S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 985–996 (2021) УДК 514.142.2, 514.174.6
DOI 10.33048/semi.2021.18.074 MSC 52B55, 68U05

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ОРИЕНТАЦИЮ СИМПЛЕКСОВ

В.А.КЛЯЧИН, Н.А.ЧЕБАНЕНКО

Abstract. It is easy to show that if a continuous and open mapping preserves the orientation of all simplices, then it is affine. The article discusses the class of continuous, open mappings $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ that preserve the orientation of simplices from a given subset of the set of simplexes with vertices in the domain $D \subset \mathbb{R}^3$. In this paper, the questions of the geometric structure of linear transforms of such mappings are investigated. This study is based on a key property: if a map preserves the orientation of simplices from a certain subset B of the set of all simplices with vertices in D, then the pre-image of a hyperplane cannot contain vertices of a simplex from B. Based on the analysis of the structure of a set with such a property, it is possible to obtain results on its geometric structure. In particular, the article proved that if a continuous and open mapping preserves the orientation of a fairly wide class of simplices, then it is affine. For some special classes of triangles in $\mathbb{R}^2$ with a given condition on its maximum angle, the authors previously proved that the inverse image of a line is locally a graph of a function (in some case, Lipschitz) in a suitable Cartesian coordinate system.

Keywords: simplex, orientation of simplex, continuous mapping, monotone function.

Klyachin, V.A., Chebanenko, N.A., On geometrical properties of continuous mappings which preserve orientation of simplices.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках научного проекта № 0633-2020-0004 «Развитие методики виртуальной 3D реконструкции исторических объектов».

Поступила 22 января 2019 г., опубликована 17 сентября 2021 г.

1. Введение

Монотонные функции играют немаловажную роль в методах математического анализа и обладают рядом интересных свойств. Например, в классической теореме Лебега [1, с. 199] доказывается дифференцируемость почти всюду всякой неубывающей функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Так же известно, что функция огрнианиченной вариации является разностью двух неубывающих функций. В геометрии монотонность угла наклона касательной связана со свойством выпуклости этой кривой. Это все примеры для случая размерности 1. В многомерном случае понятие монотонности отображения является неоднозначным. Например, отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называются монотонным по Лебегу [2], [3] если

$$\operatorname{osc}\{f, D'\} \leq \operatorname{osc}\{f, \partial D'\},$$

для всякой подобласти $D' \subset D$. Здесь

$$\operatorname{osc}\{f, D'\} = \sup_{x,y \in D'} |f(x) - f(y)|.$$

Исследованию такого рода отображений посвящено множество публикаций. В частности, в работе С.К. Водопьянова [4] изучались монотонные по Лебегу функции и отображения на группах Карно, где было установлено N-свойство Лузина таких отображений. В работах В.М. Миклюкова [5], [6] было доказано, что монотонное по Лебегу отображение, принадлежащее весовому пространству Соболева, почти всюду имеет полный дифференциал при определенных условиях на весовую функцию. Отметим так же работу [7] в которой свойство дифференцируемости доказывается для класса Q-гомеоморфизмов, которые в каком-то смысле близки к отображениям, монотонным по Лебегу.

С другой стороны, определенный интерес представляют отображения, для которых понятие монотонности имеет иную форму. Этот подход основан на понятии ориентации симплексов и, в частности, имеет важное значение в теории построения расчетных сеток [8]. В одномерном случае невырожденный отрезок $[P_0, P_1]$ числовой прямой имеет положительную ориентацию, если $P_0 < P_1$, и отрицательную ориентацию, если $P_0 > P_1$. Тогда функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, будет неубывающей, если $f(x)$ сохраняет ориентацию каждого отрезка $[P_0, P_1] \subset [a, b]$. Если аналогичное построение сделать для многомерного случая, то получится следующее понятие, альтернативное понятию монотонного отображения по Лебегу. Пусть в $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ заданы точки $P_0, P_1, ..., P_n$. Выпуклую оболочку этих точек назовем симплексом $S = S(P_0, ..., P_n)$. Симплекс называется невырожденным, если векторы $P_1 - P_0, P_2 - P_0, ..., P_n - P_0$ линейно независимы или, что тоже самое

$$\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, ..., P_n - P_0) \neq 0.$$

Здесь $\det(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ обозначает определитель матрицы, столбцами которой являются векторы $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что невырожденный симплекс $S(P_0, P_1, ..., P_n)$ имеет положительную (отрицательную) ориентацию, если $\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, ..., P_n - P_0) > 0$ ($\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, ..., P_n - P_0) < 0$). Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область. Обозначим через $S(D)$ совокупность всех невырожденных симплексов с вершинами из области D.

Зададимся вопросом определения геометрических свойств непрерывных отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$, которые сохраняют ориентацию симплексов из некоторого, заранее данного подмножества множества $S(D)$. Более точно, нас будет интересовать структура прообраза плоскости в $\mathbb{R}^n$ при действии такого отображения. Отметим работу [9], в которой получены условия сохранения ориентации симплексов при их квазиизометричном преобразовании.

Для всякого подмножества $B \subset S(D)$ обозначим множество непрерывных отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию симплексов $S \in B \subset S(D)$, через $C_B(D)$. На множестве $S(D)$ мы вводим топологию, порожденную евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ и естественным вложением симплекса с вершинами $p_0, p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ в виде упорядоченного набора $(p_0, p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^{n(n+1)}$.

В работе авторов [10] была доказана следующая

Теорема 1. *Если открытое отображение $f \in C_{S(D)}(D)$, то f — аффинное преобразование.*

Мы называем преобразование аффинным, если оно всякую плоскость переводит в плоскость. Из этого результата следует, что большинство отображений не может сохранять ориентацию всех симплексов. Поэтому мы рассматриваем некоторое их подмножество $B \subset S(D)$. Но даже уменьшив множество симплексов, условие сохранения их ориентации оказывается достаточно сильным. Так, например в указанной выше работе [10], также доказано, что если непрерывное и открытое отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию любого симплекса, ребра которого образуют угол с некоторой прямой, не превышающий некоторой величины, то такое отображение является аффинным. С другой стороны, для случая $n = 2$ показано, что если непрерывное и открытое отображение сохраняет ориентацию любого треугольника с максимальным углом, не превосходящим значения $\theta_0, \pi > \theta_0 > 2\pi/3$, то прообраз всякой прямой представляет собой локально липшицеву кривую. При попытке распространить этот результат на случай $n = 3$ мы пришли к неожиданному результату. В настоящей работе доказывается, что если гомеоморфное отображение сохраняет ориентацию всякого тетраэдра, у которого величины трехгранных углов не превосходят некоторой величины θ_0, $2\pi > \theta_0 > \pi$, то оно является аффинным.

В [10], [11] был доказан следующий ключевой результат о структуре прообраза гиперплоскости непрерывного отображения $f \in C_B(D)$.

Теорема 2. *Если множество $B \subset S(D)$ открыто и отображение $f \in C_B(D)$ не является аффинным, то прообраз любой гиперплоскости не содержит вершин симплекса из B.*

Замечание 1. *Используя теоремы из* [12] *о структуре множеств с ограничениями на его контингенцию, можно получить некоторую информацию о структуре прообразов прямых линий для отображений, сохраняющих ориентацию симплексов. Этот метод был использован в работе* [10]. *В настоящей работе мы будем использовать другой подход, примененный в работе* [11] *для плоского случая.*

3. Функция телесного угла

Рассмотрим произвольную коническую область $C \subset \mathbb{R}^3$ с вершиной в точке p. Такая область представляет собой объединение всех лучей, выходящих из точки p и проходящих через точки некоторой области $F \subset \mathbb{S}^2(p)$, расположенной на единичной сфере $\mathbb{S}^2(p)$ с центром в точке p. Величина телесного угла конической области C в вершине p определяется как площадь области F, которую мы будем обозначать через $\theta_C(p)$. По аналогии можно ввести понятие величины телесного угла вершины p многогранника M — как величину телесного угла конической области, полученной объединением лучей, выходящих из данной вершины и направленных внутрь многогранника. Для этой величины мы введем похожее обозначение $\theta_M(p)$. Если многогранник M является тетраэдром $S(p_0, p_1, p_2, p_3)$, то из формул сферической геометрии следует, что величина трехгранного угла при некоторой его вершине равна сумме двугранных углов при этой же вершине минус π. Эту формулу мы будем использовать неоднократно в дальнейшем.

Несложно получить также явную формулу для вычисления телесного угла в общем случае. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ произвольную плоскость Π и $\Omega \subset \Pi$ — некоторую ее ограниченную область. Тогда для всякой точки p, не лежащей на плоскости Π, можно построить следующую коническую область

$$C_\Omega^p = \{x \in \mathbb{R}^3 : \exists t > 0,\ p + (x - p) \cdot t \in \Omega\}.$$

Рассмотрим отображение $\pi : \Omega \to \mathbb{S}^2(p)$ проекции области $\Omega \subset \Pi$ на единичную сферу с центром в точке p, которое может быть задано формулой

$$x \mapsto \frac{x - p}{|x - p|}.$$

Тогда прямым подсчетом можно получить выражение для якобиана этого отображения

$$J_\pi(x) = \frac{\langle x - p, \xi \rangle}{|x - p|^3},$$

где ξ — нормаль к плоскости Π обращенная в полупространство, которому точка p не принадлежит, $\langle x - p, \xi \rangle \geq 0$. Приведем некоторые соображения к выводу этой формулы. Для вычисления построим две параллельные плоскости: Π' и Π'', при этом плоскость Π' будет касательной к сфере $\mathbb{S}^2(p)$ в точке $\pi(x)$, а плоскость Π'' параллельна плоскости Π' и проходит через точку x. Тогда отображение проекции π может быть представлено композицией отображений $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$. Здесь $\pi_2 : \Pi \to \Pi''$, $y \in \Pi''$, и $\pi_2(y)$ будет точкой пересечения луча py с плоскостью Π'', а $\pi_1 : \Pi'' \to \mathbb{S}^2(p)$, и $\pi_1(y)$ будет точкой пересечения луча py со сферой $\mathbb{S}^2(p)$. Искомый якобиан отображения π равен произведению $J_\pi(x) = J_{\pi_1}(x) \cdot J_{\pi_2}(x)$ якобианов отображений π_1 и π_2. Дифференциал отображения π_1 в точке x представляет собой линейное отображение, являющееся композицией параллельного переноса касательного вектора из точки x в точку $\pi(x)$ и умножением этого вектора на число $1/|x - p|$, что следует из соображений подобия. Значит

$$J_{\pi_1}(x) = \frac{1}{|x - p|^2}.$$

Якобиан отображения $\pi_2(x)$ из геометрических свойств равен косинусу угла между нормалями плоскостей Π и Π'', т. е.

$$J_{\pi_2}(x) = \frac{\langle x - p, \xi \rangle}{|x - p|}.$$

Таким образом мы окончательно получим требуемую формулу для $J_\pi(x)$.

Из выведенной формулы будем иметь

$$\theta_{C^p_\Omega}(p) = \int\limits_\Omega \frac{\langle x-p,\xi\rangle}{|x-p|^3}dx.$$

Для краткости введем обозначение

$$\theta_\Omega(p) = \theta_{C^p_\Omega}(p).$$

Теперь, если положить $G(x,p) = -\frac{1}{|x-p|}$, то эта формула может быть переписана в виде

$$\theta_\Omega(p) = \int\limits_\Omega \langle \nabla_x G(x,p),\xi\rangle dx.$$

Поскольку функция $G(x,p)$ является гармонической всюду, кроме точек $x=p$, и по x и по p, то и функция $\theta_\Omega(p)$, рассмотренная как функция точки p, является гармонической. Пусть H^+ — полупространство, определяемое плоскостью Π, содержащее точку p. Очевидным является неравенство

$$\theta_\Omega(p) < \theta_\Omega(y), \tag{1}$$

для всякой точки $y \in C_\Omega \cap H^+$. Это следует из того, что при параллельном переносе области C^p_Ω ее можно поместить в область C^y_Ω, совместив точку p с точкой y. Обозначим через Π_t плоскость в H^+, параллельную плоскости Π, расположенную от нее на расстоянии t. Предполагая, что уравнение плоскости Π имеет вид $\langle x,\xi\rangle = d$, определим следующую цилиндрическую область

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : x - \langle x,\xi\rangle\xi + d\xi \in \Omega\}.$$

Обозначим через C_0 ту часть этой цилиндрической области, отсекаемую плоскостью Π, которая содержит точку p. Пусть $C_0 \cap \Pi_t = \Omega_t$. Определим следующую функцию

$$\theta(t) = \max_{y\in\Omega_t} \theta_\Omega(y).$$

Лемма 1. *Если область $\Omega \subset \Pi$ является ограниченной и выпуклой, то функция $\theta(t)$ является убывающей выпуклой вниз функцией при $t > 0$.*

Доказательство. Сначала предположим, что область Ω имеет гладкую границу. Пусть $f(y)$ — расстояние от точки y до плоскости Π. Для пары значений $t_1, t_2 > 0$ положим

$$g(y) = \theta_\Omega(y) - \left(\theta(t_1) + \frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{t_2-t_1}(f(y)-t_1)\right).$$

Из этого выражения видно, что максимум функции $g(y)$ на множестве Ω_t достигается в той же точке, что и максимум функции $\theta_\Omega(y)$. Для точек $y \in \Omega_t$ выполним преобразование выражения для телесного угла

$$\theta_\Omega(y) = \int\limits_\Omega \frac{\langle x-y,\xi\rangle}{|x-y|^3}dx =$$

$$= t\int\limits_\Omega \frac{dx}{(t^2+|x-y'|^2)^{3/2}},$$

где y' — ортогональная проекция точки y на плоскость Π. Здесь мы воспользовались тем, что вектор $x-p$ может быть представлен в виде ортогональной суммы

$$x-y=\langle x-y,\xi\rangle\xi+x-y'=t\xi+x-y'.$$

Пусть ξ_0 — вектор внешней нормали области Ω_t в плоскости Π_t. Тогда, применяя формулу дифференцирования интеграла по параметру y', в точках границы цилиндра C будем иметь

$$\frac{\partial\theta_\Omega(y)}{\partial\xi_0}=3t\int\limits_\Omega\frac{\langle x-y',\xi_0\rangle dx}{(t^2+|x-y'|^2)^{5/2}}\leq 0.$$

Полученное неравенство имеет место в силу выпуклости Ω, поэтому числитель дроби, стоящей в последнем интеграле, неположителен. Тогда, применяя принцип максимума к гармонической функции $g(y)$ в ограниченной области $\{t_1<f(y)<t_2\}\cap H^+\cap C_0$, мы получим, что в этой области $g(y)\leq 0$. Это эквивалентно соотношению

$$\theta_\Omega(y)\leq\left(\theta(t_1)+\frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{t_2-t_1}(f(y)-t_1)\right).$$

Переходя к максимуму по $y\in\Omega_t$, приходим окончательно к неравенству

$$\theta(t)\leq\left(\theta(t_1)+\frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{t_2-t_1}(t-t_1)\right). \tag{2}$$

Это неравенство, выполненное для всех $0<t_1<t_2$, означает выпуклость вниз функции $\theta(t)$ при $t>0$. Аналогичное неравенство для случая негладкой границы области Ω получается предельным переходом и аппроксимацией области Ω выпуклыми областями с гладкими границами. Действительно, пусть $\Omega_1\subset\Omega$ — выпуклая область с гладкой границей, которая аппроксимирует область Ω. Из формулы для θ_Ω следует неравенство

$$0\leq\theta_\Omega(y)-\theta_{\Omega_1}(y)=\left|\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1}\frac{\langle x-p,\xi\rangle}{|x-p|^3}dx\right|\leq\frac{d+diam(\Omega)}{d^3}|\Omega\setminus\Omega_1|,$$

где d — расстояние от точки y до плоскости, содержащей область Ω. Из полученных соотношений получаем неравенства

$$\theta_{\Omega_1}(t)\leq\theta_\Omega(t)\leq\theta_{\Omega_2}(t)$$

и

$$|\theta_\Omega(t)-\theta_{\Omega_1}(t)|\leq\frac{t+diam(\Omega)}{t^3}|\Omega\setminus\Omega_1|.$$

Эти неравенства позволяют сделать предельный переход в (2).

Для завершения доказательства леммы заметим, что, поскольку $\theta(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, то из выпуклости и положительности следует, что функция $\theta(t)$ является убывающей. □

Лемма 2. *Пусть $S=S(p_0,p_1,p_2,p_3)$ — тетраэдр и Ω — внутренняя часть его грани с вершинами p_1,p_2,p_3. Обозначим через $\theta_S(p)$ величину телесного угла в тетраэдре $S=S(p,p_1,p_2,p_3)$ в вершине p. Тогда справедливы утверждения:*

α)

$$\lim_{p\to q}\theta_S(p) = 2\pi,\ \forall q \in \Omega.$$

β) *Пусть q принадлежит границе грани Ω и не является ее вершиной. Рассмотрим произвольный луч ℓ выходящий из точки q, направленный внутрь тетраэдра S. Тогда*

$$\lim_{p\in\ell, p\to q}\theta_S(p) = 2\pi - 2\varphi,$$

где φ — двугранный угол между плоскостью грани Ω и плоскостью, проходящей через луч ℓ и сторону грани Ω, которой принадлежит точка q.

Доказательство. Утверждение α) очевидно, поскольку многогранный угол при вершине p тетраэдра $S(p, p_1, p_2, p_3)$ разворачивается в полусферу когда точка p приближается к точке грани Ω. Для доказательства равенства в β) рассмотрим точку $p \in \ell$, достаточно близкую к точке q. Пусть для определенности $q \in [p_1, p_2]$. Обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ двугранный углы при вершине p в тетраэдре $S(p, p_1, p_2, p_3)$, причем α_1 и α_2 — углы при ребрах pp_1 и pp_2 соответственно. Из геометрических соображений легко заметить, что $\alpha_0 \to \pi$, а $\alpha_i \to \pi - \varphi,\ i = 1, 2$ при $p \to q$. Тогда по формуле площади сферического треугольника имеем

$$\lim_{p\in\ell, p\to q}\theta_S(p) = \lim_{p\in\ell, p\to q}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \pi) = \pi + 2(\pi - \varphi) - \pi = 2\pi - 2\varphi.$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 3. *Рассмотрим коническую область C некоторого трехгранного угла с вершиной p. Если величина некоторого плоского угла в этом трехгранном угле равна φ, а оба двугранных угла при нем не являются тупыми, то*

$$\theta_C(p) \le \varphi.$$

Доказательство. Построим новый трехгранный угол с вершиной в точке p и двумя прямыми плоскими углами в плоскостях, проходящих через стороны плоского угла, указанного в условии леммы. Его коническая область C' содержит область C. Поэтому $\theta_{C'}(p) \ge \theta_C(p)$. Утверждение леммы будет теперь следовать из равенства $\theta_{C'}(p) = \varphi$. □

Замечание 2. *Обозначим через A, B, C некоторые точки на ребрах трехгранного угла, рассмотренного в лемме. Несложно видеть, что двугранные углы при ребрах pA и pB не превосходят $\pi/2$ тогда и только тогда, когда проекция точки C на плоскость грани ApB лежит между лучами pA и pB.*

Лемма 4. *Пусть Ω — треугольник в пространстве с вершинами p_1, p_2, p_3, не имеющий тупых углов. Рассмотрим некоторое значение $\pi < \theta_0 < 2\pi$. Тогда часть множества уровня функции θ_Ω*

$$\Sigma_{\theta_0} = \{y : \theta_\Omega(y) = \theta_0\},$$

лежащая по одну из сторон плоскости треугольника, представляет собой гладкую поверхность, край которой совпадает с границей этого треугольника. Во всех точках границы треугольника, кроме вершин, существуют касательные плоскости этой поверхности, которые образуют угол $\pi - \theta_0/2$ с плоскостью треугольника.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция расстояния от точки x до плоскости треугольника. Поскольку $\theta_\Omega(y) \to 0$ при $y \to \infty$, то величина

$$\max_{\Sigma_{\theta_0}} f(x)$$

конечна и достигается в некоторой точке $x_0 \in \Sigma_{\theta_0}$. Согласно лемме 1, в силу монотонности функции $\theta(t)$ для $\theta' > \theta_0$ множество уровня $\Sigma_{\theta'}$ лежит между плоскостями, заданными уравнением $\{x : f(x) = f(x_0)\}$. Рассмотрим произвольную точку $p' \in \Sigma_{\theta_0}$. Построим тетраэдр $S' = S(p', p_1, p_2, p_3)$. Покажем, что множество Σ_{θ_0} лежит выше боковой поверхности S', если за основание этого тетраэдра принять треугольник Ω. Действительно, если найдется точка $p^* \in \Sigma_{\theta_0}$, лежащая ниже этой боковой поверхности, то, введя обозначение для тетраэдра $S^* = S(p^*, p_1, p_2, p_3)$, из свойства (1) получим неравенство

$$\theta_0 = \theta_{S'}(p') > \theta_{S^*}(p^*) = \theta_0.$$

Поскольку это неравенство не может выполняться, то точка p^* не может лежать ниже боковой поверхности тетраэдра S'. Теперь покажем, что множество Σ_{θ_0} не может пересекать боковую поверхность цилиндрической области C_0 во всех ее точках, кроме точек границы треугольника Ω. Предположим противное, т. е. найдется точка $p' \in \Sigma_{\theta_0}$ с указанным свойством. Поскольку эта точка не лежит в плоскости треугольника Ω, то тетраэдр $S' = S(p', p_1, p_2, p_3)$ является невырожденным. Для определенности будет считать, что p' лежит на той части боковой поверхности цилиндра, которая соответствует стороне p_1p_2 его основания Ω. Поскольку треугольник в основании не имеет тупых углов, то величина α_1 двугранного угла между гранями $p'p_1p_3$ и p_1p_2p', а также величина α_2 двугранного угла между гранями $p'p_2p_3$ и p_1p_2p', не превосходят $\pi/2$. Это следует из замечания 2 к лемме 3. Заметим также, что величина α двугранного угла между гранями $p'p_1p_3$ и $p'p_2p_3$ не превосходит π. Поэтому

$$\theta_{S'}(p') = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha - \pi \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi - \pi = \pi.$$

С другой стороны, по предположению $p' \in \Sigma_{\theta_0}$

$$\theta_0 = \theta_{S'}(p').$$

И мы приходим к неравенству $\theta_0 \le \pi$, что противоречит условию леммы. Таким образом, точка p' не может располагаться на боковой грани цилиндра C_0, кроме точек границы треугольника Ω. Теперь рассмотрим точку $p^* \in \Sigma_{\theta_0}$, в которой функция $f(x)$ достигает максимального значения на Σ_{θ_0}. Построим тетраэдр $S^* = S(p^*, p_1, p_2, p_3)$. Из доказанного следует, что множество расположено между боковыми поверхностями цилиндра C_0 и тетраэдра S^*. Поскольку функция $\theta_{S'}(p)$ является аналитической, то ее поверхность уровня является гладкой, причем из полученного следует, что эта поверхность проходит через стороны треугольника Ω_0. Рассмотрим некоторую точку q лежащую, для определенности, на стороне p_1p_2 треугольника $\Omega = p_1p_2p_3$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $q_n \in \Sigma_{\theta_0}, n = 1, 2, ...$, сходящуюся к q, причем предельное положение лучей qq_n образует луч ℓ. Согласно утверждению β) леммы 2, мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \theta_\Omega(q_n) = 2\pi - 2\varphi,$$

где φ — двугранный угол между плоскостью треугольника Ω и плоскостью, проходящей через луч ℓ и сторону p_1p_2 треугольника Ω, которой принадлежит

точка q. С другой стороны величины, стоящие под знаком предела равны θ_0, так как $q \in \Sigma_{\theta_0}$. Следовательно
$$\varphi = \pi - \theta_0/2.$$
Что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства леммы необходимо доказать, что множество Σ_{θ_0} уровня функции $\theta_\Omega(y)$ является гладкой поверхностью. Поскольку вне плоскости треугольника эта функция является гармонической, то в силу теоремы о неявной функции достаточно показать, что ее дифференциал нигде не равен нулю. Мы покажем, что производная функции $\theta_\Omega(y)$ по направлению ортогональному плоскости треугольника не равна нулю. Согласно вычислениям леммы 1
$$\theta_\Omega(y) = \int\limits_\Omega \frac{\langle x-y, \xi\rangle}{|x-y|^3}dx =$$
$$= t\int\limits_\Omega \frac{dx}{(t^2 + |x-y'|^2)^{3/2}},$$
где y' – ортогональная проекция точки y на плоскость Π, $t > 0$ — расстояние между ними. Выполним замену в последнем интеграле, положив $z = (x-y')/t$. Получим
$$\theta_\Omega(y) = \frac{1}{t}\int\limits_\Omega \frac{d(x-y')/t}{(1+|(x-y')/t|^2)^{3/2}} =$$
$$\frac{1}{t}\int\limits_{\Omega(t)} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{3/2}},$$
где $\Omega(t) = \{z : z \cdot t + y' \in \Omega\}$. Очевидно, что при $0 < t_1 < t_2$ имеет место вложение $\Omega(t_2) \subset \Omega(t_1)$. Таким образом, $\theta_\Omega(y)$ представляет собой произведение строго убывающих функций по t. Следовательно $\frac{\partial\theta_\Omega(y)}{\partial t} < 0$. Лемма доказана полностью. □

4. Доказательство основного результата

Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ некоторое непрерывное отображение. Зафиксируем величину $\pi < \theta_0 < 2\pi$. Обозначим через Ξ_{θ_0} множество тетраэдров, в которых величина максимального трехгранного угла не больше θ_0. Имеет место

Теорема 3. *Если непрерывное, открытое отображение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ сохраняет ориентацию всякого тетраэдра из множества Ξ_{θ_0}, то прообраз $f^{-1}(L)$ любой плоскости $L \subset \mathbb{R}^3$ полностью лежит в некоторой плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный остроугольный треугольник Ω с вершинами $A, B, C \in f^{-1}(L)$. Пусть Π обозначает плоскость этого треугольника, а C_0 — цилиндрическую область, построенную над Ω с образующими, ортогональными плоскости Π. При этом множество Ω мы рассматриваем как открытое множество плоскости Π. Покажем сначала, что пересечение $f^{-1}(L)\cap C_0$ представляет собой график функции в системе координат, в которой две декартовы оси выбраны в плоскости основания Ω цилиндрической области C_0, а третья направлена ортогонально этой плоскости. Предположим, что это не так. Тогда найдутся две точки $p', p'' \in f^{-1}(L)$ лежащие на одной прямой, ортогональной плоскости основания цилиндрической области C_0. Пусть A, B, C —

вершины треугольника основания, лежащие на множестве $f^{-1}(L)$. Так же через e обозначим единичный вектор, направленный вдоль третьей оси построенной системы координат. Построим две поверхности

$$\Sigma^{\pm} = \{p \in C_0 : \theta_\Omega(p) = \theta_0,\ \pm\langle p - A, e\rangle > 0\}.$$

Согласно результатам предыдущего раздела статьи эти две поверхности ограничивают область D внутри цилиндра, внутри которой выполнено неравенство $\theta_\Omega(p) > \theta_0$. Из теоремы 2 следует, что точки p', p'' должны лежать внутри этой области D, поскольку в противном случае в тетраэдрах $S(p', A, B, C)$ и $S(p'', A, B, C)$ величины трехгранных углов не превосходят в вершинах p', p'' или π (для вершин A, B, C в силу леммы 3 и замечания 2), или θ_0 . Что будет противоречить утверждению теоремы 2. Предположим, что точки p', p'' лежат по одну сторону от плоскости основания Ω. Для определенности будем считать, что точка p'' лежит ближе к основанию цилиндра, чем точка p'. Построим четыре тетраэдра $S_1 = S(p', p'', A, B)$, $S_2 = S(p', p'', B, C)$, $S_3 = S(p', p'', C, A)$, $S_0 = S(p'', A, B, C)$. Заметим, что в силу леммы 3 и замечания 2 величины трехгранных углов при вершинах A, B, C в тетраэдре $S(p', A, B, C)$ не превосходят π. Значит тем более не превосходят π величины трехгранных углов в этих же вершинах построенных тетраэдров S_0, S_1, S_2, S_3. Обозначим через α_i величину трехгранного угла при вершине p'' тетраэдра $S_i, i = 0, 1, 2, 3$. Ясно, что их сумма равно 4π. Поскольку $\alpha_0 > \theta_0$, то

$$4\pi = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \theta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 4\pi - \theta_0.$$

Из этого неравенства следует, что одна из величин суммы в левой части последнего неравенства меньше $(4\pi - \theta_0)/3$. Пусть, к примеру $\alpha_1 < (4\pi - \theta_0)/3$. С другой стороны

$$\frac{4\pi - \theta_0}{3} < \theta_0,$$

так как по предположению $\theta_0 > \pi$. Таким образом, в тетраэдре S_1 все трехгранные углы не превосходят θ_0, что противоречит теореме 2.

Рассмотрим теперь случай, когда точки p', p'' лежат по разные стороны от плоскости основания Ω. Покажем, что в этом случае все трехгранные углы тетраэдров $S(p', p'', A, B)$, $S(p', p'', B, C)$, $S(p', p'', C, A)$ не превосходят $\pi < \theta_0$, и мы опять получим противоречие с утверждением теоремы 2. Для определенности рассмотрим тетраэдр $S(p', p'', A, B)$. Сначала покажем, что в этом тетраэдре угол при вершине A не превосходит π. Заметим, что ортогональная проекция точки B на плоскость треугольника $p'Ap''$ будет лежать в плоскости треугольника ABC, так как эта плоскость и плоскость треугольника $p'Ap''$ ортогональны. Откуда следует, что проекция точки B будет расположена между лучами Ap' и Ap''. Тогда из леммы 3 и замечания 2 получаем требуемое. Аналогично доказывается, что величина трехгранного угла при вершине B также не превосходит π. Теперь покажем тоже для вершин p', p''. Доказательства для каждой вершины одинаковы, поэтому, для определенности проведем его для вершины p'. Обозначим через p^* проекцию p' на плоскость треугольника ABC. Величина трехгранного угла при вершине p' в тетраэдре $S(p', p'', A, B)$ не превосходит величины трехгранного угла при вершине p^* в тетраэдре $S(p^*, p'', A, B)$, поскольку с помощью параллельного переноса при совмещении вершин p' и p^* первый трехгранный угол окажется внутри второго. Необходимое неравенство теперь следует из леммы 3 для трехгранного угла при вершине p^* в тетраэдре $S(p^*, p'', A, B)$. Тем самым мы показали, что в D никакие две точки множества $f^{-1}(L)$ не могут лежать на одной прямой, ортогональной плоскости треугольника основания цилиндрической области C_0.

Обозначим через π отображение ортогональной проекции на плоскость П. Пусть $M = f^{-1}(L) \cap C_0$, $K = f(C_0)$. Множество K открыто, поскольку f — открытое отображение. Пересечение $L \cap K$ есть открытое множество плоскости L, причем $f^{-1}(L \cap K) = M$. Так как отображение π, как было показано выше, взаимно-однозначно на множестве M, то отображение $h = \pi \circ f^{-1}$ открыто на $L \cap K$. Обозначим через T образ $L \cap K$ при действии этого отображения. По построению ясно, что T есть проекция M на плоскость П. Покажем, что $T = \Omega$. Предположим, что это не так и найдется точка $x_0 \in \Omega \cap \partial T$. Здесь ∂T обозначает границу множества T, т. е. разность замыкания и подмножества внутренних точек T. Пусть $x_n \in T$ — некоторая последовательность точек, сходящаяся к точке x_0. Положим $\pi^{-1}(x_n) \cap M = y_n$. Ясно, что $f(y_n) \in L$. Поскольку $y_n \in M \subset D$, то эта последовательность ограничена и имеет некоторую предельную точку $y_0 \in C_0$. Не ограничивая общности будем считать последовательность y_n сходящейся. Поскольку проекция π непрерывна, то $\pi(y_n) = x_n \to x_0$, значит $\pi(y_0) = x_0$. Надо заметить, что y_0 есть внутренняя точка цилиндра C_0. Положим $z_0 = f(y_0)$. Поскольку f непрерывно, а L замкнуто, то $z_0 \in L$. Поскольку $y_n \in C_0$, то $z_0 \in \overline{K}$. Поскольку y_0 внутренняя точка для C_0, то в силу открытости отображения f точка z_0 также является внутренней в $f(C_0) = K$. То есть $z_0 \in K \cap L$. С другой стороны, очевидно, что $x_0 = \pi \circ f^{-1}(z_0)$, т. е. точка x_0 должна принадлежать множеству $f^{-1}(K \cap L) = T$. Т. к. сквозное отображение $\pi \circ f^{-1}$ открыто, то множество T открыто в плоскости П, а x_0 — его внутренняя точка. Мы получили противоречие с предположением, что $x_0 \in \partial T$. Таким образом проекция M на плоскость П полностью покрывает треугольник Ω. С другой стороны, как было показано выше, $M \subset D$, поэтому из доказанного следует, что замыкание $M \cap C_0$ содержит стороны треугольника ABC. Рассмотрим произвольную пару точек $A' \in AC, B' \in BC$, такую, что отрезки AB и $A'B'$ параллельны. Треугольник $A'B'C$ подобен треугольнику ABC и является остроугольным. Следовательно, как было доказано выше $A'B' \subset M$. Поэтому все множество $M \subset$ П. Таким образом, любой остроугольный треугольник с вершинами на множестве $f^{-1}(L)$ полностью лежит в этом множестве.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что всякий непрерывный контур Q без самопересечений, лежащий в $f^{-1}(L)$, является плоским. Пусть контур Q задан непрерывным отображением $r : [0, 1] \to f^{-1}(L)$, $r(0) = r(1)$, и для всяких $t_1, t_2 \in (0, 1), t_1 \neq t_2$ выполнено $r(t_1) \neq r(t_2)$. Зафиксируем произвольную точку $0 \leq t_0 < 1$. Не ограничивая общности, будем считать, что $t_0 > 0$. Построим последовательности точек t'_n, t''_n, такие, что $t'_n < t_0, t'_n \to t_0$, $t''_n > t_0, t''_n \to t_0$, причем существуют предельные лучи при $n \to +\infty$ для последовательностей лучей, выходящих из $r(t_0)$ и проходящих через точки $r(t'_n), r(t''_n)$. Ясно, что найдется такое число $N > 0$, что для всякого $n > N$ существуют значения $t' < t_0$ и $t'' > t_0$ в окрестности t_0 такие, что $\angle r(t_0)r(t'_n)r(t') > \angle r(t'_n)r(t_0)r(t')$ и $\angle r(t_0)r(t''_n)r(t'') > \angle r(t''_n)r(t_0)r(t'')$. Из этого следует, что найдутся такие t^*_1, t^*_2, что треугольник $r(t^*_1)r(t^*_2)r(t_0)$ равнобедренный. Действительно, пусть $a = r(t'_n)$, $b = r(t')$. Будем перемещать точки a, b по контуру Q, сохраняя их порядок следования друг за другом, причем предположим, что эти точки попадут в точки $r(t''), r(t''_n)$. Ясно, что в итоге будет $a = r(t''),\ b = r(t''_n)$. Поскольку разность углов $\angle r(t_0)ab - \angle ar(t_0)b$ сначала будет положительной, а потом отрицательной, то в некоторый момент эти углы сравняются из соображений непрерывности. Таким образом мы получим равнобедренный треугольник. Причем, выбирая достаточно большое N, мы можем добиться того, что этот треугольник будет остроугольный. Стороны такого треугольника, по доказанному выше, должны полностью лежать в множестве $f^{-1}(L)$. Из соображений непрерывности ясно, что для всяких значений t из некоторой окрестности точки t_0 треугольники $r(t_1^*)r(t_2^*)r(t)$ также являются остроугольными. Значит все их стороны лежат в множестве $f^{-1}(L)$. Заметим, что у всех этих треугольников сторона $r(t_1^*)r(t_2^*)$ общая. Опять из соображений непрерывности и того факта, что $f^{-1}(L)$ пересекает прямую, ортогональную плоскости треугольника $r(t_1^*)r(t_2^*)r(t)$ и проходящую через его внутреннюю точку в единственной точке, следует, что все такие треугольники лежат в одной плоскости. Значит, все точки контура $r(t)$ для t из некоторой окрестности t_0 лежат в одной плоскости. Следовательно весь контур лежит в этой плоскости. Из произвольности контура можно заключить, что и все множество $f^{-1}(L)$ лежит в некоторой плоскости. Теорема доказана. $\square$

References

[1] I.P. Natanson I.P., *Theory of functions of a real variable*, Nauka, Moscow, 1974. MR0354979

[2] H. Lebesgue, *Sur le probléme de Dirichlet*, Palermo Rend., **24** (1907), 371–402. JFM 38.0392.01

[3] G.D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. Math, Inst. Hautes Étud. Sci., **34** (1968), 53–104. Zbl 0189.09402

[4] S.K. Vodop'yanov, *Monotone functions and quasiconformal mappings on Carnot groups*, Sib. Math. J., **37**:6 (1996), 1113–1136. Zbl 0876.30020

[5] V.M. Miklyukov, *Introduction in nonsmooth analysis*, Izd VolSU, Volgograd, 2008.

[6] V.M. Miklyukov, *Some conditions for the existence of the total differential*, Sib. Math. J., **51**:4 (2010), 639–647. Zbl 1213.46036

[7] R.R. Salimov, *ACL and differentiability of a generalization of quasi-conformal maps*, Izv. Math., **72**:5 (2008), 977–984. Zbl 1175.31006

[8] M.F. Prokhorova, *Problems of homeomorphism arising in the theory of grid generation*, Proc. Steklov Inst. Math., **261**:1 (2008), S165–S182. Zbl 1235.65143

[9] A.V. Boluchevskaya, *On the quasiisometric mapping preserving simplex orientation*, Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Mat. Mekh. Inform., **13**:1(2) (2013), 20–23. Zbl 1294.65105

[10] V.A. Klyachin, N.A. Chebanenko, *About linear preimages of continuous maps, that preserve orientation of triangles*, Vestn. Volgogr. Univ. Math., Phys., **2014**:3 (2014), 56–60.

[11] V.A. Klyachin, N.A. Chebanenko, *On the geometric structure of the continuous mappings preserving the orientation of simplexes*, Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Mat. Mekh. Inform., **17**:3 (2017), 294–303. Zbl 1392.30009

[12] S. Saks, *Theory of the integral*, G.E. Stechert & Co., New York, 1937. Zbl 0017.30004

Klyachin Vladimir Aleksandrovich
Volgograd State University,
100, Universitetskiy ave.,
Volgograd, 400062, Russia
Email address: klyachin.va@volsu.ru

Chebanenko Nikita Alekseevich
Volgograd State University,
100, Universitetskiy ave.,
Volgograd, 400062, Russia
Email address: chebanenko.na@volsu.ru