S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 901–904 (2021) УДК 512.57

DOI 10.33048/semi.2021.18.068 MSC 08C99

О ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛОНОВ

А.Г. ПИНУС

Abstract. We present a criterion for the space of clones on a set to be compact and study relationship between such spaces for different sets.

Keywords: functional clone, space, compactness.

1. Введение

В работе автора [1] на совокупности F_A всех функциональных клонов на множестве A введена некоторая естественная метрика d, основанная на понятии фрагмента клона. Напомним, что *функциональным клоном* F на множестве A называется любая совокупность функций на этом множестве замкнутая относительно суперпозиции и включающая в себя E_A — совокупность всех селекторных функций $e^i_n(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ (для любых натуральных чисел $i \leq n$) на множестве A. Под фрагментом $F^{(n)}$ клона F ($n \in \omega$, здесь ω множество положительных целых чисел без нуля) имеется в виду совокупность функций из F арность которых не превосходит числа n. Заметим, что для любых $F_1, F_2 \in F_A$ и любых натуральных $n \leq m$ равенство $F_1^{(m)} = F_2^{(m)}$ влечет равенство $F_1^{(n)} = F_2^{(n)}$. *Расстояние* $d(F_1, F_2)$ для двух клонов F_1, F_2 из F_A определяем следующим образом:

$$d(F_1, F_2) = \begin{cases} 1/\min\{n | F_1^{(n)} \neq F_2^{(n)}\}, & \text{если } F_1 \neq F_2; \\ 0, & \text{в случае, когда } F_1 = F_2. \end{cases}$$

Метрика d определяет на совокупности F_A топологию, базой открытых множеств которой служит совокупность $\mathfrak{L}$ подмножеств множества F_A вида $\mathfrak{L} = \{F_1(n) = \{F \in F_A | F^{(n)} = F_1^{(n)}\}$, для любых $F_1 \in F_A,\ n \in \omega$.

Целый ряд свойств топологического пространства $< F_A; d >$ отмечен в работе [1]. Там же, в частности, (на основе известного Постовского, см., к примеру, [2], описания функциональных клонов на двухэлементном множестве) на стр.

Pinus, A.G., On spaces of functional clones.

Поступила 23 марта 2021 г., опубликована 23 августа 2021 г.

372 (вслед за доказательством предложения 3) доказана компактность пространства $< F_A; d >$ для двухэлементных множеств A и не компактность (см. Предложение 4 [1]) пространств $< F_A; d >$ для бесконечных множеств A.

В той же работе, как открытый, сформулирован вопрос о компактности пространств $< F_A; d >$ для конечных недвухэлементных множеств A. Положительному ответу на этот вопрос и посвящена первая часть данной работы. Во второй части мы рассматриваем взаимосвязи между пространствами $< F_A; d >$ для различных множеств A.

2. Часть I

Напомним некоторые комбинаторные понятия, связанные с известной теоремой Кенига (см., к примеру, теорема 1, § 5, стр. 112 [3]). Для любого отображения φ множества C во множество B *множеством уровня* отображения φ называется любое подмножество множества C вида $\varphi^{-1}(b)$ для какого-либо $b \in B$. В случае, когда $C \subseteq B$, *φ-ветвью длины n* (*бесконечной φ-ветвью*) называется любой кортеж $\overline{c} =< c_i | i \leqslant n >\in B^n$ (любая последовательность $\overline{c} =< c_i | i \in \omega >\in B^\omega$) такой (такая), что $c_i = \varphi(c_{i+1})$ для любого $i+1 \leqslant n$ (для любого $i \in \omega$).

Известно следующее утверждение:

Теорема 1. (Теорема Кенига) *Для любых множеств $C \subseteq B$ и любого отображения φ множества C в B такого, что все множества уровня для φ конечны, если для некоторого $b \in B$ существуют φ–ветви с начальным элементом b любой конечной длины, то существует бесконечная φ-ветвь с началом в элементе b.*

Покажем, что имеет место:

Теорема 2. *Для любого конечного множества A пространство $< F_A; d >$ компактно.*

Доказательство. Пусть A — некоторое конечное множество. Через T_A обозначим совокупность всех фрагментов функциональных клонов на A с добавленным к ним пустым множеством: $T_A = \{F^{(n)} | F \in F_A, n \in \omega\} \cup \{\emptyset\}$.

Отображение f множества T_A в себя определим следующим образом: для $F \in T_A$,

$$f(F) = \begin{cases} F^{(n)}, \text{ если } \ F = F^{(n+1)} \ \text{ для некоторых } \ F \in F_A \text{ и } n \in \omega; \\ \emptyset, \text{ если } \ F = F^{(1)} \ \text{ для некоторого } \ F \in F_A; \\ \emptyset, \text{ если } \ F = \emptyset. \end{cases}$$

Очевидно, что все множества уровня для подобного отображения конечны в силу конечности множества A.

Пусть $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_i | i \in I\}$ — некоторое открытое покрытие пространства $< F_A; d >$. Надо доказать существование конечного $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$, так же покрывающего это пространство.

Предположим противное. Можно считать, что открытые множества $\mathcal{F}_i$, входящие в $\mathfrak{F}$, входят в базу $\mathfrak{L}$ открытых множеств пространства $< F_A; d >$, т. е. для $i \in I$ $\mathcal{F}_i = F_1^i(n_i)$ для некоторых $F_1^i \in F_A$ и $n_i \in \omega$. Для натурального m через $\mathfrak{F}^{(m)}$ обозначим конечную совокупность открытых множеств $\{F_1^i(n_i) | i \in I, n_i \leq m\}$. Таким образом, в силу предположенного выше, $\mathfrak{F}^{(m)}$ не является покрытием пространства $< F_A; d >$. Пусть $S_m = T_A \setminus \cup \mathfrak{F}^{(m)}$. Тем самым $S_m \neq \emptyset$ для любого $m \in \omega$. Очевидно, что для $m \leq n \in \omega$ $S_n \subseteq S_m$, $f(S_{n+1}) \subseteq S_n$, а f (как замечено выше) — функция с конечными множествами уровня. Непустота множеств S_m (для любого натурального m) означает существование f-ветвей на множестве T_A любой конечной длинны. В таком случае для, существующей в силу теоремы Кенига, бесконечной f-ветви R, элемент $\cup R$ пространства $< F_A; d >$ не входит в $\cup\mathfrak{F}$, в противоречии с тем, что $\mathfrak{F}$ — покрытие пространства $< F_A; d >$. Полученное противоречие и доказывает компактность пространства $< F_A; d >$. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, в силу доказанной в [1] не компактности пространства $< F_A; d >$ для бесконечных A получаем следующее утверждение:

Следствие 1. *Пространство $< F_A; d >$ функциональных клонов компактно тогда и только тогда, когда множество A конечно.*

3. Часть II

В этой части работы мы рассмотрим вопрос о взаимосвязи пространства $< F_A; d >$ и $< F_B; d >$ для различных множеств A и B. В работе [1] утверждается изометрическая вложимость (предложение 3) пространства $< F_B; d >$ в пространство $< F_A; d >$ в случае, когда $B \subseteq A$, однако приведенное там доказательство некорректно (указанное в доказательстве равенство $(f(g))^\varphi = f^\varphi(g^\varphi)$ может и не выполняться). Тем не менее само это утверждение остается верным. На самом деле можно утверждать большее. Докажем, что имеет место:

Теорема 3. *Для любых множеств $B \subseteq A$ пространство $< F_B; d >$ изометрически вложимо в пространство $< F_A; d >$ и, более того, является топологическим ретрактом пространства $< F_A; d >$.*

Доказательство. Пусть $B \subseteq A$ и $\leq$ — произвольный линейный порядок на множестве $A \backslash B$. Для любой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ на множестве B определим ее продолжение $f^\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ на A следующим образом:

$$f^\varphi(b_1, \cdots, b_n) = \begin{cases} f(b_1, \cdots, b_n), & \text{если} \;\; b_i \in B \text{ для всех } i; \\ \min\{\{b_1, \cdots, b_n\} \backslash B\} & \text{в линейно упорядоченном} \\ & \text{множестве } \; < A \backslash B; \leq >, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Непосредственно замечается, что для любых функций $f(x_1, \cdots, x_n)$, $g(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})$ на множестве B имеет место

$$[f(g(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}), x_2, \cdots, x_n)]^\varphi = f^\varphi(g^\varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}), x_2, \cdots, x_n).$$

Тем самым для любого клона F функций на B совокупность $F^\varphi = \{f^\varphi | f \in F\} \cup E_A$ (здесь E_A — совокупность всех селекторов на A) является клоном на множестве A. Таким образом отображение $\varphi : F_B \to F_A$, определенное как $\varphi(F) = F^\varphi$, является вложением F_B в F_A. Так же непосредственно замечается, что для любых $F_1, F_2 \in F_B$ имеет место равенство $d(\varphi(F_1), \varphi(F_2)) = d(F_1, F_2)$, т. е. пространство $< F_B; d >$ изометрически вложимо в пространство $< F_A; d >$.

Для любой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ на множестве A через $f^\psi(x_1, \cdots, x_n)$ обозначим ограничение функции f на множество B, если для любых $b_1, \cdots, b_n \in B$ имеет место $f(b_1, \cdots, b_n) \in B$, и пусть $f^\psi(x_1, \cdots, x_n) = e_n^1(x_1, \cdots, x_n)$ в противном случае.

Для любого клона F на A пусть $\psi(F) = \{f^\psi | f \in F\}$. Очевидно, что $\psi(F) \in F_B$, и при этом пара отображений φ и ψ ретрактивна, т.е. для $F \in F_B$ имеет место равенство $\psi(\varphi(F)) = F$. Для завершения доказательства утверждения теоремы 3 остается заметить непрерывность отображения ψ пространства $< F_A; d >$ на пространство $< F_B; d >$. Последнее же очевидным образом следует из того, что отображение $\psi(F) = f^\psi$ сохраняет арность функций. $\square$

Непосредственно замечается так же, что пара отображений φ и ψ является ретрактивной парой гомоморфизмов и для решеток клонов на множествах B и A.

References

[1] A.G. Pinus, *Dimension of functional clons, metric on its collection*, Sib. Électron. Mat. Izv., **13** (2016), 366–374. Zbl 1345.08002

[2] S.V. Yablonskii, G.P. Gavrilov, V.B. Kudryavtsev, *Boolean functions and Post classes*, Nauka, Moscow, 1966. Zbl 0171.27701

[3] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set theory*, Mir, Moscow, 1970. Zbl 0204.31301

Aleksandr Georgievich Pinus
Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marx ave.,
Novosibirsk, 630073, Russia.
Email address: ag.pinus@gmail.com