S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 512.552.4
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 16R10

О ПОЧТИ ЭНГЕЛЕВЫХ L-МНОГООБРАЗИЯХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.В. КИСЛИЦИН

Abstract. In this paper we study almost Engel L-varieties of vector spaces. Almost Engel L-varieties generated by an associative algebra considered as a vector space are described.

Keywords: multiplicative vector pair, identity of pair, variety of linear algebra, L-variety, almost Engel variety.

1. Введение

В 1973 году Ю. П. Размыслов ввел понятие ассоциативно лиевой пары (A, L), где L — алгебра Ли, A — ее ассоциативная обертывающая [1]. Под *слабым тождеством* пары (A, L) понимается ассоциативный многочлен, обращающийся в нуль в алгебре A при подстановке вместо переменных произвольных элементов алгебры L.

Пусть F — произвольное поле, $F\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра над полем F от множества свободных образующих X. Пусть далее V — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством некоторой ассоциативной F-алгебры A, причем A как F-алгебра порождается пространством V. Пару (A, V) будем называть *мультипликативной векторной парой* или просто *парой*. Алгебру A в этом случае будем называть *обертывающей алгеброй* пространства V, а пространство V — *вложенным в алгебру* A или просто *L-пространством*.

Ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$ назовем *тождеством* мультипликативной векторной пары (A, V), если $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ в алгебре A при всех $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Для краткости там, где это не вызывает недоразумений, будем опускать информацию об обертывающей алгебре и писать

Kislitsin, A.V., On almost Engel L-varieties of vector spaces.

Поступила 1 января 2021 г., опубликована 31 декабря 2021 г.

«векторное пространство V», «тождество векторного пространства V» и т. д. вместо «мультипликативная векторная пара (A, V)», «тождество мультипликативной векторной пары (A, V)» и т. д.

Известно, что множество всех тождеств линейной алгебры A образует идеал алгебры $F\langle X\rangle$, замкнутый относительно подстановок вместо переменных произвольных многочленов из $F\langle X\rangle$ (такие идеалы называются T-идеалами). Множество всех тождеств пространства V образует идеал алгебры $F\langle X\rangle$, замкнутый относительно линейных подстановок переменных. Мы будем называть такие идеалы *L-идеалами.* Если G — подмножество $F\langle X\rangle$, то через $L(G)$ мы обозначим наименьший L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$, содержащий множество G. Через $T(G)$ будем обозначать T-идеал, порожденный многочленами множества G.

Для векторного пространства V через $L(V)$ будем обозначать множество всех тождеств этого пространства, а через $T(V)$ — T-идеал, порожденный всеми тождествами пространства V. Для линейной алгебры A через $T(A)$ будем обозначать множество всех тождеств этой алгебры.

Для мультипликативных векторных пар можно ввести понятие, аналогичное понятию многообразия для линейных алгебр. Пусть $G \subseteq F\langle X\rangle$. Класс всех пар (A_α, V_α), в которых выполняются все тождества вида $g = 0$, где g пробегает G, называется *многообразием мультипликативных векторных пар* или просто *L-многообразием, заданным множеством тождеств G*, и обозначается $\mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$. На протяжении работы многообразия линейных алгебр будем обозначать заглавными готическими буквами: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, …, а L-многообразия — заглавными рукописными буквами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, … . Множество тождеств, выполняющихся в L-многообразии $\mathcal{M}$, будем обозначать $L(\mathcal{M})$, а множество тождеств, выполняющихся в многообразии алгебр $\mathfrak{M}$ обозначим $T(\mathfrak{M})$. Пусть далее (A, V) — мультипликативная векторная пара. Многообразие пар, заданное множеством тождеств $L(V)$, назовем *L-многообразием, порожденным пространством V* и будем обозначать $\mathrm{Var}_L V$. Ясно, что если $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L V$, то $L(\mathcal{M}) = L(V)$. Более подробно с L-многообразиями можно познакомиться в [2].

Отметим, что не все свойства алгебры переносятся на вложенное в нее векторное пространство. Так, если алгебра A имеет конечный базис тождеств, то векторное пространство A конечным базисом тождеств может не обладать [3]. Если алгебру A рассмотреть как векторное пространство, то свойства многообразия алгебр $\mathrm{Var}A$ и L-многообразия $\mathrm{Var}_L A$ также могут различаться. Например, векторное пространство $A = \langle e_{11}, e_{12}\rangle_F \oplus \langle e_{11}, e_{21}\rangle_F$ над полем F нулевой характеристики порождает нешпехтово L-многообразие [4], хотя любое многообразие линейных алгебр над полем нулевой характеристики является шпехтовым [6]. Поэтому актуальным для исследования является вопрос о том, будет ли некоторое мультипликативное векторное пространство (L-многообразие, порожденное векторным пространством) обладать тем же свойством, что и обертывающая алгебра (многообразие, порожденное обертывающей алгеброй).

Важную роль при изучении многообразий линейных алгебр играют почти θ-многообразия. Многообразие линейных алгебр называется *почти θ-многообразием*, если оно не удовлетворяет свойству θ, но любое его собственное подмногообразие удовлетворяет этому свойству. Другими словами почти θ-многообразия это в точности все минимальные относительно включения элементы в классе многообразий, не обладающих свойством θ [9].

Важность почти θ-многообразий, в частности, заключается в том, что они тесно связаны с индикаторной характеризацией, т. е. описанием многообразия алгебр на языке запрещенных объектов (при таком описании приводится список алгебр, отсутствие которых в данном многообразии необходимо и достаточно для выполнение некоторого условия в этом многообразии). Более подробно с индикаторной характеризацией многообразий линейных алгебр можно познакомиться в работе [9]. Понятие почти θ-многообразия может быть также рассмотрено в классе L-многообразий.

В случае, когда свойство θ представляет из себя конкретное тождество, в классе колец и линейных алгебр существуют описания почти θ-многообразий. Ю. Н. Мальцевым описаны почти коммутативные многообразия колец [7], почти коммутативные многообразия Φ-алгебр, где Φ — нетерово коммутативное кольцо Джекобсона с единицей [8]. О. Б. Финогеновой описаны почти энгелевы [10], почти перестановочные [11], почти лиево нильпотентные непервичные многообразия линейных ассоциативных алгебр [12].

В частности, в [10] доказано, что если поле F конечно, то многообразие линейных ассоциативных алгебр является почти энгелевым тогда и только тогда, когда оно порождается одной из следующих алгебр:

1) $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}$;
2) $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}$;
3) $A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in P \right\}$, где $\sigma \in \mathrm{Aut}P$, $\sigma \neq 1$ и поле инвариантов P^σ является единственным максимальным подполем в P, содержащим F.

В случае бесконечного поля F этот список сокращается до алгебр A_1 и A_2 [10].

Естественным представляется вопрос об описании аналогичных классов почти θ-многообразий L-пространств. Автором частично описаны все ненильпотентные почти коммутативные L-многообразия, порожденные линейной алгеброй, рассматриваемой как векторное пространство над конечным полем F. А именно, если $\mathcal{M}$ — ненильпотентное L-многообразие, порожденное F-алгеброй, рассматриваемой как векторное пространство, то $\mathcal{M}$ является почти коммутативным тогда и только тогда, когда оно порождается либо пространством A_1, либо пространством A_2 [5].

В настоящей работе описаны почти энгелевы L-многообразия, порожденные линейной алгеброй, рассматриваемой как векторное пространство над произвольным полем.

Теорема 1. *Пусть F — произвольное поле и $\mathcal{M}$ — L-многообразие, порожденное F-алгеброй, рассматриваемой как векторное пространство. Тогда L-многообразие $\mathcal{M}$ является почти энгелевым тогда и только тогда, когда оно порождается одним из следующих пространств:*

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}.$$

2. Вспомогательные результаты

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений. Вначале докажем три леммы, не касающиеся энгелевости и почти энгелевости L-многообразий.

Лемма 1. *Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем F, удовлетворяющее одному из тождеств $[x, y]z = 0$ или $x[y, z] = 0$. Тогда $T(V) = L(V)$.*

Доказательство. Проведем доказательство для L-пространства V, удовлетворяющего тождеству $x[y, z] = 0$, поскольку доказательство для второго тождества проводится аналогично.

Пусть $f = \sum\limits_{(l)} \alpha_{(l)} x_{i_1}^{l_{i_1}} x_{i_2}^{l_{i_2}} \ldots x_{i_s}^{l_{i_s}} = 0$ — произвольное тождество пространства V. Поскольку поле F бесконечно, то многочлен f можно считать однородным. При помощи тождества $x[y, z] = 0$, перепишем f следующим образом:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots \widehat{x}_i \ldots x_n^{k_n},$$

где символ $\widehat{x}_i$ означает отсутствие переменной x_i в данном месте слова.

Зафиксируем некоторое $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и рассмотрим многочлен $f\Big|_{x_t = x_t y}$, полученный из f заменой x_t на $x_t y$. Покажем, что $f\Big|_{x_t = x_t y} \in L(V)$.

Поскольку многочлен f является однородным, получим:

$$f\Big|_{x_t = x_t y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots \widehat{x}_j \ldots (x_t y)^{k_t} \ldots x_n^{k_n} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots \widehat{x}_j \ldots x_t^{k_t} y^{k_t} \ldots x_n^{k_n} =$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots \widehat{x}_j \ldots x_t^{k_t} \ldots x_n^{k_n} \right) \cdot y^{k_t} = f \cdot y^{k_t} \in L(V).$$

Таким образом получаем, что при подстановке вместо произвольной переменной произведения переменных в многочлен, лежащий в $L(V)$, снова получаем многочлен из $L(V)$, откуда следует, что $T(V) = L(V)$. $\square$

Лемма 2. *Пусть V — векторное пространство над конечным полем $F = GF(q)$, удовлетворяющее либо тождествам $[x, y]z = 0$ и $(x - x^q)y = 0$, либо тождествам $x[y, z] = 0$ и $x(y - y^q) = 0$. Тогда $T(V) = L(V)$.*

Доказательство. Проведем доказательство для L-пространства V, удовлетворяющего тождествам $x[y, z] = 0$ и $x(y - y^q) = 0$, поскольку доказательство для второй пары тождеств проводится аналогично.

Пусть $f = \sum\limits_{(i)} \alpha_{(i)} x_{i_1}^{l_{i_1}} x_{i_2}^{l_{i_2}} \ldots x_{i_s}^{l_{i_s}} = 0$ — произвольное тождество пространства V. Можно считать, что все одночлены f зависят от одних и тех же переменных. Пользуясь тождеством $x[y, z] = 0$, перепишем f следующим образом:

$$f = \sum_{(k)} \alpha_{(k)} x_i^{k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots \widehat{x}_i \ldots x_n^{k_n},$$

где суммирование производится по всевозможным наборам показателей $(k) = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq n)$.

Переписав тождество $x(y - y^q) = 0$ в виде $xy^q = xy$, легко получить тождество $x^{q+1} = x^2$. Таким образом, суммирование в последнем тождестве ведется по всем наборам $(k) = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ для которых $1 \leq k_i \leq q$ $(1 \leq i \leq n)$, причем показатели каждого слова $\alpha_{(k)} x_m^{k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots \widehat{x}_m \ldots x_n^{k_n}$ многочлена f удовлетворяют неравенствам $1 \leq k_m \leq q$ и $1 \leq k_i < q$ при $i \neq m$, $1 \leq i \leq n$.

Зафиксируем некоторое $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и рассмотрим многочлен $g = f\Big|_{x_t = x_t y}$, полученный из f заменой x_t на $x_t y$. Покажем, что $g \in L(V)$, для чего рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. $\deg_{x_t} f < q$.

Запишем многочлен $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_{q-1}$, где f_i — сумма одночленов степени i по переменной x_t. Заменяя теперь $x_t \to \lambda x_t$ $(\lambda \in F,\ \lambda \neq 0)$, получим, что $f = \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \cdots + \lambda^{q-1} f_{q-1}$.

Поскольку поле F содержит q элементов, можно выбрать ненулевые попарно различные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1} \in F$. Тогда, сделав в равенстве $f = \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \cdots + \lambda^{q-1} f_{q-1}$ замены $\lambda \to \lambda_1$, $\lambda \to \lambda_2$, $\ldots$, $\lambda \to \lambda_{q-1}$ и воспользовавшись определителем Вандермонда, получим, что $f_1 = f_2 = \cdots = f_{q-1} = 0$, т.е. $f_i = 0$ — также тождества V $(1 \leq i \leq q-1)$ и $f_1, f_2, \ldots, f_{q-1} \in L(V)$.

Поскольку все многочлены f_i однородны по переменной x_t $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$, то, пользуясь тождеством $x[y, z] = 0$, получим:

$$f_i\Big|_{x_t = x_t y} = \sum_{(k)} \alpha_{(k)} x_j^{k_j} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots \widehat{x}_j \ldots (x_t y)^i \ldots x_n^{k_n} = \left(\sum_{(k)} \alpha_{(k)} x_j^{k_j} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots \widehat{x}_j \ldots x_t^i \ldots x_n^{k_n} \right) \cdot y^i = f_i \cdot y^i.$$

Следовательно,

$$g = f\Big|_{x_t = x_t y} = \Big(f_1 + f_2 + \cdots + f_{q-1} \Big)\Big|_{x_t = x_t y} = f_1 \cdot y + f_2 \cdot y^2 + \cdots + f_{q-1} \cdot y^{q-1} \in L(V),$$

поскольку $f_i \cdot y^i \in L(V)$, $i = 1, 2, \ldots, q-1$.

Случай 2. $\deg_{x_t} f = q$.

Снова запишем многочлен $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_q$, где f_i — сумма одночленов степени i по переменной x_t. Заменим $x_t \to \lambda x_t$ $(\lambda \in F,\ \lambda \neq 0)$. Учитывая, что $x^q = x$ в поле $F = GF(q)$, получим что

$$f = \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \cdots + \lambda^{q-1} f_{q-1} + \lambda^q f_q = \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \cdots + \lambda^{q-1} f_{q-1} + \lambda f_q = \lambda(f_1 + f_q) + \lambda^2 f_2 + \cdots + \lambda^{q-1} f_{q-1}.$$

Таким образом, $f = \lambda(f_1 + f_q) + \lambda^2 f_2 + \cdots + \lambda^{q-1} f_{q-1}$

Далее, поскольку $|F| = q$, то можно выбрать ненулевые попарно различные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1} \in F$ и, сделав в последнем равенстве замены $\lambda \to \lambda_1$, $\lambda \to \lambda_2$, $\ldots$, $\lambda \to \lambda_{q-1}$ и воспользовавшись определителем Вандермонда, получим, что $f_1 + f_q = f_2 = \cdots = f_{q-1} = 0$, т.е. $f_1 + f_q, f_2, f_3, \ldots, f_{q-1} \in L(V)$.

Далее, поскольку многочлены f_i однородны по переменной x_t ($i = 2, 3, \dots, q-1$), действуя аналогично случаю 1, можно показать, что $f_i\Big|_{x_t=x_t y} = f_i \cdot y^i$, $i = 2, 3, \dots, q-1$.

Рассмотрим многочлен $\big(f_1 + f_q\big)\Big|_{x_t=x_t y}$. Используя тождество $xy = xy^q$, получим, что

$$\big(f_1+f_q\big)\Big|_{x_t=x_t y} = f_1\Big|_{x_t=x_t y} + f_q\Big|_{x_t=x_t y} = f_1\cdot y + f_q\cdot y^q = f_1\cdot y + f_q\cdot y = (f_1+f_q)\cdot y.$$

Тогда, ввиду сделанных замечаний, можно записать:

$$g = f\Big|_{x_t=x_t y} = \Big(f_1 + f_2 + \dots + f_q\Big)\Big|_{x_t=x_t y} = \\ (f_1 + f_q)\cdot y + f_2 \cdot y^2 + \dots + f_{q-1}\cdot y^{q-1} \in L(V),$$

поскольку $f_1 + f_q, f_2, f_3, \dots, f_{q-1} \in L(V)$.

Таким образом получаем, что при подстановке вместо переменных произведения переменных в произвольный многочлен, лежащий в $L(V)$, снова получаем многочлен из $L(V)$, откуда следует, что $T(V) = L(V)$. $\square$

Лемма 3. *Пусть A — ассоциативная алгебра над полем F и $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L A$ — почти θ-многообразие векторных пространств, порожденное алгеброй A, рассматриваемой как векторное пространство. Тогда многообразие линейных алгебр $\mathfrak{M} = \mathrm{Var} A$ является почти θ-многообразием.*

Доказательство. Пусть G — множество всех тождеств $\mathfrak{M}$. Тогда все тождества множества G выполняются в алгебре A, а значит и в пространстве A. Следовательно, множество всех тождеств L-многообразия $\mathcal{M}$ совпадает с G.

Пусть $\mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{M}$ и $f = 0$ — тождество многообразия $\mathfrak{N}$ такое, что $f \notin G$. Тогда, ввиду сделанного выше замечания, тождество $f = 0$ не выполняется в L-многообразии $\mathcal{M}$. Следовательно, L-многообразие $\mathcal{N}$, заданное множеством тождеств $G \cup \{f\}$, является собственным L-подмногообразием $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}$ — почти θ-многообразие векторных пространств, то $\mathcal{N}$ обладает свойством θ. Но тогда любая пара $(B, E) \in \mathcal{N}$ будет удовлетворять θ, в частности, свойству θ будет удовлетворять всякая пара $(B, B) \in \mathcal{N}$, где B — ассоциативная алгебра. Это равносильно тому, что любая алгебра B, удовлетворяющая множеству тождеств $G \cup \{f\}$, будет удовлетворять θ, откуда вытекает, что многообразие алгебр $\mathfrak{N}$ также удовлетворяет θ. Следовательно, многообразие $\mathfrak{M}$ линейных алгебр является почти θ-многообразием. $\square$

Утверждение обратное лемме 3 не верно, т. е. если $\mathfrak{M} = \mathrm{Var} A$ — почти θ-многообразие алгебр, то $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L A$ может не быть почти θ-многообразием векторных пространств. Ниже будет приведен пример, подтверждающий это.

Теперь сформулируем и докажем два предложения, касающиеся почти энгелевых L-многообразий.

Пусть для произвольного поля F

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\},$$

и для конечного поля F

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in P \right\},$$

где $\sigma \in \mathrm{Aut}P$, $\sigma \neq 1$ и поле инвариантов P^{σ} является единственным максимальным подполем в P, содержащим F. Положим $E_1(x,y) = [x,y]$, $E_n(x,y) = [[x,\underbrace{y,y,\ldots,y}_{n-1}],y]$ для некоторого целого положительного n.

Предложение 1. *Пусть F — произвольное поле. L-многообразия $\mathcal{M}_1 = \mathrm{Var}_L A_1$ и $\mathcal{M}_2 = \mathrm{Var}_L A_2$ являются почти энгелевыми L-многообразиями.*

Доказательство. Проведем доказательство, например, для L-многообразия $\mathcal{M}_1$, поскольку доказательство для $\mathcal{M}_2$ проводится аналогично.

Легко проверяется, что пространство A_1 удовлетворяет тождеству $[x,y]z = 0$, а в случае конечного поля — тождествам $[x,y]z = 0$ и $(x - x^q)y = 0$. Тогда $T(A_1) = L(A_1)$ ввиду лемм 1 и 2, откуда следует, что $L(\mathcal{M}_1) = T(\mathfrak{M}_1)$, где $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{Var}A_1$.

Пусть теперь $\mathcal{N} \subsetneqq \mathcal{M}_1$ — собственное L-подмногообразие в $\mathcal{M}_1$, заданное множеством тождеств G. Если поле F бесконечно, то $[x,y]z \in G$, а значит, по доказанному $T(G) = L(G)$. Если поле F конечно, то $[x,y]z, (x - x^q)y \in G$, откуда следует, что $T(G) = L(G)$. Таким образом, в случае произвольного поля справедливо равенство $T(G) = L(G)$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ подмногообразие в многообразии линейных алгебр $\mathfrak{M}_1$, заданное множеством тождеств G. Если бы выполнялось $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_1$, то получили бы, что $L(\mathcal{N}) = G = T(\mathfrak{N}) = T(\mathfrak{M}_1) = L(\mathcal{M}_1)$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{N}$ является собственным подмногообразием многообразия $\mathfrak{M}_1$. Тогда $E_k(x,y) \in T(\mathfrak{N})$ для некоторого k, поскольку $\mathfrak{M}_1$ — почти энгелево многообразие алгебр. Значит, $E_k(x,y) \in T(\mathfrak{N}) = L(\mathcal{N})$, откуда следует, что $\mathcal{N}$ — энгелево L-многообразие и, следовательно, $\mathcal{M}_1$ —почти энгелево L-многообразие векторных пространств по определению. $\square$

Предложение 2. *Пусть F — конечное поле. L-многообразие $\mathcal{M}_3 = \mathrm{Var}_L A_3$ содержит собственное неэнгелево L-подмногообразие.*

Доказательство. Рассмотрим векторное пространство
$$A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix} \middle| \, a \in P \right\},$$
являющееся подпространством пространства A_3. Пусть $\mathcal{M}_4 = \mathrm{Var}_L A_4$. Покажем, что $\mathcal{M}_4$ — искомое неэнгелево L-подмногообразие в $\mathcal{M}_3$. Очевидно, что $\mathcal{M}_4 \subseteq \mathcal{M}_3$.

Заметим, что $\mathcal{M}_4$ — неэнгелево L-многообразие. Действительно, пусть
$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix},$$
причем $a \neq \sigma(a)$. Тогда $E_1(x,y) = [x,y] = (\sigma(a) - a)e_{12}$, $E_2(x,y) = [x,y,y] = (\sigma(a)-a)^2 e_{12}$ и по индукции получим: $E_n(x,y) = [x,\underbrace{y,y,\ldots,y}_{n}] = (\sigma(a)-a)^n e_{12}$. Если $E_n(x,y) = 0$, то $(\sigma(a) - a)^n = 0$. Но в поле нет нильпотентных элементов, поэтому $\sigma(a) - a = 0$, что невозможно, поскольку $a \neq \sigma(a)$. Таким образом, $E_n(x,y) \neq 0$ ни для какого n.

Покажем теперь, что $\mathcal{M}_4 \neq \mathcal{M}_3$. Очевидно, что
$$A_4 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in P \right\}.$$

Последнее пространство является двумерным и, следовательно, удовлетворяет стандартному тождеству третьей степени

$$\mathrm{St}_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\tau \in S_3} (-1)^\tau x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} x_{\tau(3)} = 0.$$

Тогда A_4 также удовлетворяет тождеству $\mathrm{St}_3(x_1, x_2, x_3) = 0$. Однако, L-пространство A_3 не удовлетворяет этому тождеству. Действительно, перепишем стандартное тождество в виде: $\mathrm{St}_3(x_1, x_2, x_3) = x_1[x_2, x_3] + x_2[x_3, x_1] + x_3[x_1, x_2]$ и положим

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \neq \sigma(a)$. Вычисляя, получим: $\mathrm{St}_3(x_1, x_2, x_3) = (a - \sigma(a))e_{12} \neq 0$. Таким образом, $\mathrm{St}_3(x_1, x_2, x_3) \in L(\mathcal{M}_4)$ и $\mathrm{St}_3(x_1, x_2, x_3) \notin L(\mathcal{M}_3)$, откуда следует, что $\mathcal{M}_4 \subsetneqq \mathcal{M}_3$. Окончательно получаем, что $\mathcal{M}_4$ является собственным неэнгелевым L-подмногообразием $\mathcal{M}_3$, что и требовалось. $\square$

Вопрос о том, порождает ли векторное пространство A_4 почти энгелево L-многообразие на данный момент остается открытым.

Предложение 2 показывает, что утверждение обратное лемме 3 не верно. Действительно, $\mathrm{Var}A_3$ — почти энгелево многообразие линейных алгебр, но L-многообразие $\mathrm{Var}_L A_3$ не является почти энгелевым.

3. Основной результат

Теперь мы можем доказать основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть F — произвольное поле и $\mathcal{M}$ — L-многообразие, порожденное F-алгеброй, рассматриваемой как векторное пространство. Тогда L-многообразие $\mathcal{M}$ является почти энгелевым тогда и только тогда, когда оно порождается одним из следующих пространств:*

1) $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}$;

2) $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}$.

Доказательство. Пусть A — ассоциативная алгебра над конечным полем F и $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L A$ — L-многообразие векторных пространств, порожденное алгеброй A, рассматриваемой как векторное пространство.

Если L-многообразие $\mathcal{M}$ порождается либо A_1, либо A_2, то оно является почти энгелевым в виду предложения 1.

Обратно, пусть L-многообразие $\mathcal{M}$ является почти энгелевым. Покажем, что оно порождается одним из пространств A_1, либо A_2.

Ввиду леммы 3 многообразие алгебр $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}A$ является почти энгелевым.

Случай 1. F — бесконечное поле.

Поскольку алгебра A порождает почти энгелево многообразие алгебр $\mathfrak{M}$, то из результатов работ [10, 13] следует, что $\mathfrak{M}$ порождается одной из алгебр A_1 или A_2. Ввиду предложения 1, L-многообразия, порожденные пространствами A_1 и A_2, являются почти энгелевыми. Следовательно, поскольку множества тождеств многообразия $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}A$ и L-многообразия $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L A$ совпадают, $\mathcal{M}$ порождается либо пространством A_1, либо A_2.

Случай 2. F — конечное поле.

Поскольку алгебра A порождает почти энгелево многообразие алгебр $\mathfrak{M}$, то из результатов работы [10] следует, что $\mathfrak{M}$ порождается одной из алгебр A_1, A_2, A_3. В силу предложений 1 и 2, L-многообразия, порожденные пространствами A_1 и A_2, являются почти энгелевыми, а L-многообразие, порожденное пространством A_3, не является почти энгелевым. Следовательно, поскольку множества тождеств многообразия $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}A$ и L-многообразия $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L A$ совпадают, $\mathcal{M}$ порождается либо пространством A_1, либо A_2, что и требовалось. $\square$

References

[1] Yu.P. Razmyslov, *The existence of a finite basis for the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic zero*, Algebra Logika, **12**:1 (1973), 83–113.

[2] I.M. Isaev, A.V. Kislitsin, *The identities of vector spaces embedded in a linear algebra*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 328–343.

[3] I.M. Isaev, A.V. Kislitsin, *Identities in vector spaces and examples of finite-dimensional linear algebras having no finite basis of identities*, Algebra and Logic, **52**:4 (2013), 290–307.

[4] A.V. Kislitsin, *The Specht property of L-varieties of vector spaces over an arbitrary field*, Algebra and Logic, **57**:5 (2016), 556–566.

[5] A.V. Kislitsin, *On nonnilpotent almost commutative L-varieties of vector spaces*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 458–462.

[6] A.R. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras*, Algebra and Logic, **26**:5 (1987), 597–641.

[7] Yu.N. Mal'tsev, *Almost commutative varieties of associative rings*, Siberian Mathematical Journal, **17**:5 (1976), 803–811.

[8] Yu.N. Mal'tsev, *Just non commutative varieties of operator algebras and ring with some conditions on nilpotent elements*, Tamkang J. of Math., **27**:1 (1996), 437–496.

[9] O.B. Finogenova, *Characterizing non-matrix properties of varieties of algebras in the language of forbidden objects*, Serdica Math. J., **38** (2012), 473–496.

[10] O.B. Finogenova, *Varieties of associative algebras satisfying Engel identities*, Algebra and Logic, **43**:4 (2004), 271–284.

[11] O.B. Finogenova, *Almost permutative varieties of associative algebras over an infinite field*, Algebra and Logic, **51**:6 (2013), 519–534.

[12] O.B. Finogenova, *Almost Lie nilpotent non-prime varieties of associative algebras*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **21**:4 (2015), 282–291.

[13] Yu.N. Mal'tsev, *Varieties of associative algebras*, Algebra Logika, **15**:5 (1976), 579–584.

Alexey V. Kislitsin
Altai State Pedagogical University,
ul. Molodezhnaya, 55,
656031, Barnaul, Russia
E-mail address: kislitsin@altspu.ru