S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, № 2, стр. 975–984 (2021) УДК 519.172.2, 519.174
DOI 10.33048/semi.2021.18.073 MSC 05C10, 05C15, 05C70

ПУТЕВАЯ РАЗБИВАЕМОСТЬ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ С ОГРАНИЧЕНЯМИ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРОТКИХ ЦИКЛОВ

А.Н. ГЛЕБОВ

Abstract. Let a and b be positive intergers. An (a, b)-partition of a graph is a partition of its vertex set into two subsets so that in the subgraph induced by the first subset each path contains at most a vertices while in the subgraph induced by the second subset each path contains at most b vertices. A graph G is τ-partitionable if it has an (a, b)-partition for any pair a, b such that $a + b$ equals to the number of vertices in the longest path in G. The celebrated Path Partition Conjecture of Lovász and Mihók (1981) states that every graph is τ-partitionable. In 2018, Glebov and Zambalaeva proved the Conjecture for triangle-free planar graphs where cycles of length 4 have no common edges with cycles of length 4 and 5. The purpose of this paper is to generalize this result by proving that every planar graph in which cycles of length 4 to 7 have no chords while 3-cycles have no common vertices with cycles of length 3 and 4 is τ-partitionable.

Keywords: graph, planar graph, girth, path partition, τ-partitionable graph, Path Partition Conjecture.

1. Введение

В работе исследуется проблема путевого разбиения графа, то есть такого разбиения множества его вершин на два подмножества, при котором для каждой части разбиения число вершин в наибольшей простой цепи ограничено сверху заранее заданной величиной.

Glebov, A.N., Path partitioning planar graphs with restrictions on short cycles.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 18-01-00353 и 18-01-00747).

Поступила 15 ноября 2020 г., опубликована 15 сентября 2021 г.

Пусть $G = (V, E)$ — конечный простой граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Для каждой вершины $v \in V$ через $d(v)$ обозначим ее *степень*, то есть число инцидентных v ребер; вершина степени d называется *d-вершиной*. Будем использовать обозначения P_n и C_n для простой цепи и простого цикла с n вершинами, соответственно. Цикл C_n иначе будем называть *n-циклом*, а цикл C_3 — *треугольником*. *Обхват* $g(G)$ и *окружение* $c(G)$ графа G определяются как наименьшая и наибольшая длина простого цикла в G, соответственно. Граф G называется *панциклическим* (*слабо панциклическим*), если в G имеется цикл C_n при каждом целом $n \in \{3, \ldots, |V|\}$ (соответственно, при каждом целом $n \in \{g(G), \ldots, c(G)\}$).

Планарный граф — это граф, который можно уложить на плоскости без пересечений ребер. *Плоский граф* $G = (V, E, F)$ — это такая укладка планарного графа $G = (V, E)$ на плоскости, при которой ребра не пересекаются. Через $F = F(G)$ обозначим множество всех *граней* плоского графа G, то есть множество всех связных областей на плоскости, границы которых образованы вершинами и ребрами графа G. *Рангом* $r(f)$ грани $f \in F$ связного плоского графа G назовем длину граничного обхода грани f, где мосты учитываются дважды. Грань ранга r также называется *r-гранью*, а грань ранга 3 — *треугольной гранью*. Планарный граф G называется *максимальным планарным*, если при добавлении к нему любого ребра планарность нарушается. Известно, что максимальная планарность графа равносильна тому, что любая его плоская укладка является *триангуляцией*, то есть все ее грани — треугольные.

Через $\tau(G)$ обозначим число вершин в наибольшей простой цепи графа G. Для всякого подмножества вершин $X \subseteq V$ через $G[X]$ обозначим подграф в G, *порожденный* множеством вершин X. Пусть $a \geq 1$, $b \geq 1$ — натуральные числа. *Путевым* (a, b)*-разбиением* графа G называется разбиение множества его вершин V на два подмножества V_1 и V_2 такие, что $\tau(G[V_1]) \leq a$ и $\tau(G[V_2]) \leq b$, то есть порожденный подграф $G[V_1]$ не содержит цепей P_{a+1}, а подграф $G[V_2]$ не содержит P_{b+1}.

В статьях [2, 9, 10, 15] исследовался вопрос об (a, b)-разбиваемости планарных графов с достаточно большим обхватом при константных значениях параметров a и b. Было доказано, что планарные графы с обхватом 5, 6, 7 и 11 являются $(7, 7)$-разбиваемыми [9], $(3, 3)$-разбиваемыми [10], $(2, 2)$-разбиваемыми [2] и $(1, 2)$-разбиваемыми [15], соответственно. В то же время в работах [17] и [1] для каждого фиксированного натурального $c > 1$ были получены примеры планарных графов с обхватом 3 и 4 соответственно, не являющиеся (c, c)-разбиваемыми.

Ловас и Михок (1981) предложили следующее простое определение путевой разбиваемости, при котором числа a и b образуют числовое разбиение параметра $\tau(G)$. Граф G называется *τ-разбиваемым*, если для него существует (a, b)-разбиение при любых натуральных a, b таких, что $a + b = \tau(G)$. Ловасом и Михоком (см. [13, 19]) была выдвинута следующая

Гипотеза 1. *(о путевой разбиваемости) Любой граф является τ-разбиваемым.*

За последние 30 лет гипотеза 1 приобрела широкую известность, однако до сих пор остается нерешенной. Содержательный обзор результатов, посвященных данной гипотезе, приведен в [8]. Гипотеза 1 очевидным образом выполняется для графов, содержащих гамильтонову цепь, так как в этом случае имеем $\tau(G) = |V|$. В [3, 4, 5, 6, 7] и других работах гипотеза 1 была доказана для некоторых специальных классов графов. Так в [5, 7] была установлена τ-разбиваемость графов без клешней (то есть без порожденных подграфов $K_{1,3}$) и связных слабо панциклических графов. Там же было показано, что любой минимальный контрпример к гипотезе 1 (если он существует) является вершинно двусвязным и его минимальная степень не меньше 3. Из результатов [16] следует, что любой граф является $(a, \tau - a)$-разбиваемым при $a \leq 8$. Татт [18] установил, что любой четырехсвязный планарный граф является гамильтоновым, а значит, τ-разбиваемым. Хакими и Шмейхель [14] доказали, что любой максимальный планарный граф является слабо панциклическим. Это свойство выполняется и для плоских почти триангуляций, то есть связных плоских графов, содержащих в точности одну нетреугольную грань. Отсюда следует, что для плоских почти триангуляций гипотеза 1 также верна.

В [11] справедливость гипотезы 1 была подтверждена для планарных графов с обхватом не менее 5. В [12] мы обобщили этот результат на случай планарных графов без циклов длины 3, в которых циклы длины 4 не имеют общих ребер с циклами длины 4 и 5. Целью настоящей статьи являются следующее усиление последнего результата:

Теорема 1. *Любой планарный граф, в котором циклы длины от 4 до 7 не имеют хорд, а циклы длины 3 не имеют общих вершин с циклами длины 3 и 4, является τ-разбиваемым.*

Нетрудно заметить, что теорема 1 влечет результаты из [11] и [12]. При этом основное отличие от результата в [12] состоит в том, что в графе допускаются 3-циклы, однако на их расположение накладываются жесткие ограничения (отсутствие общих вершин с циклами длины 3 и 4 и отсутствие общих ребер с циклами длины 5 и 6).

Для доказательства теоремы 1 нам будет удобно рассматривать (a, b)-разбиение $V = V_1 \cup V_2$ графа $G = (V, E)$ как раскраску его вершин в два цвета, называемую (a, b)-*раскраской* и определяемую отображением $\varphi : V \to \{\alpha, \beta\}$, где $\varphi(v) = \alpha$ при $v \in V_1$, и $\varphi(v) = \beta$ при $v \in V_2$. Далее под раскраской графа всюду понимается его (a, b)-раскраска. Для каждого цвета $x \in \{\alpha, \beta\}$ через $\neg x$ обозначается цвет из множества $\{\alpha, \beta\}$, отличный от x. Под x-*цепью* в графе G понимается простая цепь, все вершины которой окрашены в цвет x. *Высотой* $h(v)$ вершины v, окрашенной в цвет x, называется наибольшее число вершин в x-цепи с началом в v. Цепь из a вершин цвета α называется α-*максимальной цепью*, а любой из концов такой цепи — α-*максимальной вершиной*. Аналогичным образом определяются β-максимальные цепи и вершины в G.

2. Свойства минимального контрпримера к теореме 1

Предположим, что граф $G = (V, E)$ является контрпримером к теореме 1 с минимальным числом вершин. Тогда для некоторых целых a, b таких, что $a + b = \tau(G)$, не существует (a, b)-раскраски вершин G. Из результатов работ [5, 7] следует, что граф G вершинно двусвязен и его минимальная степень не меньше 3, а из результатов [16], — что $a \geq 9$, $b \geq 9$. Отсюда получаем $|V| \geq 19$. Рассмотрим произвольную плоскую укладку (V, E, F) графа G. Из двусвязности G следует, что любая грань в G ограничена простым циклом.

При доказательстве теоремы 1 мы часто будем использовать следующий прием. Удалим из графа G некоторые вершины. В силу минимальности G, для полученного графа G_1 существует (a, b)-раскраска. Рассмотрим в графе G неокрашенную вершину v. *Докраской вершины v по закону меньшинства* назовем ее окрашивание в цвет, которым окрашено меньшинство из смежных с v вершин графа G_1 (или в произвольный цвет, если у вершины v имеется поровну соседей цветов α и β). В частности, если все окрашенные соседи вершины v имеют один и тот же цвет $x \in \{\alpha, \beta\}$ (например, если v смежна только с одной окрашенной вершиной), то окрашивание вершины v в цвет $\neg x$ назовем *докраской по закону противоположности*.

Также для нас будет полезным следующее простое соображение. Пусть в графе G имеется цепь P из k неокрашенных вершин с концами s и t. Тогда если вершины s и t смежны в G с окрашенными вершинами s' и t' цветов α и β, соответственно, то $h(s') + h(t') \leq a + b - k$. В частности, если s' является α-максимальной вершиной, то $h(t') \leq b - k$. Действительно, в противном случае объединение цепи P с α-цепью, исходящей из s', и β-цепью, исходящей из t', давало бы простую цепь в G, содержащую более чем $a + b = \tau(G)$ вершин.

Грань ранга $r \in \{3, 4, 5\}$ назовем *слабой*, если она инцидентна не менее чем $r - 1$ вершинам степени 3. Докажем, что граф G обладает следующими свойствами.

(**G0**) *Любая слабая грань инцидентна вершине степени не менее 4.*

Доказательство. Предположим, что слабая грань f инцидентна только вершинам степени 3. Удалим из графа G все эти вершины. Для полученного графа G_1 существует (a, b)-раскраска. При этом каждая вершина грани f смежна только с одной окрашенной вершиной. Докрасим вершины грани f по закону противоположности. В результате получим (a, b)-раскраску графа G. Свойство (G0) доказано.

Следующие два свойства были доказаны в [12]. Для полноты изложения мы приведем их здесь вместе доказательством.

(**G1**) [12] *Любая слабая грань ранга $r \in \{4, 5\}$ инцидентна вершине степени не менее 5.*

Доказательство. Пусть $f = (v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}) \in F$ — слабая r-грань в G, где $r \in \{4, 5\}$ и $d(v_i) = 3$ при $i = 1, 2, \ldots, r - 1$. Предположим, что $d(v_0) < 5$. Тогда из свойства (G0) следует, что $d(v_0) = 4$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, r - 1$ через u_i обозначим единственную смежную с v_i вершину, не инцидентную грани f.

Удалим из графа G вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}$. В силу минимальности G, для полученного графа G_1 существует (a, b)-раскраска φ. Без ограничения общности, будем считать, что $\varphi(v_0) = \alpha$. Докрасим вершины $v_2, \ldots, v_{r-2}$ по закону противоположности. В силу неравенств $r - 3 \leq 2 < 9 \leq \min\{a, b\}$, в результате получим (a, b)-раскраску графа $G - \{v_1, v_{r-1}\}$.

Докрасим вершины v_1 и v_{r-1}. В силу симметрии, достаточно описать процедуру окрашивания одной из этих вершщин, скажем v_1, считая при этом, что вершина v_{r-1} может быть как окрашенной, так и неокрашенной.

Рассмотрим возможные комбинации цветов вершин u_1 и v_2.

Случай 1: $\varphi(u_1) = \alpha$. Полагаем $\varphi(v_1) = \beta$. Если при этом возникает β-цепь Q, содержащая $b+1$ вершин, то, ввиду способа раскраски вершин $v_2, \ldots, v_{r-2}$ и неравенства $r - 1 < b + 1$, получаем $Q = v_1 v_2 \ldots v_{r-1} u_{r-1} \ldots$. Из существования цепи Q следует, что вершина v_0 не является α-максимальной. Перекрашивая вершину v_{r-1} в цвет α, получаем (a,b)-раскраску графа G.

Случай 2: $\varphi(u_1) = \beta$; $\varphi(v_2) = \alpha$. Если в момент окрашивания v_1 вершина u_1 не является β-максимальной, то полагаем $\varphi(v_1) = \beta$. Пусть u_1 — β-максимальная вершина. Если хотя бы одна β-максимальная цепь, исходящая из u_1, не содержит вершин грани f, то из существования в G цепи $v_1v_2\dots v_{r-1}$ следует, что в графе G_1 выполняется неравенство $h(v_0) \le a - r + 1$. Положим $\varphi(v_1) = \alpha$. Из процедуры раскраски в случае 1 следует, что хотя бы одна из вершин v_{r-1} или u_{r-1} не окрашена в цвет α. Поэтому при окрашивании v_1 в цвет α любая образовавшаяся α-цепь состоит из вершин грани f и некоторой исходящей из v_0 цепи в G_1. Так как по доказанному в G_1 выполняется неравенство $h(v_0) \le a - r + 1$, то любая образовавшаяся α-цепь состоит не более чем из $(a - r + 1) + (r - 1) = a$ вершин.

Пусть в момент окрашивания v_1 каждая исходящая из u_1 максимальная β-цепь содержит вершину грани f. Из правила докраски вершин $v_2, \dots, v_{r-2}$ следует, что каждая такая цепь Q содержит ребро $u_{r-1}v_{r-1}$. При этом ввиду существования цепи v_1Q вершина v_0 не является α-максимальной. Если $\varphi(v_{r-2}) = \beta$, то перекрашивая v_{r-1} в цвет α и полагая $\varphi(v_1) = \beta$, получаем (a,b)-раскраску графа G. Пусть $\varphi(v_{r-2}) = \alpha$. Тогда каждая исходящая из u_1 максимальная β-цепь оканчивается в вершине v_{r-1} и не содержит других вершин грани f. Из существовния этой цепи а также цепи $v_1v_2\dots v_{r-2}$ следует, что $h(v_0) \le a - r + 2$. Окрашивая вершину v_1 в цвет α, получаем (a,b)-раскраску графа G.

Случай 3: $\varphi(u_1) = \varphi(v_2) = \beta$. Если в момент окрашивания v_1 вершина v_0 не является α-максимальной, то полагаем $\varphi(v_1) = \alpha$. Пусть v_0 — α-максимальная. Как отмечено выше, вершины v_{r-1} и u_{r-1} не могут быть одновременно окрашены в цвет α. Поэтому любая исходящая из v_0 максимальная α-цепь содержится в графе G_1, а значит, вершина v_0 является α-максимальной в G_1. Отсюда и из существования в G цепи $v_1v_2\dots v_{r-1}$ следует, что в графе G_1 выполняется неравенство $h(u_1) \le b - r + 1$. Поэтому если при окрашивании v_1 в β образуется β-цепь из $b+1$ вершин, то все вершины $v_2, \dots, v_{r-1}, u_{r-1}$ окрашены в цвет β. В этом случае все вершины $u_2, \dots, u_{r-2}$ окрашены в α. Если в графе G_1 вершина u_2 не является α-максимальной, то она не α-максимальна и в графе $G - v_1$, так как все вершины $v_2, \dots, v_{r-1}$ окрашены в цвет β. В этом случае, перекрашивая v_2 в цвет α и полагая $\varphi(v_1) = \beta$, получаем (a,b)-раскраску графа G.

Пусть в графе G_1 вершина u_2 является α-максимальной. Так как в G_1 вершина v_0 также α-максимальна и имеет степень 2, то v_0 смежна не более чем с одной вершиной цвета β. Обозначим эту вершину (если она существует) через w. Докажем, что вершина w не может быть β-максимальной в G_1. Допустим, что в графе G_1 вершина w является концом β-максимальной цепи P. Если исходящая из u_2 в G_1 α-максимальная цепь Q не содержит вершину v_0, то в G имеется цепь $Pv_0v_1v_2Q$, состоящая из $a+b+3$ вершин. Если же цепь Q содержит вершину v_0, то v_0 является концом Q, а значит, в G имеется цепь PQv_2v_1 из $a+b+2$ вершин.

Перекрасим вершину v_0 в цвет β и положим $\varphi(v_1) = \varphi(v_{r-1}) = \alpha$. Заметим, что при этом в графе G не образуется β-цепь из $b+1$-вершин, так как в графе G_1 вершина w не является β-максимальной, а в графе G все вершины $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$ окрашены по закону противоположности по отношению к вершинам из G_1. Следовательно, полученная раскраска φ является (a,b)-раскраской графа G. Свойство (G1) доказано.

(**G2**) [12] *В графе G любая вершина v степени 5 инцидентна не более чем двум слабым граням, и если таких граней две, то они имеют ранг 5 и являются соседними в окружении v.*

Доказательство. Пусть вершина $v \in V$ степени 5 инцидентна слабым граням f_1, f_2. Предположим, что грани f_1 и f_2 не являются соседними в окружении v. Удалим из G все вершины граней f_1 и f_2. Для полученного графа G_1 существует (a,b)-раскраска φ. Поскольку каждая удаленная вершина смежна не более чем с одной вершиной графа G_1, раскраску φ можно продолжить по закону противоположности на все удаленные вершины. Так как число удаленных вершин не превосходит 9, в результате получаем (a,b)-раскраску графа G. Следовательно, грани f_1 и f_2 являются соседними в окружении вершины v. Из отсутствия хорд у циклов длины не более 7 следует, что обе эти грани имеют ранг 5. Свойство (G2) доказано.

Так как в графе G циклы длины не более 7 не имеют хорд, а 3-циклы не имеют общих вершин между собой, то любая грань ранга не более 6 не смежна с треугольными гранями, а любая грань ранга $r \geq 7$ смежна не более чем с $\lfloor r/2 \rfloor$ треугольными гранями. Пусть грань f ранга не менее 7 смежна по ребру xy с треугольной гранью (x,y,t). В этом случае ребро xy и его концевые вершины x и y будем называть *треугольными* для f. Назовем треугольную грань (x,y,t) *трудной* для f, если выполняется одно из следующих трех условий:
1) $d(x) = d(y) = 3$;
2) $d(x) = d(t) = 3$; $d(y) = 4$;
3) $d(y) = d(t) = 3$; $d(x) = 4$.

(**G3**) *Если 7-грань f смежна с тремя трудными треугольными гранями, то (единственная) нетреугольнвя вершина грани f имеет степень не менее 4.*

Доказательство. Пусть грань f смежна с трудными 3-гранями $x_1y_1t_1$, $x_2y_2t_2$ и $x_3y_3t_3$ по ребрам x_1y_1, x_2y_2 и x_3y_3, соответственно. Предположим, что нетреугольная вершина грани f имеет степень 3. Удалим из графа G все вершины грани f и все те вершины множества $\{t_1, t_2, t_3\}$, которые имеют степень 3 в G. Для полученного графа G_1 существует (a,b)-раскраска. При этом каждая неокрашенная вершина графа G смежна не более чем с одной окрашенной вершиной из G_1. Окрасим вершины, имеющие ровно одного окрашенного соседа в G_1, по закону противоположности. Далее докрасим оставшиеся вершины по закону меньшинства. В результате получим (a,b)-раскраску графа G. Свойство (G3) доказано.

3. Применение формулы Эйлера

Запишем формулу Эйлера для графа $G(V,E,F)$ в виде

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (r(f) - 4) = -8.$$

Определим *заряды* вершин и граней графа G, полагая $\mu(v) = d(v) - 4$ при $v \in V$ и $\mu(f) = r(f) - 4$ при $f \in F$. Заметим, что только вершины степени 3 и треугольные грани имеют отрицательный заряд, равный -1. Перераспределим заряды между вершинами и гранями графа G, не изменяя их суммы, по следующим правилам:

R1. Любая грань передает каждой инцидентной 3-вершине заряд $\frac{1}{3}$.

R2. Любая вершина степени не менее 5 передает каждой инцидентной грани f ранга не более 5 следующий заряд:
$\frac{2}{3}$, если f — слабая грань ранга 3 или 4;
$\frac{1}{3}$, если f — слабая 5-грань, либо 3-грань, инцидентная в точности одной 3-вершине.

R3. Пусть грань f ранга не менее 7 смежна по ребру xy с треугольной гранью (x, y, t). Тогда грань f передает грани (x, y, t) следующий заряд:
$\frac{2}{3}$, если $d(x) \le 4$, $d(y) \le 4$, $d(t) = 3$;
$\frac{1}{3}$, во всех остальных случаях.

R4. Пусть грань f ранга не менее 6 смежна по ребру xy с 4-гранью g, причем $d(x) \ge 4$. Если $d(y) = 3$, то f передает грани g заряд $\frac{1}{6}$, иначе — заряд $\frac{1}{3}$.

Обозначим через $\mu_1(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после применения правил R1–R4. Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно убедиться в справедливости следующего факта, который противоречит отрицательности суммы всех зарядов в G.

(**G4**) *Для любого элемента $x \in V \cup F$ выполняется неравенство $\mu_1(x) \ge 0$.*

Доказательство. Рассмотрим вершину $v \in V$ степени d. В силу ранее установленных свойств графа G имеем $d \ge 3$. Если $d = 3$, то вершина v получает заряд $\frac{1}{3}$ от каждой инцидкетной грани по правилу R1, и $\mu_1(v) = \mu(v) + 3 \times \frac{1}{3} = -1 + 1 = 0$. Вершины степени 4 не участвуют в перераспределении зарядов, поэтому их конечный заряд равен $\mu_1(v) = \mu(v) = 4 - 4 = 0$.

Пусть $d \ge 5$. Сначала рассмотрим случай, когда вершина v инцидентна треугольной грани f. Из условий теоремы следует, что v не инцидентна другим граням ранга не более 4 и инцидентна не более чем $d - 3$ граням ранга 5 (поскольку две соседние с f в окружении вершины v грани имеют ранг не менее 7). Если $d \ge 6$, то в результате применения правила R2 имеем $\mu_1(v) \ge \mu(v) - \frac{2}{3} - (d-3) \times \frac{1}{3} > (d-4) - d \times \frac{1}{3} = (d-6) \times \frac{2}{3} \ge 0$. Пусть $d = 5$. Если 3-грань f не является слабой, то по правилу R2 она получает от v заряд не более $\frac{1}{3}$. В этом случае имеем $\mu_1(v) \ge (5-4) - \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{3} = 0$. Если же f — слабая 3-грань, то в силу свойства (G2) вершина v не инцидентна другим слабым граням, поэтому $\mu_1(v) \ge (5-4) - \frac{2}{3} > 0$ согласно правилу R2.

Пусть вершина v не инцидентна треугольным граням в G. Если $d = 5$, то в силу свойства (G2) и правила R2 имеем $\mu_1(v) \ge (5-4) - \frac{2}{3} > 0$. Пусть $d \ge 6$. Обозначим через k число слабых 4-граней, инцидентных вершине v. Заметим, что если f — слабая 4-грань в окружении v, то следующая за ней по часовой стрелке инцидентная грань по условию теоремы имеет ранг не менее 6 и, следовательно, не получает заряда от v. Ясно, что число таких граней (инцидентных v и смежных со слабыми 4-гранями) не меньше k. Поэтому применение правила R2 дает

$$\mu_1(v) \ge \mu(v) - k \times \frac{2}{3} - (d - 2k) \times \frac{1}{3} = (d-4) - d \times \frac{1}{3} = (d-6) \times \frac{2}{3} \ge 0.$$

Рассмотрим грань $f \in F$ ранга r. Если $r = 3$, то $\mu(f) = -1$. Без ограничения общности будем считать, что $f = (x, y, t)$, где $d(x) \leq d(y) \leq d(t)$. Согласно свойству (G0) имеем $d(t) \geq 4$. Пусть грань f смежна по ребрам xy, xt и yt с гранями f_1, f_2 и f_3 (ранга не менее 7), соответственно. Если $d(x) = d(y) = 3$, то f — слабая 3-грань, которая отдает заряд $\frac{1}{3}$ каждой из вершин x, y по правилу R1. Если $d(t) = 4$, то f получает заряд $\frac{1}{3}$ от грани f_1 и по $\frac{2}{3}$ от каждой из граней f_2 и f_3 согласно правилу R3. В этом случае имеем $\mu_1(f) = -1 - 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = 0$. Если $d(t) \geq 5$, то f получает заряд $\frac{2}{3}$ от вершины t согласно R2 и по $\frac{1}{3}$ от каждой из граней f_1, f_2, f_3 согласно R3. Следовательно, $\mu_1(f) = -1 - 2 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 0$. Пусть $d(x) = 3$, $d(y) \geq 4$. Тогда грань f отдает заряд $\frac{1}{3}$ только вершине x по правилу R1. Если $d(y) = d(t) = 4$, то f получает заряд $\frac{2}{3}$ от грани f_3 и по $\frac{1}{3}$ от каждой из граней f_1, f_2 согласно R3. Следовательно, $\mu_1(f) = -1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$. Если $d(t) \geq 5$, то f получает заряд $\frac{1}{3}$ от вершины t согласно R2 и по $\frac{1}{3}$ от каждой из граней f_1, f_2, f_3 согласно R3. В этом случае имеем $\mu_1(f) \geq -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 0$. Наконец, при $d(x) \geq 4$ грань f не передает заряд по правилу R1 и получает по $\frac{1}{3}$ от каждой из граней f_1, f_2, f_3, что влечет $\mu_1(f) = -1 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

Пусть $r = 4$, тогда $\mu(f) = 0$. Допустим, что $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ — это слабая 4-грань, т.е. $d(v_i) = 3$ при $i = 1, 2, 3$, и f передает заряд $\frac{1}{3}$ каждой из вершин v_1, v_2, v_3 по правилу R1. В силу свойства (G1) имеем $d(v_0) \geq 5$. Поэтому грань f получает заряд $\frac{2}{3}$ от вершины v_0 по правилу R2. Кроме того, согласно R4 грань f получает по $\frac{1}{6}$ от каждой из граней, смежных с ней по ребрам v_0v_1 и v_0v_3. Таким образом, $\mu_1(f) = \mu(f) - 3 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 0$. Пусть f — неслабая 4-грань, тогда f инцидентна не более чем двум 3-вершинам. Если f инцидентна не более чем одной 3-вершине, то согласно правилам R1 и R4 имеем $\mu(f) \geq 0 - \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} > 0$. Пусть f инцидентна ровно двум 3-вершинам. Если эти вершины не смежны, то f получает от каждой смежной грани заряд $\frac{1}{6}$ по правилу R4. Следовательно, $\mu_1(f) = 0 - 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 0$. Пусть грань f инцидентна двум смежным 3-вершинам и двум смежным вершинам v_1, v_2 степени не менее 4. Тогда по правилу R4 грань f получает заряд $\frac{1}{3}$ от грани, смежной с ней по ребру v_1v_2, и заряд $2 \times \frac{1}{6}$ от двух других граней. В результате получаем $\mu_1(f) = 0 - 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 0$.

Пусть $r = 5$, тогда $\mu(f) = 1$. Если f — неслабая грань, то согласно правилу R1 имеем $\mu_1(f) \geq 1 - 3 \times \frac{1}{3} = 0$. В противном случае по свойству (G1) грань f инцидентна вершине степени не менее 5. При этом f отдает заряд $4 \times \frac{1}{3}$ по R1, но получает $\frac{1}{3}$ по R2, откуда $\mu_1(f) = 0$.

Пусть $f = (v_1, \ldots, v_r)$, где $r \geq 6$. По условию теоремы никакая 4-грань, смежная с f, не инцидентна треугольным вершинам. Поэтому передача заряда от грани f смежным 4-граням по правилу R4 эквивалентна тому, что f передает заряд $\frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{6}$ каждой нетреугольной вершине v_i степени не менее 4, а затем этот заряд равномерно распределяется между смежными с f 4-гранями, инцидентными вершине v_i. Таким образом, можно считать, что f не передает заряда 4-граням по правилу R4 и передает не более $\frac{1}{3}$ каждой инцидентной нетреугольной вершине (по правилу R1 или R4). Если $r = 6$, то грань f не смежна с треугольными гранями и вершинами, поэтому из сделанного замечания и правил R1, R4 следует, что $\mu_1(f) \geq (6 - 4) - 6 \times \frac{1}{3} = 0$.

Пусть $r \geq 7$. Из правил R1 и R3 следует, что если грань f смежна по ребру xy с треугольной гранью $g = (x, y, t)$, f суммарно отдает вершинам x, y и грани g заряд 1, если g является трудной гранью для f, и заряд не более $\frac{2}{3}$ в противном случае. Обозначим через m число треугольных граней, смежных с f. Так как никакие две треугольные грани не имеют общих вершин, то $m \leq r/2$ и грань f инцидентна в точности $r - 2m$ нетреугольным вершинам. Если $r \geq 8$, то из сделанных замечаний следует, что

$$\mu_1(f) \geq (r-4) - m \times 1 - (r-2m) \times \frac{1}{3} = \frac{2r}{3} - \frac{m}{3} - 4 \geq \frac{2r}{3} - \frac{r}{6} - 4 = \frac{r-8}{2} \geq 0.$$

Пусть $r = 7$, $\mu(f) = 3$. Если $m \leq 2$, то $\mu_1(f) \geq 3 - 2 \times 1 - (7 - 2 \cdot 2) \times \frac{1}{3} = 0$. Пусть $m = 3$. Тогда грань f инцидентна в точности одной нетреугольной вершине. Если хотя бы одна смежная с f треугольная грань не является трудной для f, то $\mu_1(f) \geq 3 - 2 \times 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Пусть f смежна с тремя трудными 3-гранями. Поскольку никакая 3-грань не имеет общих вершин с 4-гранями, то f не смежна с 4-гранями. Из свойства (G3) следует, что единственная нетреугольная вершина грани f имеет степень не менее 4. Следовательно, грань f передает заряд только треугольныи граням по правилу R3 и треугольным 3-вершинам по правилу R1. Таким образом, $\mu_1(f) = 3 - 3 \times 1 = 0$. Свойство (G4) и теорема 1 доказаны.

References

[1] M. Axenovich, T. Ueckerdt, P. Weiner, *Splitting planar graphs of girth 6 into two linear forests with short paths*, J. Graph Theory, **85**:3 (2017), 601–618. Zbl 1367.05044

[2] O.V. Borodin, A. Kostochka, M. Yancey, *On 1-improper 2-coloring of sparse graphs*, Discrete Math., **313**:22 (2013), 2638–2649. Zbl 1281.05060

[3] I. Broere, J.E. Dunbar, M. Frick, *A path(ological) partition problem*, Discuss. Math., Graph Theory, **18**:1 (1998), 113–125. Zbl 0912.05048

[4] I. Broere, P. Hajnal, P. Mihok, *Partition problems and kernels of graphs*, Discuss. Math., Graph Theory, **17**:2 (1997), 311–313. Zbl 0906.05059

[5] F. Bullock, J.E. Dunbar, M. Frick, *Path partitions and P_n-free sets*, Discrete Math., **289**:1-3 (2004), 145–155. Zbl 1056.05085

[6] J.E. Dunbar, M. Frick, *Path kernels and partitions*, J. Comb. Math. Comb. Comput., **31** (1999), 137–149. Zbl 0941.05040

[7] J.E. Dunbar, M. Frick, *The path partition conjecture is true for claw-free graphs*, Discrete Math., **307**:11-12 (2007), 1285–1290. Zbl 1121.05092

[8] M. Frick, *A survey of the path partition conjecture*, Discuss. Math. Graph Theory, **33**:1 (2013), 117–131. Zbl 1291.05062

[9] A.N. Glebov, *Splitting a planar graph of girth 5 into two forests with trees of small diameter*, Discrete Math., **341**:7 (2018), 2058—2067. Zbl 1387.05055

[10] A.N. Glebov, *Colouring planar graphs with bounded monochromatic components*, Sib. Électron. Math. Izv., **17** (2020), 513–520. Zbl 1440.05086

[11] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *Path partitions of planar graphs*, Sib. Électron. Math. Izv., **4** (2007), 450–459. Zbl 1132.05315

[12] A.N. Glebov, D.Zh. Zambalaeva, *Path partitioning planar graphs of girth 4 without adjacent short cycles*, Sib. Électron. Math. Izv., **15** (2018), 1040–1047. Zbl 1398.05070

[13] P. Hajnal, *Graph Partitions*, Thesis supervised by L. Lovász, (J.A. University, Szeged, 1984) (in Hungarian).

[14] S.L. Hakimi, E.F. Schmeichel, *On the number of cycles of length k in a maximal planar graph*, J. Graph Theory, **3** (1979), 69–86. Zbl 0395.05046

[15] J. Kim, A. Kostochka, X. Zhu, *Improper coloring of sparse graphs with a given girth, I: (0,1)-colorings of triangle-free graphs*, Eur. J. Comb., **42**:1 (2014), 26–48. Zbl 1297.05083

[16] L.S. Melnikov, I.V. Petrenko, *On path kernels and partitions of nondirected graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, **9**:2 (2002), 21–35. MR1929631

[17] P. Mihók, *Additive hereditary properties and uniquely partitionable graphs*, Graphs, hypergraphs and matroids, Proc. 5th Reg. Sci. Sess. Math., Zagań/Pol. 1985, (1985), 49–58. Zbl 0623.05043

[18] W.T. Tutte, *A theorem on planar graphs*, Trans. Am. Math. Soc., **82** (1956), 99–116. Zbl 0070.18403

[19] J. Vronka, *Vertex sets of graphs with prescribed properties*, Thesis supervised by P. Mihók, (P.J. Šafárik University, Košice, 1986) (in Slovak).

Aleksey Nikolaevich Glebov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: angle@math.nsc.ru