсчёт показывает, что $b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$a_0b_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ (или наоборот).

Пусть $s_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix} \in C_{GL_2(q)/Z}\left(a_0\right)$, тогда

$$b_0^{s_1} = \frac{1}{\alpha^2 - \gamma\beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma\beta^2 & 2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta\gamma & -\alpha^2 - \gamma\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Например, при $\alpha = 1, \beta = 2 \quad b_0^{s_1} \notin A$. То есть $A \ntrianglelefteq C_G\left(a_0\right)$ и, следовательно, A не является TI-подгруппой в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Случай $G \notin X^*$ невозможен.*

Доказательство.

(1) Лемма 5 верна при $n \geq 3$.

Как показано в лемме 4.27 из [4] для a_0 возможны следующие случаи:

(a) $a_0 = \varphi$ – полевой автоморфизм порядка 2;
(b) $a_0 = \tau$ – графовый автоморфизм порядка 2;
(c) $a_0 = \varphi\tau$ – графово-полевой автоморфизм порядка 2.

Рассмотрим эти случаи отдельно:

(a) Если $a_0 = \varphi$ – полевой автоморфизм порядка 2, тогда из [4] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L, изоморфную частному $SL_n(q_0)$, где $q = q_0^2$. Согласно лемме 1, A централизует L, то есть $A \leq C_G\left(L\right) = Z(L)\left\langle\varphi\right\rangle$, где $Z(L)$ – циклический. Пусть $b_0 \in Z(L)$, тогда $C_G\left(b_0\right) = XA$ и $b_0 \in Z\left(G\right)$, следовательно, A – не TI-подгруппа в G.

(b) Пусть $a_0 = \tau$ – графовый автоморфизм порядка 2. В теореме 4.5.1 из [2] приведена таблица централизаторов канонических графовых автоморфизмов порядка 2:

Группа	Условия	Централизатор
$SL_n(q)$	$n \geq 2$, n – чётно	$Sp_n(q)$
$SL_n(q)$	$n \geq 3$, n – нечётно	$Sp_n(q)$

Но тогда $C_X(a_0)$ содержит компоненту L. Повторяя рассуждения пункта 1, опять получим, что A не является TI-подгруппой.

(c) Если $a_0 = \varphi\tau$ – графово-полевой автоморфизм порядка 2, тогда по лемме 4.27 из [4] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L, изоморфную $SU_n(q_0)$, где $q = q_0^2$ и, аналогично пункту 1, A не является TI-подгруппой.

(2) Лемма 5 верна при $n = 2$.

Пусть $G = GL_2(q)$, $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда $q = q_0^2$. $C_{GL_2(q_0^2)}\left(a_0\right) \cong GL_2\left(q_0\right)$. Если $q_0 \geq 5$, то $GL_2\left(q_0\right)$ – компонента. Подгруппа A её централизует, но $Z(G)$ – циклический и не может содержать элементарных абелевых подгрупп порядка 4. Следовательно, в этом случае группа не может содержать элементарных абелевых TI-подгрупп порядка 4.

Далее $q_0 = 3$.

(a) $A = \{e, g, \varphi, g\varphi\}$, где g – инволюция из $GL_2(9)$. С учётом того, что элемент g в $C_{PGL_2(q)}\left(\varphi\right)$ сопряжён либо с $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, либо с $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, можно считать, что $g = g_1$ или $g = g_2$.

Возьмём элемент $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из $C_G(\varphi)$. Тогда $g_1^b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin A$ и $g_2^b = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin A$. Следовательно, $A^b \cap A = \{e, \varphi\}$ и A – не TI-подгруппа.

(b) $A = \{e, \tau, g\varphi, g\varphi\tau\}$, φ – полевой автоморфизм порядка 2, τ – графовый (инверсно-транспонирующий) автоморфизм порядка 2, $\tau \in C_{\tilde{G}}(\varphi)$ где $\tilde{G} = Aut\, GL_2\left(q_0^2\right)$. Элемент $g \in GL_2(9)$ должен быть таким, чтобы элементы $g\varphi$ и $g\varphi\tau$ имели порядок 2. Непосредственные вычисления показывают, что g соответствует одной из следующих матриц:

$$g_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};\ g_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix};\ g_3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix};$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix};\ g_5 = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix};\ g_6 = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix},$$

$\lambda \in F_9^*$.

Пусть $s \in C_G(\tau)$. Элемент $s \in C_G(\tau)$ тогда и только тогда, когда $s^{-1} = s^T$, следовательно, $s = s_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, либо $s = s_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ при $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha, \beta \in F_9$.

Из условия $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ следует, что элементы $(\alpha;\ \beta)$ могут принимать следующие значения: (1; 0), (2; 0), (0; 1), (0; 2), $(2p;\ 2p)$, $(2p;\ p)$, $(p;\ 2p)$, $(p;\ p)$, где p – корень неприводимого над F_3 многочлена $f(x) = x^2 + 1$.

Непосредственной проверкой получаем, что для матриц g_2, g_3, g_5, g_6 всегда существует пара $(\alpha,\ \beta)$ из перечисленных выше, такая, что $(g_i\varphi)^{s_k} \neq g_i\varphi$ для $i = 2; 3; 5; 6$ и $k = 1; 2$. Например, условие $(g_i\varphi)^{s_1} \neq g_i\varphi$ выполняется при $(\alpha,\ \beta) = (p;\ p)$ для всех четырёх матриц. Таким образом, $A \ntrianglelefteq C_G(\tau)$ и, следовательно, не является TI-подгруппой.

Пусть $A = \{e,\ \tau,\ g_1\varphi,\ g_1\varphi\tau\}$. В этом случае $(g_1\varphi)^{s_k} = \pm g_1\varphi$ для $k = 1; 2$. Возьмём матрицу $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in C_G(g_1\varphi)$. Для неё $\tau^s = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tau \notin A$ и, следовательно, A – не TI-подгруппа.

Пусть теперь $A = \{e,\ \tau,\ g_4\varphi,\ g_4\varphi\tau\}$. В этом случае, также, $(g_4\varphi)^{s_k} = \pm g_4\varphi$ для $k = 1; 2$. Возьмём матрицу $s = \begin{pmatrix} 2p+1 & p+1 \\ p+2 & p+1 \end{pmatrix} \in C_G(g_4\varphi)$. Для неё $\tau^s = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 2p \end{pmatrix} \tau \notin A$ и, следовательно, A – не TI-подгруппа.

Таким образом, $A \ntrianglelefteq C_G(\tau)$ и, следовательно, не является TI-подгруппой.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Горенстейн Д, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию* Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

[2] Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.*

[3] Н.Д. Зюляркина, Циклические TI-подгруппы порядка 4 в классических группах Шевалле нечетной характеристики, Вопросы алгебры и логики. Труды ИМ СО РАН, (1996), 89–110.

[4] M.E. Harris, Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over field of odd order, Transactions of the American math.soc., 272:1 (1982), 1–65.

Наталья Дмитриевна Зюляркина, Татьяна Геннадьевна Ножкина
Южно-Уральский Государственный Университет,
пр. Ленина, 76,
454080, Челябинск, Россия
Email address: `toddeath@yandex.ru, nozhkinatg@susu.ru`