S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, стр. 1–4 (2021) УДК 512.545
DOI ??.???/semi.2021.??.xxx MSC 06F15

МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРОСТЫМИ МОНОТОННО УПОРЯДОЧЕННЫМИ ГРУППАМИ

С.В. ВАРАКСИН

Abstract. We consider varieties of m-groups generated by simple non-o-approximable m-groups. It is proved that they coincide either with the variety of normal-valued m-groups, or with the variety of all m-groups.

Keywords: m-group, simple group, variety, normal valued m-group.

Понятие m-группы было введено М.Жираде и Ю.Рахунеком в работе [1]. Напомним основные определения.

Определение 1. *Монотонно упорядоченной группой (m-группой) называется алгебраическая система G сигнатуры $\mathbf{m} = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \varphi \rangle$, где система $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция φ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),\ \varphi(\varphi(x)) = x$$

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y),\ \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

Определение 2. *Операцию φ будем называть реверсивным автоморфизмом и записывать m-группу G с фиксированным реверсивным автоморфизмом φ как пару (G, φ).*

Основные понятия и определения ℓ-групп соответствуют принятым в книге В.М.Копытова и Н.Я. Медведева [2]. Будем также говорить, что m-группа (G, φ) допускает представление порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω, если $G \subset Aut(\Omega)$ и $\varphi(g) = aga$ для любого $g \in G$, где a — инволюнтивный антиавтоморфизм множества Ω, $a^2 = e$, и записывать в виде (G, Ω, a).

Varaksin, S.V., Varieties that are generated by simple m-groups.

Поступила , опубликована .

Примеры простых ℓ-групп построены В.Длабом, Ч.Холландом, А.Глассом и С.Макклири [2]. Те из них, порядок на которых не линеен, порождают многообразие $\mathcal{L}$ всех ℓ-групп. Автором в [6] показано, что простая не o-аппроксимируеая ℓ-группа, т.е. не вложимая в декартово произведение линейно упорядоченных групп, порождает или многообразие нормальнозначных ℓ-групп $\mathcal{N}_\ell$, определяемое ℓ-групповым тождеством

$$|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y|,$$

или многообразие всех ℓ-групп. Ч.Холландом доказано [2], что многообразие $\mathcal{N}_\ell$ является наибольшим собственным подмногообразием многообразия всех ℓ-групп. В.Копытов и Ю.Рахунек показали [3], что многообразие нормальнозначных m-групп $\mathcal{N}_m$, задаваемое этим же ℓ-групповым тождеством, также является наибольшим собственным подмногообразием в многообразии $\mathcal{M}$ всех m-групп. А.Зенков и О.Исаева [5] определили реверсивный автоморфизм на группе $B(\mathbb{R})$ ограниченных автоморфизмов числовой прямой, превратив ее из простой ℓ-группы в простую m-группу. При этом m-группа $(B(\mathbb{R}), \varphi)$ не нормальнозначна и поэтому порождает многообразие всех m-групп. Можно предположить, что простые не o-аппроксимируемые m-группы также порождают или многообразие нормальноначных, или многообразие всех m-групп. Покажем, что это предположенние верно.

Лемма 1. *Простая m-группа или является простой ℓ-группой с определенным на ней реверсивным автоморфизмом, или декартовым произведением двух простых ℓ-групп, и реверсивный автоморфизм φ меняет их элементы местами.*

Доказательство. Утверждение следует из того факта, что для любого ℓ-идеала N m-группы (G, φ) пересечение $N \bigcap \varphi(N)$ и объединение $N \bigvee \varphi(N)$ устойчивы относительно решеточных операций, замкнуты относительно реверсивного автоморфизма φ, и поэтому являются m-идеалами m-группы. Если в простой m-группе (G, φ) есть собственный ℓ-идеал N, т.е. (G, φ) не является простой ℓ-группой, тогда $N \bigcap \varphi(N) = E$ и $N \bigvee \varphi(N) = G$, т.е. (G, φ) разложима в декартово произведение $G = N \times \varphi(N)$. □

Теорема 1. *Простая не o-аппроксимируемая m-группа порождает или многообразие нормальнозначных m-групп, или многообразие всех m-групп.*

Это следует из того, что не o-аппроксимируемая m-группа является простой ℓ-группой или разложима в декартово произведение двух простых ℓ-групп. Для простых ℓ-групп аналогичное утверждение доказано в [6].

Чтобы ответить на вопрос, существуют ли простые нормальнозначные m-группы, построим такую m-группу с помощью конструкции Ф.Холла (изложенной в книге А.Кокорина и В.Копытова [4]).

Пусть (H, φ) - m-группа, обладающая точным транзитивным представлением линейно упорядоченного множества Ω с инволюнтивным антиавтоморфизмом, обладающим неподвижным элементом, и пусть $\pi_i : (H, \varphi) \to A(\Omega, \leqslant)$, $i \in \mathbf{Z}$ — набор таких представлений. Обозначим через (H_i, Ω, a) m-группы подстановок линейно упорядоченного множества Ω, где $H_i = \pi_i(H)$ и a — инволютивный антиавтоморфизм линейно упорядоченного множества Ω с неподвижным элементом ω_0. Через $(C_n, \Omega^{n+1}, b_n), n \in \mathbf{Z}, n \geqslant 0$ обозначим прямые сплетения m-групп подстановок

$$(C_0, \Omega, b_0) = (H_0, \Omega, a)$$

$$(C_{2k}, \Omega^{2k+1}, b_{2k}) = (\dots((H_{-k}, \Omega, a) \wr (H_{-k+1}, \Omega, a)) \wr \dots) \wr (H_k, \Omega, a)$$

$$(G_{2k+1}, \Omega^{2k+2}, b_{2k+1}) = (G_{2k}, \Omega^{2k+1}, b_{2k}) \wr (H_{k+1}, \Omega, a)$$

где инволютивный антиавтоморфизм b_n определен на Ω^{n+1} как прямая степень антиавтоморфизма a. Поэтому антиавтоморфизм b_n имеет неподвижную точку $(\omega_0, \dots, \omega_0)$.

Рассмотрим подмножество прямого произведения $\Lambda \subset \prod\limits_{j=-\infty}^{j=\infty} \Omega$, где для всех элементов $\lambda \in \Lambda$ лишь для конечного числа индексов $j \in \mathbb{Z}$ выполненно $\lambda(j) \neq \omega_0$. Упорядочим множество Λ лексикографически, начиная сравнение элементов на компонентах с большими индексами. Определим действие m-группы H_i на Λ : для $h \in H_i$ и λ из Λ если для всех $j > i$ выполняется $\lambda(j) = \omega_0$, то $h(\lambda)(i) = h(\lambda(i))$ и $h(\lambda)(j) = \lambda(j)$ при $j \neq i$, а если для какого-то $j_0 > i$ выполнено $\lambda(j_0) \neq \omega_0$, то $h(\lambda) = \lambda$. Тогда мы сможем определить действие m-группы C_n на множестве Λ и вложение m-группы C_n в m-группу C_{n+1}. Обозначим через $C(H, \Omega)$ объединение m-групп C_n, $n \geqslant 0$. Реверсивный автоморфизм φ на ней определим с помощью инволютивного антиавтоморфизма b множества Λ, $b(\lambda)(j) = a(\lambda(j))$, и для $g \in C(H, \Omega)$ выполнено $\varphi(g) = bgb$. Тогда m-группа $(C(H, \Omega), \varphi)$ действует на множестве Λ точно и транзитивно. Определим автоморфизм t на на Λ : $t(\lambda)(j) = \lambda(j+1)$. Тогда для $h \in H_i$ верно $t^{-1}ht = \pi_{i+1}\pi_i^{-1}(h)$. Через $D(H, \Omega)$ обозначим полупрямое произведение $D(H, \Omega) = C(H, \Omega) \leftthreetimes t$. При этом доопределим $\varphi(t) = btb = t$ и получим представление m-группы $(D(H, \Omega), \varphi)$ автоморфизмами множества Λ.

Лемма 2. *Если m-группа (H, φ) нормальнозначна и обладает точным транзитивным представлением линейно упорядоченного множества Ω с инволютивным антиавтоморфизмом, обладающим неподвижным элементом, то m-группа $(D(H, \Omega), \varphi)$ также нормальнозначна и обладает точным транзитивным представлением линейно упорядоченного множества Λ с инволютивным антиавтоморфизмом, обладающим неподвижным элементом.*

Доказательство. Существование точного и транзитивного представления m-группы $(D(H, \Omega), \varphi)$ следует из ее построения. Нормальнозначность m-групп (C_n, φ) и $(D(H, \Omega), \varphi)$ следует из доказанного А.Зенковым и О.Исаевой [5] свойства идемпотентности $\mathcal{N}_m^2 = \mathcal{N}_m$ многообразия нормальнозначных m-групп в полугруппе m-многообразий. □

Определим m-группы $(F_i(H, \Omega), \varphi)$ и линейно упорядоченные множества Λ_i по индукции:

$$(F_0(H, \Omega), \varphi) = (H_0, \varphi), \quad \Lambda_0 = \Omega$$

$$(F_{i+1}(H, \Omega), \varphi) = (D(F_i(H, \Omega), \Lambda_i), \varphi),$$

$$\Lambda_{i+1} = \left\{ \lambda \in \prod_{j=-\infty}^{j=\infty} \Lambda_i \,\middle|\, |\{j \in \mathbb{Z} | \lambda(j) \neq \omega_i\}| < \infty \right\}$$

$$\omega_{i+1} = (\dots, \omega_i, \omega_i, \omega_i, \dots) \in \Lambda_{i+1}$$

Группа $(F_i(H,\Omega),\varphi)$ вложима в $(F_{i+1}(H,\Omega),\varphi)$, поэтому мы можем определить m-группу $(G(H,\Omega),\varphi)=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(F_i(H,\Omega),\varphi)$.

Лемма 3. *Пусть m-группа (H,φ) имеет точное транзитивное представление (H,Ω,a) автоморфизмами линейно упорядоченного множества Ω с неподвижным элементом $\omega_0\in\Omega$ реверсивного автоморфизма a множества Ω. Тогда m-группа $(G(H,\Omega),\varphi)$ проста.*

Доказательство. В конструкции Ф.Холла использован тот факт, что всякая нетривиальная инвариантная подгруппа содержит коммутант $C'(H,\Omega)$ [4]. Однако можно заметить, что выпуклая m-подгруппа m-группы $(D(H,\Omega),\varphi)$, содержащая $C'(H,\Omega)$, содержит и $C(H,\Omega)$. □

Теорема 2. *В многообразии нормальнозначных m-групп существуют простые m-группы.*

В качестве примера достаточно взять построенную m-группу $(G(H,\Omega),\varphi)$ и в качестве исходной m-группы (H,φ) циклическую m-группу $(\mathbf{Z},\varphi)$, где $\varphi(z)=-z$, с регулярным представлением $(\mathbf{Z},\mathbf{Z},a)$, при этом инволютивный антиавтоморфизм $a(n)=-n$ имеет неподвижный элемент 0.

References

[1] Giraudet M.,Rachunek J. *Varieties of half lattice ordered groups of monotonic permutations of chains* Czech. Math. J., **49**:4 (1999), 743–766.

[2] Kopytov V.M., Medvedev N.Ya., *The theory of lattice-ordered groups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht;Boston;London, 1994.

[3] Kopytov, V. M., Rakhunek, J., *The largest proper variety of m-groups*, Algebra and Logic, **42**:5 (2003), 349–355.

[4] Kokorin A.I., Kopytov, V. M., *Fully ordered groups*, Nauka, Moscow, 1972 (Russian, transl. *Fully ordered groups*, J. Wiley & Sons, New York, 1974)

[5] Zenkov A. V., Isaeva O. V., *On variety N of normal valued m-groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **1** (2021), 54–60.

[6] Varaksin, S. V. *Varieties that are generated by simple l-groups*, Siberian Math. J. **31**:5 (1990), 842–844.

Sergej Vladimirivich Varaksin
Altaj State Univ.,
pr. Lenina, 61,
656000, Barnaul, Russia
Email address: varaksin@math.asu.ru