

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)  
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 517.956.224  
MSC 31A15

## ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЭНЕРГИИ НЕЙМАНА В ШАРЕ И КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

Е.Г. ПРИЛЕПКИНА AND А.С. АФАНАСЬЕВА-ГРИГОРЬЕВА

**ABSTRACT.** In this paper, we prove some exact estimates for the discrete Neumann energy of a ball and a circular ring in Euclidean space for points located on circles. The proofs are based on dissymmetrization and analysis of the asymptotic behavior of the Dirichlet integral of the potential function.

**Keywords:** discrete energy, Green's function, Neumann's function, dissymmetrization.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе  $\mathbb{R}^d$  будет означать  $d$ -мерное евклидово пространство точек  $\mathbf{x}$  вида  $(x_1, \dots, x_d)$  с обычной длиной и расстоянием,  $d \geq 2$ . В случае  $d = 2$  мы считаем, что  $\mathbb{R}^2$  является комплексной плоскостью. Решение классической проблемы Неймана в ограниченной области  $D \subset \mathbb{R}^d$  для уравнения Пуассона требует построения функции Неймана (иногда ее называют функцией Грина для проблемы Неймана или функцией Грина второго рода). Классическая функция Неймана определяется [1], [2] как функция  $\mathbf{x} \in D$  в области  $D \setminus \{\mathbf{y}\}$ , имеющая представление

$$(1) \quad N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D) = \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D)}{w_d}$$

PRILEPKINA, E.G., AFANASEVA-GRIGOREVA, A.S., OPTIMAL DISCRETE NEUMANN ENERGY IN A BALL AND A CIRCULAR RING .

© 2015 Прилепкина Е.Г., Афанасьева-Григорьева А.С..

Работа поддержана РФФИ (грант 20-01-00018) и Министерством образования и науки Российской Федерации (соглашение № 075-02-2021-1395).

Поступила , опубликована .

и удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D)}{\partial n_{\mathbf{x}}} = -\frac{1}{s_{d-1}(\partial D)},$$

$$\int_{\partial D} N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D) d\sigma_{\mathbf{x}} = 0.$$

Здесь  $\mu_d(\cdot)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа,  $(\mu_2(\rho) = -\log \rho, \mu_d(\rho) = \rho^{2-d}/(d-2)$  при  $d \geq 3)$ ,  $w_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — площадь единичной гиперсферы,  $v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D)$ — некоторая гармоническая в области  $D$  функция,  $s_{d-1}$ — мера Лебега и дифференцирование берется по внешней нормали.

Существует много исследований, связанных с экстремальными задачами для различных видов энергий дискретного заряда (см., например, работы [3], [4], [5] и ссылки в них). В [6] получены две оценки дискретной энергии функции Грина кругового кольца на плоскости в случае точек, расположенных на некоторой окружности. Эти результаты были распространены в евклидово пространство в [7]. Целью настоящей работы является получение результатов подобного сорта для функции Неймана.

Напомним определение дискретной энергии Грина [8]. Пусть  $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$  произвольный дискретный заряд (множество вещественных чисел), принимающий значение  $\delta_k$  в точке  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  области  $D$ . Энергией Грина этого заряда относительно области  $D$  называется величина

$$E(X, \Delta, D) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \delta_k \delta_l g_D(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l),$$

где  $g_D(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$  функция Грина области  $D$ . Аналогичным образом определим энергию Неймана

$$En(X, \Delta, D) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \delta_k \delta_l N(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, D).$$

Всюду далее область  $D$  является либо шаром вида  $\{|\mathbf{x}| < \tau\}$ , либо концентрическим круговым кольцом вида  $\{\tau_1 < |\mathbf{x}| < \tau_2\}$ . Примем следующие обозначения:  $B(\mathbf{a}, r)$ — открытый шар с центром в точке  $\mathbf{a}$  радиуса  $r$ ,  $J$ —  $(d-2)$ -мерная плоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = (0, 0, x_3, \dots, x_d)\}$ . Нам понадобятся цилиндрические координаты  $(r, \theta, \mathbf{x}')$  точки  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  в  $\mathbb{R}^d$ , связанные с декартовыми координатами соотношениями  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ,  $\mathbf{x}' \in J$ . Записи типа  $\{\theta = \varphi\}$  означают множество точек  $\mathbb{R}^d$ , имеющих полярные координаты  $(r, \varphi, \mathbf{x}')$ ,  $r \geq 0$ ,  $\mathbf{x}' \in J$ ,  $\varphi$  фиксировано.

Пусть  $\Omega = \{S\}$  означает множество, состоящее из конечного числа различных окружностей  $S$  вида  $S = \{(r_0, \theta, \mathbf{x}'_0) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , лежащих в области  $D$  (здесь  $r_0 > 0$  и  $\mathbf{x}'_0 \in J$  предполагается фиксированным). Для произвольных вещественных чисел  $\theta_j$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ ,

$$0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < 2\pi,$$

обозначим  $X = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^n$  множество точек пересечения окружностей из  $\Omega$  с полуплоскостями

$$L_j = \{(r, \theta, \mathbf{x}') : \theta = \theta_j\}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Обозначим также  $X^* = \{\mathbf{x}_k^*\}_{k=1}^n$  – множество точек пересечения окружностей из  $\Omega$  с симметричными полуплоскостями

$$L_j^* = \{(r, \theta, \mathbf{x}') : \theta = 2\pi j/m\}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Следующие теоремы показывают, что в зависимости от условий на заряд  $\Delta$  симметричная конфигурация дает как максимум, так и минимум энергии Неймана  $En(X, \Delta, D)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $D$  шар или круговое кольцо,  $\Omega$ ,  $X$  и  $X^*$  определены выше, заряд  $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$  принимает одинаковые значения  $\delta_k = \delta_l$  в точках  $\mathbf{x}_k \in X$  и  $\mathbf{x}_l \in X$ , расположенных на одной и той же окружности из  $\Omega$  и

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = 0.$$

Кроме того, пусть точки  $\mathbf{x}_k \in X$  и  $\mathbf{x}_k^* \in X^*$  лежат на одной и той же окружности из  $\Omega$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда

$$En(X, \Delta, D) \geq En(X^*, \Delta, D).$$

**Теорема 2.** Пусть  $D$  шар или круговое кольцо,  $\Omega$ ,  $X$ ,  $X^*$ ,  $\Delta$  определены выше,  $m$  – четное число и  $\delta_k = -\delta_l$  в точках  $\mathbf{x}_k \in X$  и  $\mathbf{x}_l \in X$ , лежащих на одной и той же окружности из  $\Omega$  и на соседних полуплоскостях из совокупности  $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$ . Тогда

$$En(X, \Delta, D) \leq En(X^*, \Delta, D),$$

где точки  $X^*$  пронумерованы следующим образом: если  $\mathbf{x}_k^* \in X^*$  лежит на пересечении окружности  $S$  из  $\Omega$  с полуплоскостью  $L_j^*$ , тогда соответствующая точка  $\mathbf{x}_k \in X$  должна лежать на пересечении  $S$  и полуплоскости  $L_j$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ .

Заметим, что полученные в работе теоремы справедливы и в случае, когда  $D$  означает область вращения (область  $D \subset \mathbb{R}^d$  называется областью вращения относительно оси  $J$ , если для любой точки  $(r, \theta, \mathbf{x}') \in B$  и любого  $\varphi$  точка  $(r, \varphi, \mathbf{x}')$  принадлежит  $D$ ).

При дополнительном условии

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k = 0$$

определим функцию

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}; X, D, \Delta) = \sum_{k=1}^n \delta_k N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k, D),$$

которую назовем потенциальной функцией Неймана конфигурации  $X, \Delta, D$ . Непосредственно из определения вытекает разложение потенциальной функции в окрестности точки  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,

$$(3) \quad u(\mathbf{x}) = \delta_k \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|)}{w_d} + a_k + o(1), \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_k,$$

где

$$a_k = \delta_k \frac{v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k, D)}{w_d} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \delta_l N(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k, D).$$

Сумма

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k a_k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \eta_{kl}(D) \delta_k \delta_l = En(X, \Delta, D) + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k, D)}{w_d}$$

представляет из себя квадратичную форму переменных  $\Delta$  с коэффициентами  $\eta_{kl}(D)$ , зависящими от функции Неймана. Обозначим эту квадратичную форму

$$(5) \quad Qn(X, \Delta, D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \eta_{kl}(D) \delta_k \delta_l,$$

где  $\eta_{kl}(D) = N(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, D)$ ,  $k \neq l$ ,  $\eta_{kk}(D) = v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, D)/w_d$ .

Квадратичные формы такого сорта, а также формы с коэффициентами, зависящими от функции Грина либо Робена, играют важную роль в геометрической теории функций. Различные неравенства для таких форм и их применения встречаются в работах Аленицина, Нехари, Дюрена, Шиффера, Дубинина и других математиков (см. [9], [10], [11], [12]). Мы доказываем, что

$$Qn(X, \Delta, D) \geq Qn(X^*, \Delta, D)$$

в условиях Теоремы 1 и

$$Qn(X, \Delta, D) \leq Qn(X^*, \Delta, D)$$

в условиях Теоремы 2. Для вычисления коэффициентов квадратичной формы  $Q_n$  при дополнительном условии (2) взамен классической можно использовать обобщенную функцию Неймана [13]. На плоскости известен явный вид формы  $Q_n$  круга и кольца. Функция Неймана единичного круга  $U$  [2]

$$N(z, z_0, U) = -\frac{\log |z - z_0| |1 - z\bar{z}_0|}{2\pi},$$

поэтому

$$\eta_{kl}(U) = -\frac{\log |z_k - z_l| |1 - z_k \bar{z}_l|}{2\pi}, \quad k \neq l,$$

$$\eta_{kk}(U) = -\frac{\log(1 - |z_k|^2)}{2\pi}.$$

В [13] приведены коэффициенты  $\eta_{kl}(K)$  квадратичной формы плоского кольца  $K = \{\mu < |z| < 1\}$ . А именно,

$$\eta_{kl}(K) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |\theta_1(i \log(z_k \bar{z}_l)/2; \mu) \theta_1(i \log(z_k/z_l)/2; \mu)|, & k \neq l, \\ \frac{1}{2\pi} \log \frac{4|z_k|^2 |\sin(i \log |z_k|)|}{(1 - |z_k|^2) |\theta_1(i \log |z_k|; \mu) \theta_1(0; \mu)|}, & k = l, \end{cases}$$

где

$$\theta_1(z; \mu) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \mu^{(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z}.$$

В пространстве размерности  $d \geq 3$  мы не нашли в литературе аналитического выражения функции Неймана кругового кольца. Для единичного шара  $U = B(0, 1)$  функция Неймана найдена в работе [2] и имеет вид

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, U) = \frac{1}{\omega_d} \left( \mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \mu_d \left( \left| x|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right| \right) + \epsilon_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) + Const,$$

где  $\epsilon_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  задается формулами

$$\epsilon_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \log \frac{2}{\left|1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \left|\mathbf{x}|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|\right|}, d = 3;$$

$$\epsilon_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}} \arctan \frac{\sqrt{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}}{1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})} - \log \left|\mathbf{x}|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|, d = 4;$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \log \frac{2}{\left|1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \left|\mathbf{x}|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|\right|} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(2k-1)} \left( \left|\mathbf{x}|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|^{1-2k} - 1 \right) \\ & + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-k-1} \frac{2^i(k+i-1)!(2k-3)!!}{(k-1)!(2k+2i-1)!!} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\mathbf{x}|^{2i}|\mathbf{y}|^{2i}}{(|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2)^{i+1}} \left( \frac{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|^{2k-1}} + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right), \\ & d \geq 5, d = 2p + 1, p \geq 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & -\log \left|\mathbf{x}|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right| + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{2k} \left( \left|\mathbf{x}|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|^{-2k} - 1 \right) \\ & + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \arctan \frac{\sqrt{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}}{(1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y}))} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{|\mathbf{x}|^{2k}|\mathbf{y}|^{2k}}{(|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2)^{k+\frac{1}{2}}} \\ & + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-k-1} \frac{(2k+2i-1)!!(k+1)!}{2^{i+1}(2k-1)!!(k+i)!} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\mathbf{x}|^{2i}|\mathbf{y}|^{2i}}{(|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2)^{i+1}} \left( \frac{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}| - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|^{2k}} - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right), \\ & d \geq 6, d = 2p + 2, p \geq 2; \end{aligned}$$

$$0! = 1, (-1)!! = 1.$$

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Обозначим символом  $D_r$  область, полученную удалением из  $D$  шаров с центром  $\mathbf{x}_k$  радиуса  $r$ ,  $D_r = D \setminus (\cup_{k=1}^n B(\mathbf{x}_k, r))$ . Тогда для интеграла Дирихле  $I(u, D_r) = \int_{D_r} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}$  потенциальной функции справедлива асимптотическая формула [14, Лемма 2.1], [15, Лемма 1]

$$(6) \quad I(u, D_r) = \left( \sum_{k=1}^n \delta_k^2 \right) \frac{\mu_d(r)}{w_d} + En(X, \Delta, D) + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k, D)}{w_d} + o(1), \quad r \rightarrow 0,$$

или

$$(7) \quad I(u, D_r) = \left( \sum_{k=1}^n \delta_k^2 \right) \frac{\mu_d(r)}{w_d} + \sum_{k=1}^n \delta_k a_k + o(1), \quad r \rightarrow 0.$$

Функцию  $v(\mathbf{x})$  назовем допустимой для  $D, X, \Delta$ , если  $v(\mathbf{x}) \in \text{Lip}$  в окрестности каждой точки  $D$  за исключением, может быть, конечного числа точек, непрерывна в  $\overline{D} \setminus \cup_{k=1}^n \{\mathbf{x}_k\}$ , и в окрестности  $\mathbf{x}_k$  справедливо разложение

$$(8) \quad v(\mathbf{x}) = \delta_k \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|)}{w_d} + b_k + o(1), \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_k.$$

Для допустимой функции  $v$  и потенциальной функции  $u$  мы имеем асимптотику [14, Лемма 2.2], [12, Лемма 2]

$$(9) \quad I(v - u, D_r) = I(v, D_r) - I(u, D_r) - 2 \sum_{k=1}^n \delta_k (b_k - a_k) + o(1), \quad r \rightarrow 0.$$

Пусть  $u_1(\mathbf{x})$  потенциальная функция Неймана набора  $X, \Delta$ ,  $u_2(\mathbf{x})$  потенциальная функция Неймана набора  $X^*, \Delta$ , и  $Dis$  означает диссимметризацию, описанную в доказательстве Теоремы 1 работы [7]. Построим в области  $D$  функцию  $v(\mathbf{x})$  по правилу

$$v(\mathbf{x}) = u_2(Dis^{-1}(\mathbf{x})).$$

В силу симметричности конфигурации  $X^*, \Delta$ ,  $D$  функция  $u_2(\mathbf{x})$  инварианта относительно любого отображения из группы симметрий  $\varphi \in \Phi$ , участвующих в определении диссимметризации  $Dis$ . Поэтому  $v(\mathbf{x})$  определена однозначно и является допустимой для  $X, \Delta$ . Так как диссимметризация является, по сути, специальной перестановкой углов, то

$$I(v, D_r) = I(u_2, D_r^*),$$

где  $D_r^* = D \setminus (\cup_{k=1}^n \overline{B(\mathbf{x}_k^*, r)})$ . Из (7), (9) следует

$$(10) \quad 0 \leq I(v, D_r) - I(u_1, D_r) - 2 \sum_{k=1}^n \delta_k (b_k - a_k) + o(1) =$$

$$I(u_2, D_r) - I(u_1, D_r) - 2 \sum_{k=1}^n \delta_k (b_k - a_k) + o(1) = \sum_{k=1}^n \delta_k (a_k - b_k) + o(1), \quad r \rightarrow 0,$$

$$(11) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k b_k \leq \sum_{k=1}^n \delta_k a_k.$$

Здесь  $b_k$  коэффициенты асимптотического разложения потенциальной функции симметричной конфигурации,  $a_k$  — не симметричной. С учетом (4), получаем

$$(12) \quad En(X^*, \Delta, D) + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{x}_k^*, D)}{w_d} \leq En(X, \Delta, D) + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k, D)}{w_d}.$$

Поскольку  $D$  является шаром или кольцом,  $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}, D) = v(\mathbf{y}, \mathbf{y}, D)$  для любых двух точек  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , принадлежащих одной и той же окружности  $S$  из  $\Omega$ . Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{x}_k^*, D)}{w_d} = \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k, D)}{w_d}.$$

Таким образом, неравенство (12) доказывает Теорему 1.

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

Докажем сперва вспомогательную лемму.

**Лемма 1.** Пусть  $Y = \{\mathbf{y}_q\}_{q=1}^l$  совокупность точек, лежащих на полуплоскости  $\{\theta = 0\}$ ,  $\Delta_0 = \{\sigma_q\}_{q=1}^l$  некоторый заряд,  $0 < \alpha < \pi$ ,  $D(\alpha) = D \cap \{0 < \theta < \alpha\}$ ,  $\Gamma(\alpha) = \partial D(\alpha) \cap \{\theta = \alpha\}$  либо  $D(\alpha) = D \cap \{-\alpha < \theta < 0\}$ ,  $\Gamma(\alpha) =$

$\partial D(\alpha) \cap \{\theta = -\alpha\}$ . Рассмотрим функцию  $h_\alpha(\mathbf{x})$ , гармоническую в  $D(\alpha)$  за исключением точек  $Y$ , непрерывную в  $\overline{D(\alpha)} \setminus Y$ , равную нулю на  $\Gamma(\alpha)$ , имеющую нулевую производную на оставшейся части границы  $\partial D(\alpha) \setminus Y$  и в окрестности точек  $\mathbf{y}_q$  удовлетворяющую разложению

$$(13) \quad h_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_q \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_q|)}{w_d} + c_q(\alpha) + o(1), \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_q,$$

Тогда функция

$$f(\alpha) = \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q(\alpha)$$

вогнута на  $0 < \alpha < \pi$  как функция от  $\alpha$ .

*Доказательство.* Вне области  $\overline{D(\alpha)}$  мы полагаем, что функция  $h_\alpha$  доопределена нулем. В терминах работ [14], [15] функция  $h_\alpha(\mathbf{x})$  называется потенциальной функцией набора  $D(\alpha)$ ,  $\Gamma(\alpha)$ ,  $Y$ ,  $\Delta_0$ . Повторяя доказательство леммы 2.1 работы [14] получим разложение

$$(14) \quad I(h_\alpha, D(\alpha)_r) = \frac{1}{2} \left( \sum_{q=1}^l \sigma_q^2 \right) \frac{\mu_d(r)}{w_d} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q(\alpha) + o(1), r \rightarrow 0.$$

Для  $0 < \alpha < \beta < \pi$  построим в области  $D((\alpha + \beta)/2)$  функцию  $v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x})$  по правилу

$$v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x}) = \frac{h_\alpha(\mathbf{x}) + h_\beta(\mathbf{x}) - h_\beta(\mathbf{x}^*)}{2},$$

где  $\mathbf{x}^*$  означает точку, симметричную  $\mathbf{x}$  относительно полуплоскости  $\{\theta = (\alpha + \beta)/2\}$  (либо  $\{\theta = -(\alpha + \beta)/2\}$ ). Функция  $v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x})$  допустима для  $D((\alpha + \beta)/2)$ ,  $\Gamma((\alpha + \beta)/2)$ ,  $Y$ ,  $\Delta_0$  и имеет разложение

$$(15) \quad v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x}) = \sigma_q \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_q|)}{w_d} + \frac{c_q(\alpha) + c_q(\beta)}{2} + o(1), \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_q.$$

Применяя аналог формулы (9) (см. доказательство [15, Лемма 2], [14, Лемма 2.2]), получим

$$(16) \quad 0 \leq I(v_{(\alpha+\beta)/2}, D((\alpha + \beta)/2)_r) - I(h_{(\alpha+\beta)/2}, D((\alpha + \beta)/2)_r) - \sum_{q=1}^l \sigma_q \left( \frac{c_q(\alpha) + c_q(\beta)}{2} - c_q \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right) + o(1), r \rightarrow 0.$$

Из определения функции  $v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x})$  и свойства модуля вектора  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \leq 2(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2)$  вытекает

$$(17) \quad I(v_{(\alpha+\beta)/2}, D((\alpha + \beta)/2)_r) \leq \frac{1}{2} \int_{D((\alpha+\beta)/2)} (|\nabla(h_\alpha(\mathbf{x}) - h_\beta(\mathbf{x}^*))|^2) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{D((\alpha+\beta)/2)} |\nabla h_\beta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{D(\alpha)} |\nabla h_\alpha(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{D(\beta)} |\nabla h_\beta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Из (14), (16), (17) следует

$$\sum_{q=1}^l \sigma_q c_q(\alpha) + \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q(\beta) \leq 2 \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

или

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Последнее неравенство и означает вогнутость функции  $f(\alpha)$ . Лемма доказана.  $\square$

Перейдем теперь к доказательству Теоремы 2. Заметим, что условия теоремы гарантируют, что  $\sum_{k=1}^n \delta_k = 0$ . Будем считать, что  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_m = 2\pi$ . Обозначим

$$\begin{aligned} B_j &= D \cap \{\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}\}, \\ B_j^+ &= D \cap \{\theta_j \leq \theta \leq \frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2}\}, \quad B_j^- = D \cap \{\frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2} \leq \theta \leq \theta_{j+1}\}, \\ \alpha_j &= \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{2}, \end{aligned}$$

$j = 0, \dots, m-1$ . Пусть  $Y = \{y_q\}_{q=1}^l$ ,  $\Delta_0 = \{\sigma_q\}_{q=1}^l$  — это точки из  $X$  и соответствующие им заряды ( $\sigma_q = \delta_k$  если  $y_q = x_k$ ), лежащие на  $\{\theta = 0\}$ . Функцию  $h_\alpha(\mathbf{x})$  из Леммы 1, определяемую множеством  $Y$ , зарядом  $\Delta_0$  и областью  $D(\alpha) = D \cap \{0 < \theta < \alpha\}$ , обозначим  $h_\alpha^1(\mathbf{x})$ . Аналогично пусть  $h_\alpha^2(\mathbf{x})$  определяется набором  $Y$ ,  $-\Delta_0 = \{-\sigma_q\}_{q=1}^l$  и  $D(\alpha) = D \cap \{0 < \theta < \alpha\}$ ,  $h_\alpha^3(\mathbf{x})$  — набором  $Y$ ,  $-\Delta_0$  и  $D(\alpha) = D \cap \{-\alpha < \theta < 0\}$ , и  $h_\alpha^4(\mathbf{x})$  — набором  $Y$ ,  $\Delta_0$  и  $D(\alpha) = D \cap \{-\alpha < \theta < 0\}$ . Константу из разложения (13) функции  $h_\alpha^p(\mathbf{x})$  обозначим  $c_q^p(\alpha)$ ,  $p = 1, 2, 3, 4$ . Определим функции

$$\begin{aligned} \psi_j^+(\mathbf{x}) &= h_{\alpha_j}^1(\theta_j(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in B_j^+, \quad j = 0, 2, \dots, m-2, \\ \psi_j^+(\mathbf{x}) &= h_{\alpha_j}^2(\theta_j(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in B_j^+, \quad j = 1, 3, \dots, m-1, \\ \psi_j^-(\mathbf{x}) &= h_{\alpha_j}^3(\theta_{j+1}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in B_j^-, \quad j = 0, 2, \dots, m-2, \\ \psi_j^-(\mathbf{x}) &= h_{\alpha_j}^4(\theta_{j+1}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in B_j^-, \quad j = 1, 3, \dots, m-1, \end{aligned}$$

где обозначение  $\varphi(\mathbf{x})$  означает поворот на угол  $\varphi$  (а именно  $\varphi(\mathbf{x}) = (r, \theta - \varphi, \mathbf{x}')$ , если  $\mathbf{x} = (r, \theta, \mathbf{x}')$ ). В области  $B_j$ ,  $j = 0, \dots, m-1$  зададим функции

$$\psi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi_j^+(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_j^+, \\ \psi_j^-(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_j^-, \\ 0, & \mathbf{x} = (r, (\theta_j + \theta_{j+1})/2, x'). \end{cases}$$

По построению функция  $\psi_j(\mathbf{x})$  гармоническая в  $B_j$ , имеет нулевую производную по нормали на границе  $\partial B_j$  (за исключением точек  $X$ ), и разложение типа (8) в окрестности точек  $X \cap \overline{B_j}$ . Пусть  $u(\mathbf{x})$  потенциальная функция Неймана набора  $X$ ,  $\Delta$ , и  $\sum^j \delta_k a_k$  означает суммирование тех слагаемых  $\delta_k a_k$ , которые соответствуют точкам  $x_k \in \overline{B_j}$ . Повторяя доказательство Леммы 2.2 [14], получим

$$(18) \quad 0 \leq I(u, (B_j)_r) - I(\psi_j, (B_j)_r) - \sum_{k=1}^j \delta_k a_k + \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^1(\alpha_j) + \sum_{q=1}^l (-\sigma_q) c_q^3(\alpha_j) + o(1), \quad j = 0, \dots, m-2,$$

(19)

$$0 \leq I(u, (B_j)_r) - I(\psi_j, (B_j)_r) - \sum_{k=1}^j \delta_k a_k + \sum_{q=1}^l (-\sigma_q) c_q^2(\alpha_j) + \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^4(\alpha_j) + o(1),$$

$$j = 1, \dots, m-1.$$

Чтобы получить неравенство

$$(20) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k a_k \leq \frac{1}{2} \sum_{j=0, \dots, m-2} \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^1(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0, \dots, m-2} \sum_{q=1}^l (-\sigma_q) c_q^3(\alpha_j)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1, \dots, m-1} \sum_{q=1}^l (-\sigma_q) c_q^2(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1, \dots, m-1} \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^4(\alpha_j),$$

мы просуммируем неравенства (18), (19) по всем  $j = 0, \dots, m-1$ , применим разложение (7) и равенства

$$I(\psi_j, (B_j)_r) = \sum_{q=1}^l \sigma_q^2 \frac{\mu_d(r)}{w_d} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^1(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^l (-\sigma_q) c_q^3(\alpha_j) + o(1),$$

$$j = 0, \dots, m-2,$$

$$I(\psi_j, (B_j)_r) = \sum_{q=1}^l \sigma_q^2 \frac{\mu_d(r)}{w_d} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^l (-\sigma_q) c_q^2(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^4(\alpha_j) + o(1),$$

$$j = 1, \dots, m-1,$$

$$m \sum_{q=1}^l \sigma_q^2 = \sum_{k=1}^n \delta_k^2,$$

а также учтем тот факт, что каждая точка  $\mathbf{x}_k \in X$  принадлежит двум замкнутым областям  $\bar{B}_j$ . Далее отметим, что из данного в Лемме 1 определения  $h_\alpha(\mathbf{x})$  вытекают равенства  $h_\alpha^1(\mathbf{x}) = -h_\alpha^2(\mathbf{x})$ ,  $h_\alpha^3(\mathbf{x}) = -h_\alpha^4(\mathbf{x})$ . Следовательно,

$$\sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^1(\alpha_j) = \sum_{q=1}^l (-\sigma_q) c_q^2(\alpha_j), \quad \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^4(\alpha_j) = \sum_{q=1}^l (-\sigma_q) c_q^3(\alpha_j).$$

Кроме того, в области  $B(\alpha) = D \cap \{-\alpha < \theta < \alpha\}$  существует единственная гармоническая (за исключением точек  $Y$ ) функция с разложением (13) в окрестности  $\mathbf{y}_q$ ,  $q = 1, \dots, l$ , равная нулю на  $\partial B(\alpha) \cap (\{\theta = \alpha\} \cup \{\theta = -\alpha\})$  и имеющая нулевую нормальную производную на оставшейся части границы  $\partial B(\alpha)$ . Указанная функция совпадает с  $h_\alpha^1(\mathbf{x})$  в области  $D \cap \{0 < \theta < \alpha\}$ , и с функцией  $h_\alpha^4(\mathbf{x})$  в области  $D \cap \{-\alpha < \theta < 0\}$ . Поэтому  $c_q^1(\alpha) = c_q^4(\alpha)$  и неравенство (20) принимает вид

$$(21) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k a_k \leq \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q^1(\alpha_j) = \sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_j).$$

Из (21), установленной в Лемме 1 вогнутости функции  $f(\alpha)$  и равенства  $\sum_{j=1}^m \alpha_j = \pi$ , мы получим неравенство

$$(22) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k a_k \leq \sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_j) \leq mf \left( \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j}{m} \right) = mf \left( \frac{\pi}{m} \right).$$

Пусть теперь  $u^*(\mathbf{x})$  потенциальная функция Неймана набора  $X^*$ ,  $\Delta$  и  $a_k^*$  означают соответствующие константы из асимптотического разложения. Повторяя вышеприведенное доказательство с заменой  $X$  на  $X^*$  нетрудно убедиться, что во всех неравенствах выполняется знак равенства и

$$(23) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k a_k^* = mf \left( \frac{\pi}{m} \right).$$

Таким образом, неравенство (23) означает

$$(24) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k a_k \leq \sum_{k=1}^n \delta_k a_k^*.$$

Как было отмечено в доказательстве Теоремы 1, (24) эквивалентно требуемому утверждению.

#### REFERENCES

- [1] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis*, 3, Wiley-Interscience, New York, 1986.
- [2] M.A. Sadybekov and B.T. Torebek and B.Kh. Turmetov, *Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball*, Complex Variables and Elliptic Equations, **61**:1 (2015), 104–123. DOI: 10.1080/17476933.2015.1064402
- [3] J.S. Brauchart, D.P. Hardin, E.B. Saff, *The Riesz energy of the  $N$ th roots of unity: an asymptotic expansion for large  $N$* , Bulletin of the London Mathematical Society, **41**:4 (2009), 621–633. DOI: 10.1112/blms/bdp034
- [4] S.V. Borodachov, D.P. Hardin, E.B. Saff, *Discrete Energy on Rectifiable Sets*, Springer Monographs in Mathematics, 2019. DOI: 10.1007/978-0-387-84808-2
- [5] J.S. Brauchart, D.P. Hardin, E.B. Saff, *The next-order term for optimal Riesz and logarithmic energy asymptotics on the sphere*, Contemp. Math, **578** (2012), 31–61. DOI: 10.1090/conm/578
- [6] V.N. Dubinin *Green energy and extremal decompositions*, Probl. Anal. Issues Anal., **8** (26):3 (2019), 8–44. DOI: 10.15393/j3.art.2019.6730
- [7] V.N. Dubinin, E.G. Prilepkina, *Optimal Green energy points on the circles in  $d$ -space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **499**:2 (2021) (Article 125055). DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125055
- [8] N.S. Landkoff, *Foundations of Modern Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [9] Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **75**:2 (1953), 256–286. <https://www.ams.org/journals/tran/1953-075-02/S0002-9947-1953-0056704-1/>
- [10] P. Duren and M. M. Schiffer, *Robin functions and energy functionals of multiply connected domains*, Pacific J. Math., **148**:2 (1991), 251–273. <https://msp.org/pjm/1991/148-2/pjm-v148-n2-p05-p.pdf>
- [11] V. N. Dubinin, *Quadratic forms involving Green's and Robin functions*, Sb. Math., **200**:10 (2009), 1439–1452. DOI: 10.1070/SM2009v200n10ABEH004044
- [12] E. G. Prilepkina, *On quadratic forms generated by the Neumann functions*, J. Math. Sci. (N. Y.), **207**:6 (2015), 909–922. DOI: 10.1007/s10958-015-2414-5
- [13] D.B. Karp and E. Prilepkina, *Reduced modulus with free boundary and its applications*, Annales Academia Scientiarum Fennica, **34**:2 (2009), 353–378. <http://www.acadsci.fi/mathematica/Vol34/vol34pp353-378.pdf>

- [14] K.A. Gulyaeva, S.I. Kalmykov, E.G. Prilepkina, *Extremal decomposition problems in the Euclidean space*. International Journal of Mathematical Analysis **9**:56 (2015) 2763–2773. DOI: 10.12988/ijma.2015.510259
- [15] V. N. Dubinin, E. G. Prilepkina, *On the preservation of generalized reduced modulus under some geometric transformations of domains in the plane*, Dal'nevost. Mat. Zh., **6**:1-2 (2005), 39–56. <http://www.mathnet.ru/links/3b1e66e3e479c268ce9d00cb3b36164c/dvmg197.pdf>

ELENA GUMAROVNA PRILEPKINA  
FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,  
10, AJAX BAY, RUSSKY ISLAND,  
690922, VLADIVOSTOK, RUSSIA  
*Email address:* pril-elena@yandex.ru

ELENA GUMAROVNA PRILEPKINA  
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS, FEBRAS,  
7, RADIO STREET,  
690041, VLADIVOSTOK, RUSSIA  
*Email address:* pril-elena@yandex.ru

ANNA SERGEEVNA AFANASEVA-GRIGOREVA  
FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,  
10, AJAX BAY, RUSSKY ISLAND,  
690922, VLADIVOSTOK, RUSSIA  
*Email address:* a.s.afanasevagrigureva@yandex.ru