S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 931–950 (2021) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2021.18.071 MSC 35A05

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

Abstract. The problem of one-dimensional unsteady motion of a heat-conducting viscous compressible multifluid (mixture of perfect gases) on a bounded interval is considered, and the viscosity matrix is not assumed to be diagonal. The first step is made in proving the solvability of this problem: the local solvability of the approximate problem (for the Galerkin approximations) is shown.

Keywords: multicomponent viscous perfect gas, existence theorem, Galerkin method.

1. Введение

Математическая теория движения многокомпонентных жидкостей/газов (смесей жидкостей/газов) в последние два десятилетия получила значительное развитие. Тем не менее, в этой теории еще не решен ряд важных вопросов. Один из них — это разрешимость краевых задач о движении многокомпонентных теплопроводных газов. Это касается как многомерных движений (для которых можно рассчитывать на разрешимость в классе слабых решений), так и одномерных, для которых естественно стремиться к доказательству существования сильных и гладких решений, их единственности, изучению качественных

Mamontov, A.E., Prokudin, D.A., Local solvability of an approximate problem for one-dimensional equations of dynamics of viscous compressible heat-conducting multifluids.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2020-23) (гос. задание FZMW-2020-0008 от 24.01.2020), одобренного в рамках конкурсного отбора научных проектов, выполняемых научными коллективами исследовательских центров и/или научных лабораторий образовательных организаций высшего образования.

Поступила 15 июля 2021 г., опубликована 6 сентября 2021 г.

свойств и т. д. Ожидаемые результаты являются аналогами таковых, полученных для однокомпонентных жидкостей/газов в 1970-90-е гг. (в одномерном случае) — см. например [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Несмотря на указанную аналогичность, прямой перенос результатов тут невозможен из-за принципиально иной структуры вязких членов — наличия (недиагональной) матрицы вязкостей. Результаты, полученные ранее для смесей (см. например [12], [13]), касались только случая диагональной матрицы.

В настоящей работе рассматривается задача об одномерном нестационарном движении теплопроводной смеси вязких сжимаемых жидкостей (совершенных газов) на ограниченном интервале, причем матрица вязкостей не предполагается диагональной. Делается первый шаг в доказательстве разрешимости этой задачи — показана локальная разрешимость приближенной задачи (для галеркинских приближений). В следующей работе планируется получить необходимые оценки и доказать глобальное существование как приближенных решений, так и (после предельного перехода) решений исходной задачи.

Отметим, что близкий к современному обзор одномерных результатов по смесям можно найти в [14], а аналогичные баротропные (нетеплопроводные) задачи рассмотрены в [15], [16].

2. Формулировка дифференциальных законов сохранения

Движение в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ смеси из $N \geqslant 2$ вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей с течением времени $t \in [0, T]$, $T = \mathrm{const} > 0$, описывается следующей системой уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial (\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i \boldsymbol{u}_i\right) + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{N} p_i \boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.1)–(2.3) представляют собой соответственно математические формулировки законов сохранения массы для каждой компоненты, законов сохранения импульса для каждой компоненты и закона сохранения полной энергии для смеси. Здесь $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты; $\rho = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_i$ — суммарная плотность; $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й компоненты; $\mathcal{E}_i = \dfrac{\rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i$ — полная энергия i-й компоненты, где e_i — внутренняя удельная энергия i-й компоненты;

$\mathcal{E} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i$ — суммарная полная энергия; p_i — давление в i-й компоненте;

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_i &= \sum_{j=1}^{N} \left((\lambda_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j)\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left((\eta_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij} \left(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\mathrm{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} \right) \right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

— вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left((\nabla \otimes \boldsymbol{v}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{v})^*\right)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{v}$ (верхний индекс $*$ означает транспонирование), а числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij}, μ_{ij} и η_{ij} образуют следующие матрицы:

$$\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} > 0, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{N}, \quad \mathbf{H} = \{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^{N} = \boldsymbol{\Lambda} + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0, \tag{2.5}$$

откуда в частности следует, что

$$\mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} = \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0; \tag{2.6}$$

далее,

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, N \tag{2.7}$$

— приток импульса в i-ю компоненту из остальных компонент; $\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту;

$$\boldsymbol{q} = -k(\theta)\nabla\theta \tag{2.8}$$

— суммарный тепловой поток, где $\theta > 0$ — температура смеси, k — теплопроводность; наконец, g — плотность тепловых источников внешней среды.

Система (2.1)–(2.3) описывает достаточно произвольные движения смесей, включая случаи когда компоненты смеси плохо перемешаны, и потому их скорости, концентрации и давления отличаются существенно от равновесных значений. Единственное предположение о равновесности, уже наложенное в приведенной модели, состоит в гипотезе о равенстве температур фаз, благодаря чему нет необходимости записывать уравнения энергии для каждой компоненты, и можно обойтись одним уравнением (2.3).

3. Приближенные дифференциальные законы сохранения

Предположим, что[1]

(1) $\mathrm{div}(\rho_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v})) = 0$ в уравнениях (2.1), где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j \boldsymbol{u}_j$ — средневзвешенная скорость, $\beta_i = \mathrm{const} \in (0, 1)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j = 1$;

[1]В рамках приведенных предположений движение смеси в значительной степени характеризуется усредненными и/или суммарными характеристиками (скоростью $\boldsymbol{v}$, плотностью ρ, давлением p, температурой θ), однако нас интересуют также и отдельные плотности ρ_i и скорости $\boldsymbol{u}_i$ компонент.

(2) $\mathrm{div}(\rho_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{J}_i + \nabla(p_i - \beta_i p) = 0$ в уравнениях (2.2), где $p = \sum_{j=1}^{N} p_j$ — суммарное давление;

(3) $\mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}) + \sum_{i=1}^{N}(p_i - \beta_i p)\boldsymbol{u}_i\right) = 0$ в уравнениях (2.3).

В результате получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho_i \boldsymbol{v}) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \beta_i \nabla p = \mathrm{div}\,\mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\mathcal{E}\boldsymbol{v}) + \mathrm{div}\left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + p\boldsymbol{v}\right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g \tag{3.3}$$

для $N+1$ скалярных (ρ_i, $i = 1, \ldots, N$, и θ) и N векторных ($\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$) — т. е. всего $4N+1$ скалярных — неизвестных функций, при условии, что p и e_i, $i = 1, \ldots, N$, каким-то образом заданы как функции от $\rho_1, \ldots, \rho_N, \theta$.

Замечание 1. *Уравнения* (3.1)–(3.3) *допускают эквивалентную запись*

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_i + \rho_i \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.4}$$

$$\rho_i \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} + \beta_i \nabla p = \mathrm{div}\,\mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{N} \left(\rho_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + e_i\right) + \rho_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla \left(\frac{|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + e_i\right)\right) + \\ + \mathrm{div}\left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + p\boldsymbol{v}\right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g \end{gathered} \tag{3.6}$$

($(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_i$), *в которой виден общий для всех уравнений системы оператор материальной производной* $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$.

Замечание 2. *Из* (3.1) *и* (3.2) *вытекает уравнение баланса кинетической энергии для каждой компоненты смеси*

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \mathrm{div}\left(\frac{\rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2}{2} \boldsymbol{v}\right) + \beta_i \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla p = \\ = \boldsymbol{u}_i \cdot \mathrm{div}\,\mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Поэтому, уравнение энергии (3.3) *можно записать в следующей эквивалентной форме:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{N} \rho_i e_i + \mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{N} \rho_i e_i \boldsymbol{v}\right) + p\mathrm{div}\boldsymbol{v} + \mathrm{div}\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + \rho g. \tag{3.8}$$

4. Определяющие соотношения и уравнения для температуры и энтропии

Предположим, что $p_i = p_i(\rho_i, \theta)$, $e_i = e_i(\rho_i, \theta)$, $s_i = s_i(\rho_i, \theta)$, $i = 1, \dots, N$, где s_i — удельная энтропия i-й компоненты. Определяющие уравнения, связывающие термодинамические параметры между собой, обязаны удовлетворять определенным ограничениям, в частности, соотношениям Гиббса

$$\theta ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right), \quad i = 1, \dots, N, \tag{4.1}$$

что эквивалентно соотношениям Максвелла

$$\rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} = p_i - \theta \frac{\partial p_i}{\partial \theta}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{4.2}$$

Кроме того, должны выполняться условия термодинамической устойчивости

$$\frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \theta} > 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{4.3}$$

Теперь уравнение (3.3)=(3.8) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial e_i}{\partial \theta}\left(\frac{\partial(\rho_i\theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i\theta \boldsymbol{v})\right) + \operatorname{div}\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \theta\frac{\partial p}{\partial \theta}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \rho g, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{N} \rho_i s_i + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N} \rho_i s_i \boldsymbol{v}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla\theta}{\theta^2} + \frac{\rho g}{\theta}. \tag{4.5}$$

5. Частный вид определяющих уравнений

Будем предполагать, что выполнены уравнения состояния идеального газа

$$p_i(\rho_i, \theta) = R_i\rho_i\theta, \quad e_i(\rho_i, \theta) = c_i\theta, \quad i = 1, \dots, N, \tag{5.1}$$

где $R_i > 0$ — газовая постоянная i–ой компоненты, $R_i = \dfrac{R}{M_i}$, M_i — молярная масса i–ой компоненты, R — универсальная газовая постоянная, $c_i > 0$ — удельная теплоемкость i–ой составляющей, $c_i = \dfrac{\nu_i R_i}{2}$, где ν_i — число степеней свободы молекул. При этом условия (4.2)–(4.3) очевидно выполнены. Из (4.1) находим

$$s_i(\rho_i, \theta) = \ln\left(\frac{\theta^{c_i}}{\rho_i^{R_i}}\right) + s_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{5.2}$$

где s_{0i} — произвольные постоянные. Уравнение (4.4) в этом случае примет следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho_c\theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_c\theta\boldsymbol{v}) + \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \theta\rho_R\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + \rho g, \tag{5.3}$$

где $\rho_c = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j\rho_j$, $\rho_R = \sum\limits_{j=1}^{N} R_j\rho_j$.

Замечание 3. *И с физической точки зрения, и с математических позиций необходимо обеспечить неотрицательность производства энтропии. Общая энтропия системы*

$$S=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i s_i d\boldsymbol{x} \tag{5.4}$$

должна не убывать со временем в случае ее термодинамической замкнутости. Из (2.8), (4.5) *и условий* $\boldsymbol{u_i}|_{\partial\Omega}=0$, $i=1,\ldots,N$, $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0$, *где* $\partial\Omega$ — *граница области* Ω, $\boldsymbol{n}$ — *вектор единичной внешней нормали к* Ω, *получаем*

$$\frac{dS}{dt}=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}\frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2}d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}\frac{\rho g}{\theta}d\boldsymbol{x}. \tag{5.5}$$

Таким образом, достаточно потребовать выполнения условия

$$k\geqslant 0, \tag{5.6}$$

а также следующего условия для тензоров вязких напряжений:

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\geqslant 0. \tag{5.7}$$

Однако в рамках условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (2.5), *выполнение* (5.7) *очевидно, ввиду равенства*

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)=\sum_{i,j=1}^{N}\Big(\eta_{ij}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)+\\ +2\mu_{ij}\Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)-\frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\mathbb{I}\Big):\Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j)-\frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}\Big)\Big).\end{gathered} \tag{5.8}$$

Кроме того из условий (2.5) (*см.* (2.6)), *в силу* $\boldsymbol{u_i}|_{\partial\Omega}=0$, $i=1,\ldots,N$, *следует важное неравенство*

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x}\geqslant B_0\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} \tag{5.9}$$

с некоторой положительной постоянной $B_0=B_0(\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M})$.

6. Постановка начально-краевой задачи

В области $Q_T=(0,T)\times(0,1)$ рассмотрим систему уравнений для определения функций $(\rho_1,\ldots,\rho_N,u_1,\ldots,u_N,\theta)$:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i v)}{\partial x}=0,\quad i=1,\ldots,N,\quad v=\sum_{j=1}^{N}\beta_j u_j, \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i v u_i)}{\partial x}+\beta_i\frac{\partial(\rho_R\theta)}{\partial x}=\\ =\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2},\quad i=1,\ldots,N,\quad \rho_R=\sum_{j=1}^{N}R_j\rho_j,\end{gathered} \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial(\rho_c\theta)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_c v\theta)}{\partial x}+\rho_R\theta\frac{\partial v}{\partial x}=k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+ \tag{6.3}$$
$$+\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right),\quad \rho_c=\sum_{j=1}^{N}c_j\rho_j.$$

в которой коэффициенты β_i, ν_{ij}, R_i, c_i, k — постоянные величины, причем при всех $i=1,\dots,N$

$$\beta_i\in(0,1),\quad \sum_{j=1}^{N}\beta_j=1,\quad R_i>0,\quad c_i>0,\quad k>0, \tag{6.4}$$
$$\mathbf{N}=\{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{N}>0,\quad \mathbf{N}=\mathbf{N}^*.$$

В начальный момент времени пусть задано распределение для плотностей, скоростей и температуры

$$\rho_i|_{t=0}=\rho_{0i}(x),\quad u_i|_{t=0}=u_{0i}(x),\quad i=1,\dots,N, \tag{6.5}$$
$$\theta|_{t=0}=\theta_0(x),\quad x\in[0,1].$$

На границе $(0,1)$ учитываются условия

$$u_i|_{x=0}=u_i|_{x=1}=0,\quad i=1,\dots,N,\quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=1}=0. \tag{6.6}$$

Начальные данные удовлетворяют условиям

$$(\rho_{01},\dots,\rho_{0N},u_{01},\dots,u_{0N},\theta_0)\in W_2^1(0,1),\quad \rho_{0i}>0,\quad i=1,\dots,N, \tag{6.7}$$
$$\theta_0>0,\quad u_{0i}(0)=u_{0i}(1)=0,\quad i=1,\dots,N.$$

Решение задачи (6.1)–(6.6) будем искать в классе функций $(i=1,\dots,N)$

$$\rho_i\in L_\infty(0,T;W_2^1(0,1)),\quad \frac{\partial\rho_i}{\partial t}\in L_\infty(0,T;L_2(0,1)),$$
$$u_i,\,\theta\in L_\infty(0,T;W_2^1(0,1))\bigcap L_2(0,T;W_2^2(0,1)), \tag{6.8}$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t},\ \frac{\partial\theta}{\partial t}\in L_2(Q_T),$$

причем ρ_i и θ строго положительны.

7. Постановка приближенной задачи

Мы будем доказывать локальную по времени разрешимость начально-краевой задачи, полученной из задачи (6.1)–(6.6) с помощью метода Галеркина $(i=1,\dots,N,\ k=1,\dots,m,\ s=1,\dots,m,\ m\in\mathbb{N})$:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i v)}{\partial x}=0,\quad v=\sum_{j=1}^{N}\beta_j u_j, \tag{7.1}$$

$$\int\limits_0^1 \Big(\rho_i\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t}+v\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)+\beta_i\frac{\partial(\rho_R\theta)}{\partial x}- \tag{7.2}$$

$$-\sum_{j=1}^N \nu_{ij}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\Big)\omega_k(x)\,dx=0,\quad \rho_R=\sum_{j=1}^N R_j\rho_j,$$

$$\int\limits_0^1 \Big(\rho_c\Big(\frac{\partial \theta}{\partial t}+v\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big)-k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)+ \tag{7.3}$$

$$+\rho_R\theta\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\xi_s(x)\,dx=0,\quad \rho_c=\sum_{j=1}^N c_j\rho_j,$$

$$\rho_i|_{t=0}=\rho_{0i}(x), \tag{7.4}$$

$$u_i=\sum_{j=1}^m \psi_{ij}(t)\omega_j(x),\quad \theta=\sum_{j=1}^m \eta_j(t)\xi_j(x), \tag{7.5}$$

$$u_i|_{t=0}=\sum_{j=1}^m \psi_{0ij}\omega_j(x),\quad \theta|_{t=0}=\sum_{j=1}^m \eta_{0j}\xi_j(x),$$

где $\omega_k(x)=\sin(\pi kx)$, $\xi_s(x)=\cos(\pi(s-1)x)$, $\psi_{ik}(0)=\psi_{0ik}=2\int\limits_0^1 u_{0i}(x)\omega_k(x)\,dx$, $\eta_s(0)=\eta_{0s}=2\int\limits_0^1 \theta_0(x)\xi_s(x)\,dx$.

Искомое решение будет построено как неподвижная точка оператора Λ, который строится далее.

8. Оператор Λ приближенной задачи

В пространстве $(C[0,t_m])^{(N+1)m}$, где $t_m\in(0,T]$ пока произвольно, рассмотрим множество

$$B=\Big\{(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\eta})\in(C[0,t_m])^{(N+1)m}|\ \ (\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\eta})(0)=(\boldsymbol{\psi}_0,\boldsymbol{\eta}_0),$$
$$\|(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\eta})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}}\leqslant b\Big\},$$

где

$$\boldsymbol{\psi}=(\boldsymbol{\psi}_1,\ldots,\boldsymbol{\psi}_N),\ \ \boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_N),\ \ \boldsymbol{\psi}_0=(\boldsymbol{\psi}_{01},\ldots,\boldsymbol{\psi}_{0N}),$$
$$\boldsymbol{\eta}_0=(\eta_{01},\ldots,\eta_{0m}),\ \ \boldsymbol{\psi}_i=(\psi_{i1},\ldots,\psi_{im}),\ \ \boldsymbol{\psi}_{0i}=(\psi_{0i1},\ldots,\psi_{0im}),\ \ i=1,\ldots,N,$$
$$b^2=8\sum_{i=1}^N\left(\sup_{(0,1)}|u_{0i}|+1\right)^2+18\left(\sup_{(0,1)}\theta_0\right)^2.$$

и построим оператор $\Lambda:\ B\to(C[0,t_m])^{(N+1)m}$, $\operatorname{Im}\Lambda\subset(C^1[0,t_m])^{(N+1)m}$, $\Lambda(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})$, где $\boldsymbol{\Psi}=(\boldsymbol{\Psi}_1,\ldots,\boldsymbol{\Psi}_N)$, $\boldsymbol{\Psi}_i=(\Psi_{i1},\ldots,\Psi_{im})$, $i=1,\ldots,N$, $\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1,\ldots,\Phi_m)$, по следующему алгоритму.

На первом шаге найдем функции

$$\rho_i \in L_\infty\big(0,t_m;W_2^1(0,1)\big)\bigcap W_\infty^1\big(0,t_m;L_2(0,1)\big),\quad \rho_i>0,\quad i=1,\dots,N,$$

как решения задач Коши (7.1), (7.4), где u_i, $i=1,\dots,N$, задаются по формулам (7.5). При этом справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\left(\inf_{(0,1)}\rho_{0i}\right)\exp\left\{-\sum_{j=1}^N\int_0^t\sup_{(0,1)}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x}\right|d\tau\right\}\leqslant\rho_i(x,t)\leqslant\\ \leqslant\left(\sup_{(0,1)}\rho_{0i}\right)\exp\left\{\sum_{j=1}^N\int_0^t\sup_{(0,1)}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x}\right|d\tau\right\},\quad i=1,\dots,N,\end{gathered}\tag{8.1}$$

которые, в силу того, что $\|\boldsymbol{\psi}\|_{(C[0,t_m])^{Nm}}\leqslant b$, дают оценки ($i=1,\dots,N$)

$$\left(\inf_{(0,1)}\rho_{0i}\right)\exp\left\{-\pi m^2bNt_m\right\}\leqslant\rho_i(x,t)\leqslant\left(\sup_{(0,1)}\rho_{0i}\right)\exp\left\{\pi m^2bNt_m\right\}.\tag{8.2}$$

На втором шаге определим функцию $(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})$ из следующей задачи Коши для системы $(N+1)m$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка ($k=1,\dots,m$, $i=1,\dots,N$, $s=1,\dots,m$):

$$\begin{gathered}\int_0^1\left(\rho_i\frac{\partial U_i}{\partial t}+\rho_i\left(\sum_{j=1}^N\beta_ju_j\right)\frac{\partial U_i}{\partial x}+\beta_i\frac{\partial(\rho_R\Theta)}{\partial x}-\sum_{j=1}^N\nu_{ij}\frac{\partial^2U_j}{\partial x^2}\right)\omega_k\,dx=0,\\ \int_0^1\Bigg(\rho_c\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\rho_c\left(\sum_{j=1}^N\beta_ju_j\right)\frac{\partial\Theta}{\partial x}-k\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-\sum_{i,j=1}^N\nu_{ij}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)+\\ +\rho_R\Theta\sum_{j=1}^N\beta_j\frac{\partial U_j}{\partial x}\Bigg)\xi_s(x)\,dx=0,\end{gathered}\tag{8.3}$$

$$(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})(0)=(\boldsymbol{\psi}_0,\boldsymbol{\eta}_0),\tag{8.4}$$

где $U_i=\sum_{j=1}^m\Psi_{ij}(t)\omega_j(x)$, $i=1,\dots,N$, $\Theta=\sum_{j=1}^m\Phi_j(t)\xi_j(x)$, $\rho_R=\sum_{j=1}^NR_j\rho_j$, $\rho_c=\sum_{j=1}^Nc_j\rho_j$. Неравенства

$$\det A_i\neq0,\quad i=1,\dots,N+1,$$

где

$$A_i(t)=\left\{\int_0^1\rho_i\omega_j\omega_k\,dx\right\}_{j,k=1}^m,\quad i=1,\dots,N,\quad A_{N+1}(t)=\left\{\int_0^1\rho_c\xi_j\xi_s\,dx\right\}_{j,s=1}^m,$$

выполненные в силу положительности ρ_i, $i=1,\dots,N$, позволяет разрешить систему (8.3) относительно производных, что обосновывает существование функции $(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})\in(C^1[0,t_m])^{(N+1)m}$.

Таким образом, для некоторого $t_m \in (0, T]$ определен оператор $\Lambda : B \to (C^1[0, t_m])^{(N+1)m} \subset (C[0, t_m])^{(N+1)m}$, $\Lambda(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi})$, неподвижная точка которого (если она существует), вместе с соответствующими функциями ρ_i, $i = 1, \ldots, N$, дает решение задачи (7.1)–(7.5).

Далее мы покажем, что при достаточно малом t_m оператор Λ удовлетворяет условиям теоремы Шаудера (см. [17], стр. 31).

9. Компактность оператора Λ

Докажем сначала компактность оператора Λ. Умножая $(8.3)_1$ на $\dfrac{d\Psi_{ik}(t)}{dt}$, $(8.3)_2$ на $\dfrac{d\Phi_s(t)}{dt}$ и суммируя, для функций

$$y_1(t) = \frac{k}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right) dx,$$

$$y_2(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left(\sum_{i=1}^N \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial \tau}\right)^2 + \rho_c \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}\right)^2\right) dx d\tau,$$

выводим соотношение[2]

$$\begin{aligned} y_1' + y_2' = \int\limits_0^1 \Bigg(& -\sum_{i=1}^N \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\left(\sum_{j=1}^N \beta_j u_j\right) + \rho_R \Theta \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} - \\ & -\rho_R \Theta \left(\sum_{j=1}^N \beta_j \frac{\partial U_j}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) + \left(\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) - \\ & -\rho_c \left(\sum_{j=1}^N \beta_j u_j\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)\Bigg) dx. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Из представления

$$\Theta = \Theta|_{t=0} + \int\limits_0^t \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} d\tau$$

получим оценку

$$\int\limits_0^1 \Theta^2 dx \leqslant B_1(1 + t y_2), \tag{9.2}$$

[2]Здесь использовалась симметричность матрицы $\mathbf{N}$.

где[3] $B_1 = B_1\left(\left\{\inf\limits_{(0,1)} \rho_{0j}\right\}, \sup\limits_{(0,1)} \theta_0, \{c_j\}, N, T, b, m\right)$. Произведем оценки слагаемых в правой части (9.1) с помощью (8.2), (9.2) и неравенства Коши:

$$\left| -\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right) \left(\sum_{j=1}^{N} \beta_j u_j\right) dx \right| \leqslant \frac{1}{10} y_2' + B_2 y_1,$$

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \beta_i \int_0^1 \rho_R \Theta \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x}\right) dx \right| \leqslant \frac{1}{10} y_2' + B_3(1 + t y_2),$$

$$\left| -\int_0^1 \rho_R \Theta \left(\sum_{j=1}^{N} \beta_j \frac{\partial U_j}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) dx \right| \leqslant \frac{1}{10} y_2' + B_4 y_1 (1 + y_2),$$

$$\left| \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)\right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) dx \right| \leqslant \frac{1}{10} y_2' + B_5 y_1^2,$$

$$\left| -\int_0^1 \rho_c \left(\sum_{j=1}^{N} \beta_j u_j\right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right) dx \right| \leqslant \frac{1}{10} y_2' + B_6 y_1,$$

где $B_2 = B_2\left(\left\{\sup\limits_{(0,1)} \rho_{0j}\right\}, \mathbf{N}, N, T, b, m\right)$,

$B_3 = B_3\left(B_1, \left\{\sup\limits_{(0,1)} \rho_{0j}\right\}, \left\{\inf\limits_{(0,1)} \rho_{0j}\right\}, \{R_j\}, N, T, b, m\right)$,

$B_4 = B_4\left(B_1, \left\{\sup\limits_{(0,1)} \rho_{0j}\right\}, \left\{\inf\limits_{(0,1)} \rho_{0j}\right\}, \{R_j\}, \{c_j\}, \mathbf{N}, N, T, b, m\right)$,

$B_5 = B_5\left(\left\{\inf\limits_{(0,1)} \rho_{0j}\right\}, \{c_j\}, \mathbf{N}, N, T, b, m\right)$,

$B_6 = B_6\left(\left\{\sup\limits_{(0,1)} \rho_{0j}\right\}, \{c_j\}, N, T, b, k, m\right)$. Таким образом, из (9.1) получаем неравенство

$$z' \leqslant B_7(B_2, B_3, B_4, B_5, B_6)\left(1 + z^2\right), \tag{9.3}$$

где $z(t) = y_1(t) + \frac{1}{2} y_2(t)$, $z(0) \leqslant B_8\left(\|\theta_0\|_{W_2^1(0,1)}, \mathbf{N}, N, b, k\right)$, интегрируя которое по времени от 0 до достаточно малого t_m:

$$t_m \leqslant \min\left\{\frac{1}{2B_7} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{B_8}\right), T\right\}, \tag{9.4}$$

выводим оценку

$$z(t) \leqslant B_9(B_8). \tag{9.5}$$

---

[3]Здесь и далее буквой B с индексами будем обозначать положительные величины, зависящие от величин, указанных в скобках или иногда указанных иным образом.

Неравенство (9.5), в частности, влечет оценки $\dfrac{\partial U_i}{\partial t}$, $i = 1,\dots,N$, $\dfrac{\partial \Theta}{\partial t}$ в $L_2(0,t_m;L_2(0,1))$. Таким образом, получена оценка $(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})$ в $(W_2^1(0,t_m))^{(N+1)m}$. Следовательно, Λ является компактным оператором.

10. Область действия оператора Λ

Установим, что $\Lambda(B)\subset B$. Будем считать число m настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$(10.1)\quad |U_i|_{t=0}| < \sup_{(0,1)}|u_{0i}|+1,\quad i=1,\dots,N,\quad 0<\frac{1}{2}\inf_{(0,1)}\theta_0<\Theta|_{t=0}<2\sup_{(0,1)}\theta_0.$$

Поскольку из (9.5) следуют оценки $\dfrac{\partial U_i}{\partial t}$, $i=1,\dots,N$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$ в $L_2(0,t_m;C[0,1])$, то это вместе с (10.1) дает выбором малости t_m неравенства

$$(10.2)\qquad |U_i|<2\sup_{(0,1)}|u_{0i}|+2,\quad i=1,\dots,N,\quad 0<\frac{1}{4}\inf_{(0,1)}\theta_0<\Theta<3\sup_{(0,1)}\theta_0.$$

Тогда из (10.2) находим, что

$$(10.3)\qquad \|(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}}\leqslant b.$$

Таким образом оператор Λ отображает множество B в себя.

11. Непрерывность оператора Λ

Установим непрерывность оператора Λ из B в $(C[0,t_m])^{(N+1)m}$. Пусть $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\eta})^{(1,2)}\in B$, $(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})^{(1,2)}=\Lambda((\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\eta})^{(1,2)})$, $u_i^{(1,2)}=\sum\limits_{s=1}^m\psi_{is}^{(1,2)}\omega_s$, $\theta^{(1,2)}=\sum\limits_{s=1}^m\eta_s^{(1,2)}\xi_s$, $U_i^{(1,2)}=\sum\limits_{s=1}^m\Psi_{is}^{(1,2)}\omega_s$, $i=1,\dots,N$, $\Theta^{(1,2)}=\sum\limits_{s=1}^m\Phi_s^{(1,2)}\xi_s$. Далее пусть $\rho_i^{(1,2)}$ — решения задач Коши (7.1), (7.4), где вместо u_i стоит $u_i^{(1,2)}$ соответственно. Обозначим $\rho_i=\rho_i^{(1)}-\rho_i^{(2)}$, $u_i=u_i^{(1)}-u_i^{(2)}$, $U_i=U_i^{(1)}-U_i^{(2)}$, $i=1,\dots,N$, $\theta=\theta^{(1)}-\theta^{(2)}$, $\Theta=\Theta^{(1)}-\Theta^{(2)}$, $v=v^{(1)}-v^{(2)}$, $\rho_c=\rho_c^{(1)}-\rho_c^{(2)}$, $\rho_R=\rho_R^{(1)}-\rho_R^{(2)}$, где $v^{(1,2)}=\sum\limits_{j=1}^N\beta_ju_j^{(1,2)}$, $\rho_c^{(1,2)}=\sum\limits_{j=1}^Nc_j\rho_j^{(1,2)}$, $\rho_R^{(1,2)}=\sum\limits_{j=1}^NR_j\rho_j^{(1,2)}$. Дифференцируя[4] по переменной x уравнения (7.1) для $\rho_i^{(1,2)}$, $i=1,\dots,N$ $\Big($т. е. уравнения $\partial_t\rho_i^{(1,2)}+\partial_x\left(\rho_i^{(1,2)}v^{(1,2)}\right)=0$, $i=1,\dots,N\Big)$, умножая на $\partial_x\rho_i^{(1,2)}$, $i=1,\dots,N$, используя начальные условия $\rho_i^{(1,2)}|_{t=0}=\rho_{0i}$, $i=1,\dots,N$, и неравенства (8.2) и Гронуолла, получаем оценки

$$(11.1)\qquad \left\|\partial_x\rho_i^{(1,2)}\right\|_{L_2(0,1)}\leqslant B_{10}\left(\|\rho_{0i}\|_{W_2^1(0,1)},N,b,m,t_m\right),\quad i=1,\dots,N.$$

[4]Для вывода (11.1), таким образом, формально используется дополнительная гладкость решения, хотя само соотношение (11.1) никаких дополнительных требований не предусматривает. Это означает, что (11.1) может быть получено путем регуляризации решений, вывода (11.1) для решений получившихся задач, а затем предельного перехода по параметру регуляризации.

Заметим, что из (7.1), (7.4) следуют равенства

$$\partial_t\rho_i + \partial_x\left(\rho_i v^{(1)}\right) + \partial_x\left(\rho_i^{(2)} v\right) = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{11.2}$$

Умножая (11.2) на ρ_i, $i = 1, \ldots, N$, интегрируя по $x \in (0, 1)$, находим при всех $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx = -\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{2}\rho_i^2\Big(\partial_x v^{(1)}\Big) + \rho_i^{(2)}\rho_i(\partial_x v) + \\ +\Big(\partial_x\rho_i^{(2)}\Big)\rho_i v\Big)dx \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sup_{(0,1)}\Big|\partial_x v^{(1)}\Big|\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx + \\ +\sup_{(0,1)}\rho_i^{(2)}\int\limits_0^1\Big(\rho_i^2 + (\partial_x v)^2\Big)\,dx + \sup_{(0,1)} v^2\int\limits_0^1\Big(\partial_x\rho_i^{(2)}\Big)^2 dx + \\ +\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx\Big) \leqslant B_{11}\Big(B_{10}, \sup_{(0,1)}\rho_{0i}, N, b, m, t_m\Big)\Big(\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx + \sum_{j=1}^N\int\limits_0^1 u_j^2\,dx\Big).\end{gathered} \tag{11.3}$$

Из (11.3), применяя неравенство Гронуолла и учитывая начальные условия в (11.2), выводим неравенства для всех $t \in (0, t_m]$

$$\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx \leqslant B_{12}(B_{11}, t_m)\sum_{j=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_j^2\,dxd\tau, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{11.4}$$

Далее, из уравнений для $U_i^{(1,2)}$, $i = 1, \ldots, N$ (см. $(8.3)_1$) ввиду (7.1) следует для всех $t \in (0, t_m]$ соотношение

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int\limits_0^1 \rho_i^{(1)}U_i^2\,dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dxd\tau = \\ = \sum_{i=1}^N\beta_i\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_R^{(1)}\Theta\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)dxd\tau + \sum_{i=1}^N\beta_i\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_R\Theta^{(2)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)dxd\tau - \\ -\sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_i U_i\left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial\tau}\right)dxd\tau - \sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_i^{(1)}vU_i\left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right)dxd\tau - \\ -\sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_i v^{(2)}U_i\left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right)dxd\tau.\end{gathered} \tag{11.5}$$

Первое слагаемое в левой части (11.5), ввиду (8.2), допускает оценку

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i^{(1)} U_i^2\,dx \geqslant \frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant N}\left\{\inf_{(0,1)}\rho_{0i}\right\}\exp\left\{-\pi m^2 bNt_m\right\}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 U_i^2\,dx. \tag{11.6}$$

Используя неравенство Коши с малым множителем, (6.4) и (8.2), для первого слагаемого в правой части (11.5) получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{N}\beta_i\int_0^t\int_0^1 \rho_R^{(1)}\Theta\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dxd\tau+ \tag{11.7}$$

$$+B_{13}\Big(\{R_i\},\Big\{\sup_{(0,1)}\rho_{0i}\Big\},\mathbf{N},N,m,b,t_m\Big)\int_0^t\int_0^1\Theta^2\,dxd\tau.$$

Для второго слагаемого в правой части (11.5), используя (6.4), (11.4), неравенство $\|(\mathbf{\Psi}^{(2)},\mathbf{\Phi}^{(2)})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}} \leqslant b$ и неравенство Коши с малым множителем, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}\beta_i\int_0^t\int_0^1 \rho_R\Theta^{(2)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dxd\tau+ \tag{11.8}$$

$$+B_{14}\Big(B_{12},\{R_i\},\mathbf{N},N,m,b,t_m\Big)\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 u_i^2\,dxd\tau.$$

Третье слагаемое в правой части (11.5) оценим с помощью (6.4), (8.2), (9.5), (11.4) и неравенства Коши с малым множителем:

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 \rho_i U_i\left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial\tau}\right)dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant B_{15}\Big(B_9,B_{12},\Big\{\inf_{(0,1)}\rho_{0i}\Big\},N,m,b,t_m\Big)\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 u_i^2\,dxd\tau+ \tag{11.9}$$

$$+\frac{1}{4N}\min_{1\leqslant i\leqslant N}\left\{\inf_{(0,1)}\rho_{0i}\right\}\exp\left\{-\pi m^2 bNt_m\right\}\sum_{i=1}^{N}\sup_{(0,t)}\int_0^1 U_i^2\,dx.$$

Благодаря (8.2), неравенству Коши и оценке $\|(\mathbf{\Psi}^{(2)}, \mathbf{\Phi}^{(2)})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}} \leqslant b$, для четвертого слагаемого в правой части (11.5) получаем соотношение

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 \rho_i^{(1)} v U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx d\tau \leqslant \\
&\leqslant B_{16}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 u_i^2\, dx d\tau + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 U_i^2\, dx d\tau\right),
\end{aligned} \tag{11.10}
$$

где $B_{16} = B_{16}\Big(\Big\{\sup\limits_{(0,1)} \rho_{0i}\Big\}, N, b, m, t_m\Big)$. Наконец, используя (11.4), неравенства $\|(\boldsymbol{\psi}^{(2)}, \boldsymbol{\eta}^{(2)})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}} \leqslant b$, $\|(\mathbf{\Psi}^{(2)}, \mathbf{\Phi}^{(2)})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}} \leqslant b$ и неравенство Коши, для последнего слагаемого в правой части (11.5) выводим

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 \rho_i v^{(2)} U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx d\tau \leqslant \\
&\leqslant B_{17}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 u_i^2\, dx d\tau + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 U_i^2\, dx d\tau\right),
\end{aligned} \tag{11.11}
$$

где $B_{17} = B_{17}(B_{12}, N, b, m, t_m)$. Таким образом, из (11.5), с учетом (11.6)–(11.11), следует неравенство

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 U_i^2\, dx \leqslant B_{18}\Big(\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 u_i^2\, dx d\tau + \\
&+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 U_i^2\, dx d\tau + \int_0^t\int_0^1 \Theta^2\, dx d\tau\Big),
\end{aligned} \tag{11.12}
$$

где $B_{18} = B_{18}\left(B_{13}, B_{14}, B_{15}, B_{16}, B_{17}, \left\{\inf\limits_{[0,1]} \rho_{0i}\right\}, N, b, m, t_m\right)$.

Теперь, из уравнений для $\Theta^{(1,2)}$ (см. $(8.3)_2$) ввиду (7.1) следует для всех $t\in(0,t_m]$ соотношение

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \rho_c^{(1)}\Theta^2\,dx + k\int\limits_0^t\int\limits_0^1\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big)^2\,dxd\tau =$$

$$= -\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_c\Theta\Big(\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial\tau}\Big)\,dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_c v^{(1)}\Theta\Big(\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial x}\Big)\,dxd\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_c^{(2)} v\Theta\Big(\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial x}\Big)\,dxd\tau + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\Big(\Big(\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial U_j^{(1)}}{\partial x}\Big)- \tag{11.13}$$

$$-\Big(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial U_j^{(2)}}{\partial x}\Big)\Big)\Theta\,dxd\tau - \int\limits_0^t\int\limits_0^1\Big(\rho_R^{(1)}\Theta^{(1)}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x}-$$

$$-\rho_R^{(2)}\Theta^{(2)}\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x}\Big)\Theta\,dxd\tau.$$

Для первого слагаемого в левой части (11.13), ввиду (8.2), получаем оценку

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \rho_c^{(1)}\Theta^2\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant N}\Big\{\inf_{(0,1)}\rho_{0i}\Big\}\Big(\sum_{i=1}^N c_i\Big)\exp\{-\pi m^2 bNt_m\}\int\limits_0^1\Theta^2\,dx. \tag{11.14}$$

Первое слагаемое в правой части (11.13) оценим с помощью (8.2), (9.5), (11.4) и неравенства Коши с малым множителем:

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_c\Theta\left(\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial\tau}\right)\,dxd\tau \leqslant B_{19}\sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_i^2\,dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{4}\min_{1\leqslant i\leqslant N}\Big\{\inf_{(0,1)}\rho_{0i}\Big\}\Big(\sum_{i=1}^N c_i\Big)\exp\{-\pi m^2 bNt_m\}\sup_{(0,t)}\int\limits_0^1\Theta^2\,dx, \tag{11.15}$$

где $B_{19}=B_{19}\Big(B_9,B_{12},\Big\{\inf\limits_{(0,1)}\rho_{0i}\Big\},\{c_i\},N,m,b,t_m\Big)$. Благодаря (11.4), неравенству Коши и оценке $\|(\mathbf{\Psi}^{(1)},\mathbf{\Phi}^{(2)})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}}\leqslant b$, для второго слагаемого в правой части (11.13) получаем соотношение

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t\int_0^1 \rho_c v^{(1)}\Theta\left(\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial x}\right) dxd\tau \leqslant \\
&\leqslant B_{20}\left(\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^1 u_i^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1\Theta^2\,dxd\tau\right),
\end{aligned}
\tag{11.16}
$$

где $B_{20} = B_{20}(B_{12}, \{c_i\}, N, m, b, t_m)$. Третье слагаемое в правой части (11.13) оценим с помощью (8.2), оценки $\|(\mathbf{\Psi}^{(2)}, \mathbf{\Phi}^{(2)})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}} \leqslant b$ и неравенства Коши:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t\int_0^1 \rho_c^{(2)} v\Theta\left(\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial x}\right) dxd\tau \leqslant \\
&\leqslant B_{21}\left(\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^1 u_i^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1\Theta^2\,dxd\tau\right),
\end{aligned}
\tag{11.17}
$$

где $B_{21} = B_{21}\Big(\Big\{\sup\limits_{(0,1)}\rho_{0i}\Big\}, \{c_i\}, N, m, b, t_m\Big)$. Используя неравенство Коши и оценки $\|(\mathbf{\Psi}^{(1,2)}, \mathbf{\Phi}^{(1,2)})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}} \leqslant b$, для четвертого слагаемого в правой части (11.13) получаем соотношение

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int_0^t\int_0^1\left(\left(\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j^{(1)}}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j^{(2)}}{\partial x}\right)\right)\Theta\,dxd\tau = \\
&=\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j^{(1)}}{\partial x}\right)\Theta\,dxd\tau+ \\
&+\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)\Theta\,dxd\tau \leqslant \\
&\leqslant B_{22}(\mathbf{N}, N, b, m)\left(\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^1 U_i^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1\Theta^2\,dxd\tau\right).
\end{aligned}
\tag{11.18}
$$

Наконец, используя (8.2), (11.4), неравенства $\|(\mathbf{\Psi}^{(1)}, \mathbf{\Phi}^{(1,2)})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}} \leqslant b$ и неравенство Коши, для последнего слагаемого в правой части (11.13) выводим

$$-\int_0^t\int_0^1\left(\rho_R^{(1)}\Theta^{(1)}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x}-\rho_R^{(2)}\Theta^{(2)}\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x}\right)\Theta\,dxd\tau=$$

$$=-\int_0^t\int_0^1\rho_R\Theta^{(1)}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x}\Theta\,dxd\tau-\int_0^t\int_0^1\rho_R^{(2)}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x}\Theta^2\,dxd\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1\rho_R^{(2)}\Theta^{(2)}\frac{\partial V}{\partial x}\Theta\,dxd\tau\leqslant B_{23}\Big(\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^1 u_i^2\,dxd\tau+ \tag{11.19}$$

$$+\int_0^t\int_0^1\Theta^2\,dxd\tau\Big),$$

где $B_{23}=B_{23}\Big(B_{12},\Big\{\sup\limits_{(0,1)}\rho_{0i}\Big\},\{R_i\},N,b,m,t_m\Big)$. В результате, из (11.13), с учетом (11.14)–(11.19), следует неравенство

$$\int_0^1\Theta^2\,dx\leqslant B_{24}\Big(\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^1 u_i^2\,dxd\tau+ \tag{11.20}$$

$$+\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^1 U_i^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1\Theta^2\,dxd\tau\Big),$$

где $B_{24}=B_{24}\left(B_{19},B_{20},B_{21},B_{22},B_{23},\left\{\inf\limits_{[0,1]}\rho_{0i}\right\},\{c_i\},N,b,m,t_m\right)$.

Складывая неравенства (11.12), (11.20) и используя неравенство Гронуолла, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^N\int_0^1 U_i^2\,dx+\int_0^1\Theta^2\,dx\leqslant B_{25}(B_{18},B_{24},t_m)\sum_{i=1}^N\int_0^{t_m}\int_0^1 u_i^2\,dxdt,$$

а отсюда следует неравенство

$$\|(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}}\leqslant B_{26}(B_{25},t_m)\|(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\eta})\|_{(C[0,t_m])^{(N+1)m}},$$

обосновывающее непрерывность оператора Λ на B.

12. Завершение доказательства

Поскольку оператор Λ удовлетворяет условиям теоремы Шаудера, то в B существует неподвижная точка $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\eta})$ оператора Λ, определяющая (вместе с соответствующими функциями ρ_i, $i=1,\ldots,N$) решение задачи (7.1)–(7.5).

References

[1] A.V. Kazhikhov, *The global solvability of one-dimensional boundary value problems for the equations of a viscous heat-conducting gas*, Din. Splosh. Sredy, **24** (1976), 45–61. MR0459229

[2] A.V. Kazhikhov, V.V. Shelukhin, *Unique global solution with respect to time of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas*, J. Appl. Math. Mech., **41**:2 (1977), 273–282. MR0468593

[3] A.V. Kazhikhov, *On the theory of boundary value problems for the equations of one-dimensional nonstationary motion of viscous heat-conducting gas*, Din. Splosh. Sredy, **50** (1981), 37–62. Zbl 0515.76076

[4] S.Ya. Belov, *On the flow problem for the system of equations of the one-dimensional motion of viscous heat conducting gas*, Din. Splosh. Sredy, **56** (1982), 22–43. Zbl 0562.76071

[5] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *Generalized solutions "in the large"of the equations of the one-dimensional motion of a viscous heat-conducting gas*, Soviet Math. Dokl., **38**:1 (1989), 1–5. MR0953594

[6] V.A. Veigant, *Nonhomogeneous boundary value problems for the equation of a viscous heat-conducting gas*, Din. Splosh. Sredy, **97** (1990), 3–21. Zbl 0743.76063

[7] V.A. Veigant, *Stabilization of solutions of an inhomogeneous boundary value problem for the equations of a viscous heat-conducting gas*, Din. Splosh. Sredy, **101** (1991), 31–52.

[8] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *Solvability "in the large"of a system of equations of the one-dimensional motion of an inhomogeneous viscous heat-conducting gas*, Math. Notes, **52**:2 (1992), 753–763. Zbl 0779.76079

[9] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *Semidiscrete method for solving equations of a one-dimensional motion of viscous heat-conductive gas with non-smooth data*, Russ. Math., **41**:4 (1997), 1–17. Zbl 0911.76078

[10] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *Justification of quasi-averaging of equations of one-dimensional motion of a viscous heat-conducting gas with rapidly oscillating properties*, Dokl. Math., **55**:3 (1997), 381–384. Zbl 0970.35005

[11] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *On stability of generalized solutions to the equations of one-dimensional motion of a viscous heat conducting gas*, Sib. Math. J., **38**:4 (1997), 663–684. Zbl 0880.35026

[12] A.V. Kazhikhov, A.N. Petrov, *Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture*, Din. Splosh. Sredy, **35** (1978), P. 61–73.

[13] A.N. Petrov, *Well-posedness of initial boundary value problems for one-dimensional equations of interpenetrating motion of perfect gases*, Din. Splosh. Sredy, **56** (1982), 105–121.

[14] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global solvability of 1D equations of viscous compressible multi-fluids*, Journal of Physics: Conf. Series, **894** (2017), Article 012059.

[15] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. Math. Fluid Mech., **21**:1 (2019), Article 9. Zbl 1411.76150

[16] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of an initial-boundary value problem for the one-dimensional barotropic equations of binary mixtures of viscous compressible fluids*, J. Appl. Industr. Math., **15** (2021), 50–61.

[17] S.N. Antontsev, A.V. Kazhikhov, V.N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, Studies in Mathematics and its Applications, **22**, North-Holland, Amsterdam etc., 1990. Zbl 0696.76001

Alexander Evgenyevich Mamontov
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
15, Lavrent'eva ave.,
630090, Novosibirsk, Russia
Laboratory for Mathematical and Computer Modeling,
Natural and Industrial Systems,
Faculty of Mathematics & Information Technologies,
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
Email address: aem@hydro.nsc.ru

Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
15, Lavrent'eva ave.,
630090, Novosibirsk, Russia
Laboratory for Mathematical and Computer Modeling,
Natural and Industrial Systems,
Faculty of Mathematics & Information Technologies,
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
Email address: prokudin@hydro.nsc.ru