

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №2, стр. 1000–1012 (2021)
DOI 10.33048/semi.2021.18.xxxУДК 517.955.8
MSC 35C20ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ
ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА

В.И. Васильев, А.М. Кардашевский

Abstract. В работе рассматривается обратная задача идентификации финитного начального условия задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в безразмерных переменных, определенной в ограниченной области с помощью интеграла Пуассона. Дискретизация линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода проводится с помощью квадратурной формулы прямоугольников. Для численной реализации полученной системы линейных алгебраических уравнений с полной, симметричной, положительно-определенной, плохо обусловленной матрицей предлагается использовать метод сопряженных градиентов. Приведены примеры восстановления гладких и разрывных начальных условий в одномерном и двумерном случаях, в том числе, и с введением «шума», характерного дополнительным условиям обратных задач.

Keywords: ретроспективная обратная задача теплопроводности, интеграл Пуассона, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, система линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей, метод сопряженных градиентов.

1. Введение

Обратные задачи описывают такие важные свойства исследуемых сред, как плотность и скорость распространения волн, параметры упругости, проводимость, диэлектрическая и магнитная проницаемость, а также физические свойства и местоположение неоднородностей в области недоступности. И поэтому

VASIL'EV V.I., KARDASHEVSKY A.M. ITERATIVE SOLUTION OF THE RETROSPECTIVE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM USING THE POISSON INTEGRAL.

© 2021 Васильев В.И., Кардашевский А.М.

Работа поддержана мегагрантом Правительства РФ (соглашение № 14.Y26.31.0013).

Поступила 2021 г., опубликована 2021 г.

интерес исследователей – математиков, физиков, геофизиков, врачей и, вообще, специалистов во многих областях науки и техники стремительно растет. Обратные задачи, как правило, не относятся к классу корректно поставленных задач. Типичными для них являются неединственность решения и нарушение требования непрерывной зависимости решения от входных данных. Решение обратных задач может помочь также определить начальное состояние, местоположение, форму и структуру включений, дефектов, источников (тепла, колебаний, напряжения, загрязнения). Неудивительно, что при таком широком наборе приложений теория обратных и некорректных задач с момента своего появления стала одной из наиболее стремительно развивающихся разделов современной вычислительной и прикладной математики. Многочисленные публикации по вопросам теоретического исследования корректности, условной корректности, разработки эффективных численных методов решения и актуальные приложения обратных задач обобщены в монографиях [1] – [12].

Особое место в обратных задачах теплопередачи занимает ретроспективная обратная задача определения начального условия $u(x, 0)$ по заданному распределению температуры тела в финальный момент времени $u(x, T)$. В работе [13] предложен итерационный метод численной реализации конечно-разностного аналога ретроспективной обратной задачи теплопроводности. В нем на каждой итерации решается дискретный аналог корректной прямой задачи теплопроводности. В статье [16] представлено сравнение численных методов решения обратной задачи: методы обратной адвекции, вариационные (сопряженные) и квазиобратности. Для численного решения ретроспективной обратной задачи для уравнения Бюргерса в работе [15] предложен вариационный метод, позволяющий свести исходную задачу к серии прямых корректных задач. В работе [14] предложен и теоретически обоснован итерационный метод граничных элементов. В статье [17] предложен итерационный алгоритм для устойчивой идентификации как начального условия, так и стационарного источника, основанный на последовательном решении прямых задач для уравнения теплопроводности, которые решаются на каждом шаге итерации с использованием метода граничных элементов. В работе [18] предложен модифицированный метод регуляризации Тихонова, в которой представлены правила апостериорного выбора параметра регуляризации. В работе [19] дискретизация обратной задачи для параболического уравнения выполняется по разностной схеме с неположительным весовым множителем, а в [20], предложен численный метод решения ретроспективной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с помощью метода сопряженных градиентов. Бессеточная численная схема решения обратной задачи теплопроводности предложена в статье [21]. В ней метод численного решения базируется на использовании фундаментального решения уравнения теплопроводности в качестве базисной функции. Численная реализация полученной системы линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей проведена с помощью стандартного метода регуляризации Тихонова.

Решение прямой задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности задается в виде интегральной формулы Пуассона (интеграла Пуассона). Ретроспективную обратную задачу теплопроводности в случае задания финального условия в виде финитной функции с помощью интеграла Пуассона

можно свести к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода [4], [6]. Дискретный аналог данного интегрального уравнения, полученный с помощью той или иной кубатурной формулы, приводит к системе линейных алгебраических уравнений. При измельчении сетки матрица быстро становится плохо обусловленной (сингулярной), и поэтому прямые методы работают только на достаточно крупной сетке. В [22] изучается алгоритм регуляризации приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Авторы в работе [23] для обхода этой ситуации, воспользовавшись высокой точностью квадратурной формулы для приближенного вычисления интеграла даже на крупной сетке, предложили метод многократного применения крупной сетки, каждая из которых решается прямым методом с последующим объединением результатов. В данной работе авторы предлагают использовать метод сопряженных градиентов, результаты которого изложены в данной статье.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ретроспективную обратную задачу Коши для уравнения теплопроводности, записанную в безразмерных переменных

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^p, \quad 0 \leq t < T.$$

Для определения единственного решения искомой функции задано значение искомой функции в финальный момент времени

$$(2) \quad u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

В задаче Коши (1) – (2) подлежит определению начальное условие $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Отметим, что уравнение (1) имеет аналитическое решение, которое в дальнейшем понадобится для оценки точности полученного численного решения

$$(3) \quad u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{(\beta + 4t)^p}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\beta + 4t}}, \quad \beta > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^p, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Пусть $\Omega \in \mathcal{R}^p$ представляет собой p -мерный куб,

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p), \quad 0 < x_\alpha < L, \quad \alpha = 1, \dots, p\}.$$

Предположим, что начальное условие $f(\mathbf{x})$ является финитной, отличной от нуля в некоторой подобласти $\Omega \subset \mathcal{R}^p$. Решение прямой задачи для однородного параболического уравнения (1) с начальным условием $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ задается в виде интеграла

$$(4) \quad u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi T})^p} \int_{\Omega} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{4T}} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

В кубе $\bar{\Omega}$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_\alpha, \quad \bar{\omega}_\alpha = \{x_{\alpha i} = -L + i_\alpha h, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, n; \quad h = 2L/n\}.$$

Если рассматриваемая задача не имеет аналитического решения, то для приближенного определения финального решения следует использовать дискретный аналог интеграла (4) в узлах введенной сетки

$$(5) \quad \varphi(\mathbf{x}_j) = \frac{h^p}{2\sqrt{\pi T}} \sum_{\mathbf{x}_i \in \bar{\omega}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j\|^2}{4T}} f(\mathbf{y}_i), \quad \mathbf{x}_j \in \bar{\omega}.$$

По явной, устойчивой квадратурной формуле (5) можно достаточно быстро, с необходимой точностью, находить приближенное решение прямой задачи Коши с заданным начальным условием $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$ в любой момент времени $= T$ на пространственной сетке $\bar{\omega}$, при этом вычислительный процесс остается устойчивым, а полученное численное решение имеет достаточно высокую точность даже на грубых сетках.

В случае ретроспективной обратной задачи (1) – (2), когда подлжит определению значение начального состояния искомой функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$ по заданному значению в финальный момент времени $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$ имеем систему линейных алгебраических уравнений для значений начального условия в узлах пространственной сетки

$$(6) \quad \sum_{\mathbf{x}_i \in \bar{\omega}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j\|^2}{4T}} \varphi(\mathbf{x}_i) = gf(\mathbf{y}_j), \quad \mathbf{y}_j \in \bar{\omega},$$

где $g = 2\sqrt{\pi T}/h^p$.

Систему линейных алгебраических уравнений (6) перепишем в матричной форме

$$(7) \quad \mathcal{A}_{ji}\varphi_i = gf_j, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad N = (n + 1)^p.$$

Здесь использованы обозначения

$$(8) \quad a_{ji} = e^{-s_{ji}}, \quad i = 0, \dots, N, \quad f_j = f(\mathbf{y}_j), \quad j = 0, \dots, N,$$

где

$$s_{ji} = \frac{1}{4T} \sum_{\alpha=1}^p (y_{\alpha j} - x_{\alpha i})^2, \quad j = \sum_{\alpha=1}^p (n + 1)^\alpha j_\alpha, \quad i = \sum_{\alpha=1}^p (n + 1)^\alpha i_\alpha.$$

Построенная таким образом матрица \mathcal{A} с элементами a_{ji} , $i = 0, \dots, N$; $j = 0, \dots, N$ является квадратной, плотной, симметричной, все ее элементы неотрицательные, элементы стоящие на главной диагонали равны единице, остальные элементы по мере удаления от главной диагонали убывают по экспоненциальному закону. Более того, она на решении системы уравнений (7) является положительно определенной. Следует отметить, что матрица \mathcal{A} не обладает свойством диагонального преобладания.

N	20	40	100	200	500
Det(A)	3.950e-52	-3.123e-317	-	-	-
Cond(A)	2.899e+9	3.332e+18	3.126e+18	1.990e+19	6.895e+19

ТАБЛИЦА 1. Определитель и число обусловленности матрицы \mathcal{A} для разных значений числа неизвестных N .

В таблице 1 представлены определитель $Det(A)$ и число обусловленности $Cond(A)$ матрицы \mathcal{A} , полученные при дискретизации интеграла Пуассона (7) для одномерного параболического уравнения (1) на разных пространственных сетках, т.е. в зависимости от N . Из таблицы видно, что при $N > 40$, прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений не работают, поскольку определитель матрицы \mathcal{A} обращается в машинный нуль. Для решения системы уравнений с матрицей, число обусловленности которой чрезвычайно велико, а определитель равен машинному нулю, целесообразно использовать метод сопряженных градиентов, который показал себя с наилучшей стороны.

3. Вычислительный эксперимент для одномерной ретроспективной обратной задачи Коши

Точность предложенного метода решения ретроспективной обратной задачи Коши для параболического уравнения проверим в одномерном случае на двух модельных задачах.

Модельная задача 1: Будем определять численное решение обратной задачи (1) – (2), имеющей точное решение с помощью решения системы линейных уравнений (7) – дискретного аналога интегрального уравнения (4), являющегося эквивалентной постановкой задачи (1) – (2). Для численной реализации системы линейных алгебраических уравнений (7) с симметричной и положительно определенной матрицей \mathcal{A} используем итерационный метод сопряженных градиентов. Итак, ищем решение следующей ретроспективной обратной задачи

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -L \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < T,$$

$$(10) \quad u(x, T) = \varphi(x), \quad -L \leq x \leq L,$$

где финальное условие задано в виде функции

$$(11) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4T}} e^{-\frac{x^2}{1+4T}} \geq 0, \quad -L \leq x \leq L.$$

В этом случае ретроспективная обратная задача теплопроводности (9) – (10) имеет искомое начальное условие, задаваемое формулой

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \geq 0, \quad -L \leq x \leq L$$

– частный случай решения аналитического (3) при $\beta = 1$.

Модельная задача 2. Рассмотрим в качестве искомого начального условия негладкую функцию с двумя точками разрыва $x = -L/3$ и $L/3$:

$$(12) \quad u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [-L, -L/3) \cup (L/3, L], \\ 1, & \text{при } -L/3 < x < L/3. \end{cases}$$

Расчеты проводились при $L = 6$, $T = 1$, $N = 240$. На рис. 1 представлены результаты вычислительного эксперимента по восстановлению предложенным итерационным методом гладкого (А) и разрывного начальных условий (С). На рис. 1 (А) приведены графики: u_0 – гладкого начального условия $f(x)$, u_T – финального условия $\varphi(x)$ в момент времени T , y – восстановленного начального условия и погрешность идентификации начального условия $y - u_0$. На

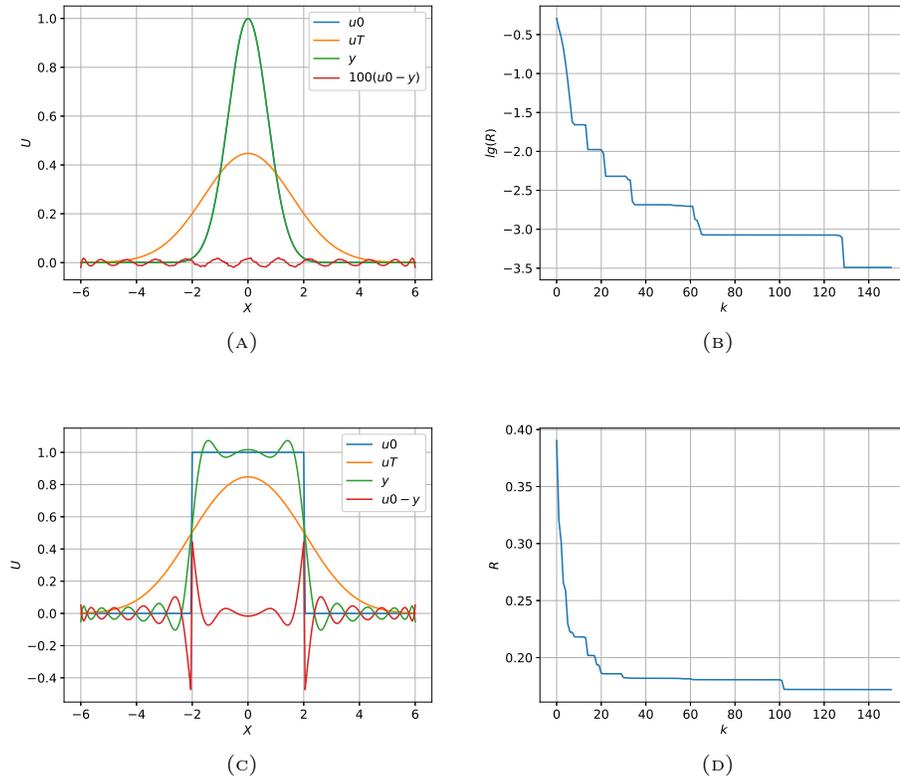


Рис. 1. Графики восстановления гладкого и разрывного начальных условий

рис. 1 (B) представлен график зависимости десятичного логарифма относительной среднеквадратичной ошибки определения начального условия $lg(R)$ от номера итерации, вычисленной по формуле

$$(13) \quad R = \frac{\|y^0 - \varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Рассматриваемая задача имеет точное решение (11), начальное условие восстанавливается с чрезвычайно высокой точностью. Чем больше итераций, тем выше точность. Примерно с 130 итерации точность восстановления начального условия не уменьшается, поскольку достигнута точность аппроксимации квадратурной формулы (6). Высокая точность вычислительного метода получена также за счет достаточно маленького шага сетки.

Аналогичные численные результаты, полученные при численной идентификации разрывного начального условия (13) представлены на рис. 1 (C) и рис. 1 (D). Как и ожидалось, задание негладкой функции в качестве искомого начального условия значительно ухудшает точность предложенного метода за

счет погрешности аппроксимации, как финального условия (5), так и квадратурной формулы (6) в окрестности точек разрыва. Несмотря на это, в общем, получили неплохое восстановление разрывного начального условия.

4. Вычислительный эксперимент при неточном задании финального условия

Поскольку на практике решения прикладных обратных задач, имеем дело с результатами измерения значения дополнительного условия, то вследствие погрешности измерительных приборов (сенсоров), условие переопределения задается с некоторой погрешностью. Ретроспективная обратная задача теплопроводности не исключение, поэтому введем возмущение задаваемого значения решения в финальный момент времени с помощью генератора случайных чисел.

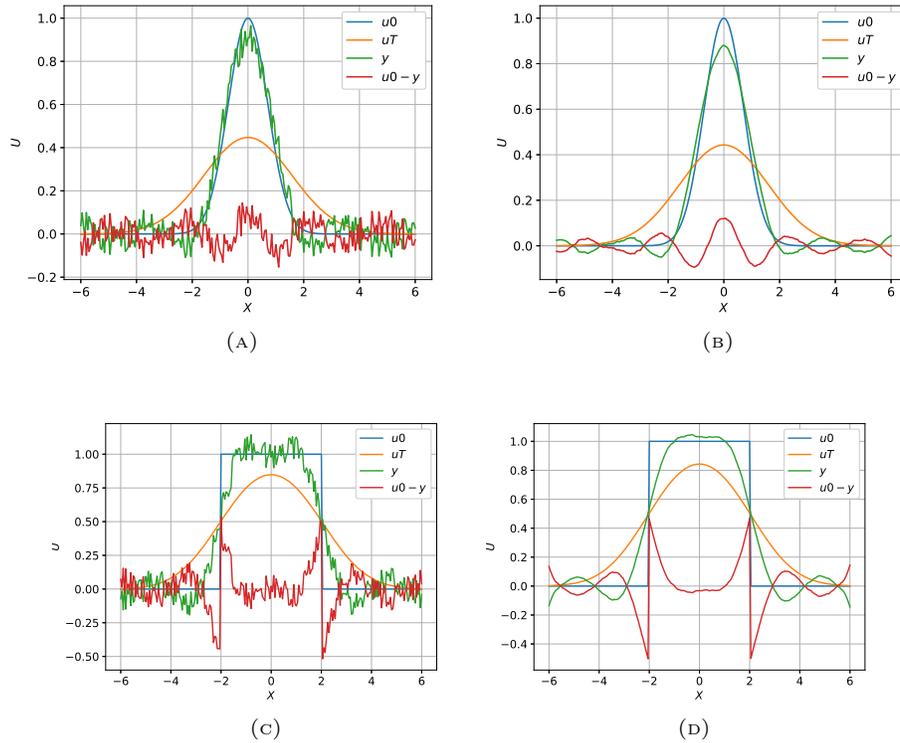


Рис. 2. Графики восстановления гладкого и разрывного начальных условий при задании возмущенных финальных условий

Возмущение финального условия осуществим с помощью следующей функции

$$(14) \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \sigma \cdot \text{rand}(-0.5, 0.5), \quad x \in \omega,$$

где $\sigma = 0,001$ – амплитуда задаваемой ошибки $\text{rand}(-0.5, 0.5)$ – генератор случайных чисел, равномерно распределенных на интервале $(-0.5, 0.5)$. Для

задания более гладкого дополнительного условия в конечный момент времени $\varphi(x)$ используем фильтр Савицкого-Голея [24], который известен как цифровой фильтр с минимальным искажением исходных данных

$$(15) \quad \tilde{\varphi}(x) = \text{savgolfilter}(\varphi(x), 15, 1), \quad x \in \bar{\omega}.$$

Расчеты проводились при $L = 6$, $T = 1$, $N = 240$. На рис. 2 представлены результаты численного решения модельных задач 1 и 2 с возмущенными финальными условиями, а также со сглаженными с помощью фильтра Савицкого-Голея возмущенными финальными условиями. Идентификации подлежат гладкое и разрывное начальные условия.

На рис. 2 (А) приведены графики: u_0 – гладкого начального условия ($f(x)$), u_T – возмущенного финального условия ($\varphi(x)$), y – восстановленного начального условия и ошибка идентификации начального условия $y - u_0$. Итерации продолжались до тех пор, пока погрешность убывала. Всего произведено 6 итераций в обоих случаях. Восстановленное начальное условие сильно осциллирует. На рис. 2 (В) представлены аналогичные графики в случае использования сглаживания фильтра Савицкого и Голея (15). Сглаживание возмущенного финального условия позволяет уменьшить осцилляции восстановленного начального условия. При этом амплитуда колебаний сохраняется.

На рис. 2 С и рис. 2 D представлены аналогичные численные результаты, полученные при идентификации разрывного начального условия. Также осуществлено 6 итераций пока погрешность убывала. Эти численные примеры подтверждают высокую чувствительность к случайным ошибкам задания финального условия в ретроспективной задаче теплопроводности, а сглаживание финального условия, заданного финального условия со случайными ошибками, существенно уменьшает осцилляции идентифицируемого начального условия, и это несущественно влияет на точность его определения.

5. Численная апробация итерационного метода в двумерном случае

Проведем апробацию предложенного итерационного метода численного решения на двух двумерных модельных задачах.

Модельная задача 3. Сначала приведем результаты численной реализации на двумерной задаче Коши с точным решением

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad -l \leq x \leq l, \quad -l \leq y \leq l, \quad 0 \leq t < T,$$

$$(17) \quad u(x, y, T) = f(x, y), \quad -l \leq x \leq l, \quad -l \leq y \leq l,$$

где финальное условие задано в виде функции

$$(18) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+4T}} e^{-\frac{x^2+y^2}{1+4T}}.$$

В этом случае для ретроспективной обратной задачи теплопроводности существует точное аналитическое решение, задаваемое формулой

$$(19) \quad u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2+y^2}{1+4t}}.$$

На рис. 3 представлены результаты численного восстановления гладкого начального условия на примере задачи Коши с точным аналитическим решением.

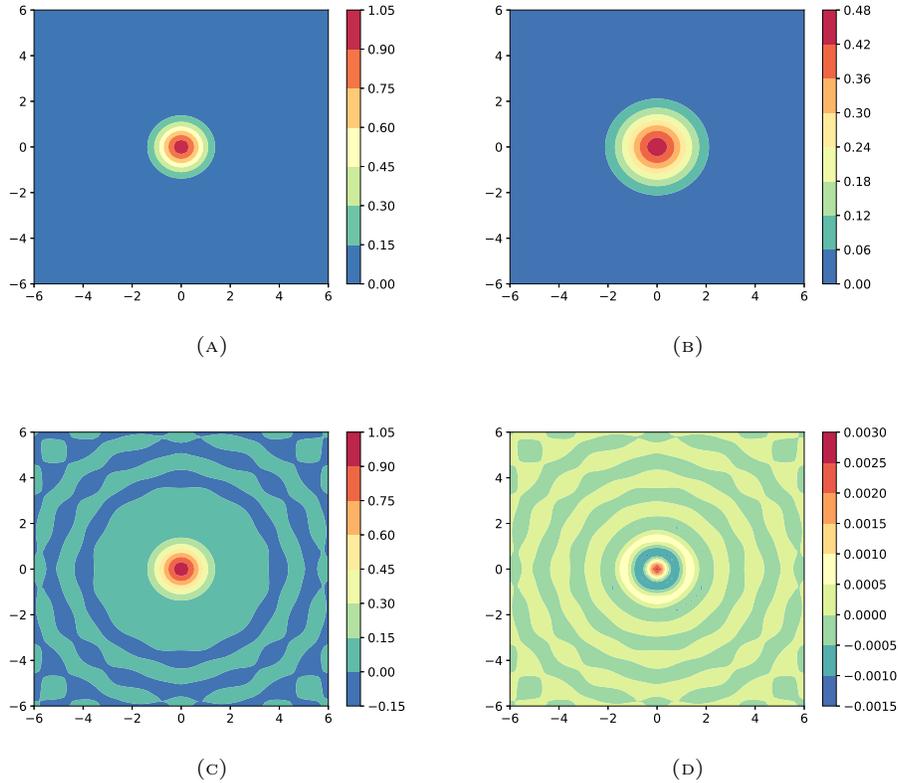


Рис. 3. Восстановление гладкого начального условия двумерной ретроспективной обратной задачи с точным решением

Расчеты проводились при $N = 60$; $L = 6$; $T = 0, 3$. Пространственная сетка квадратная $x_i = -L + ih$, $y_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = 2L/N$.

На рис. 3 (А) и рис. 3 (В), соответственно, приведены графики искомого точного начального $f(x, y) = u(x, y, 0)$ и заданного точного финального условия $\varphi(x, y) = u(x, y, T)$. На рис. 3 (С) приведен график восстановленного начального условия, а на рис. 3 (D) представлена ошибка определения начального условия. Проведено 50 итераций. Из последнего графика видно, что начальное условие с помощью предложенного итерационного метода найдено с высокой точностью. Ошибка на такой грубой сетке составляет менее 0,5%.

Модельная задача 4. Проведем вычислительный эксперимент по итерационному восстановлению разрывного начального условия, имеющей форму толстостенного цилиндра единичной высоты с внутренним и внешними радиусами 2 и 4, соответственно

$$(20) \quad u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 4 < x^2 + y^2 < 16, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

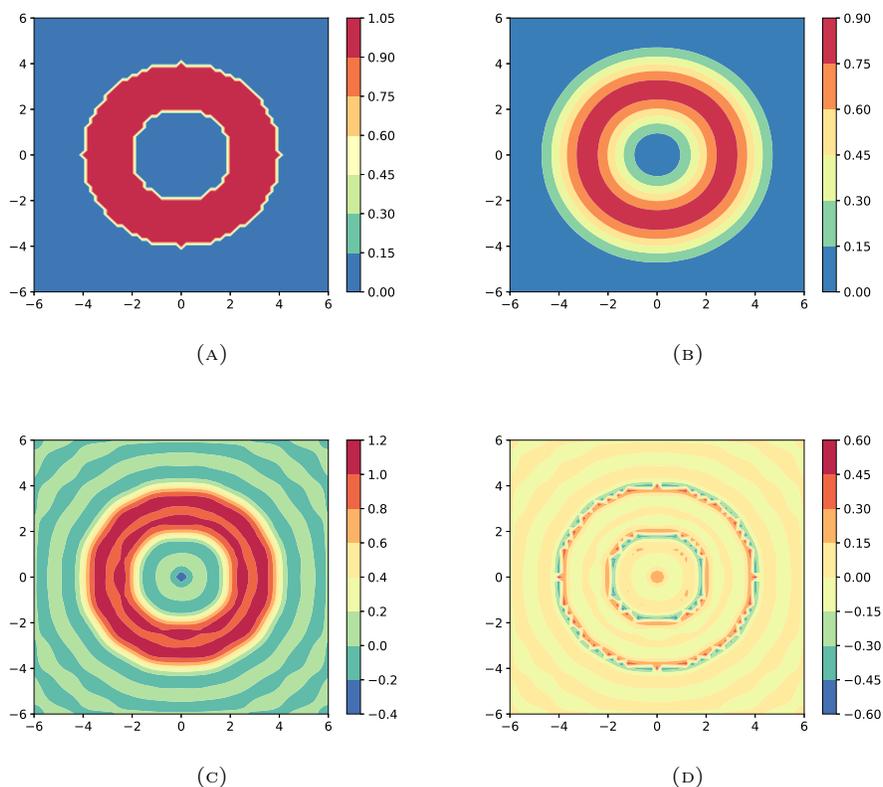


Рис. 4. Восстановление разрывного начального условия двумерной ретроспективной обратной задачи

На рис. 4 представлены результаты восстановления разрывного начального условия на примере модельной ретроспективной обратной задачи Коши, найденное с помощью итерационного метода сопряженных градиентов. На рис. 4 (A) приведен график искомого начального условия. Финальное условие рис. 4 (B) найдено по формуле (5) – дискретного аналога интеграла Пуассона (4). Восстановленное разрывное начальное условие приведено на рис. 4 (A), а ошибка определения начального условия – на рис. 4 (D). Потребовалось проведение 50 итераций. Пространственная сетка та же самая, что и в предыдущем примере. В окрестностях линий разрыва искомого начального условия точность восстановления достаточно низкая, вследствие грубости выбранной сетки. Использование мелкой сетки проблематично, так как требуется большие вычислительные ресурсы.

Теперь введем возмущение задаваемого значения решения в финальный момент времени с помощью генератора случайных чисел (18). В расчетах брали $\sigma = 0.001$ при тех же входных данных, что и в предыдущих примерах восстановления гладкого и разрывного начальных условий $N = 60$; $L = 6$; $T = 0,3$. На рис. 5 представлены результаты итерационного метода восстановления точ-

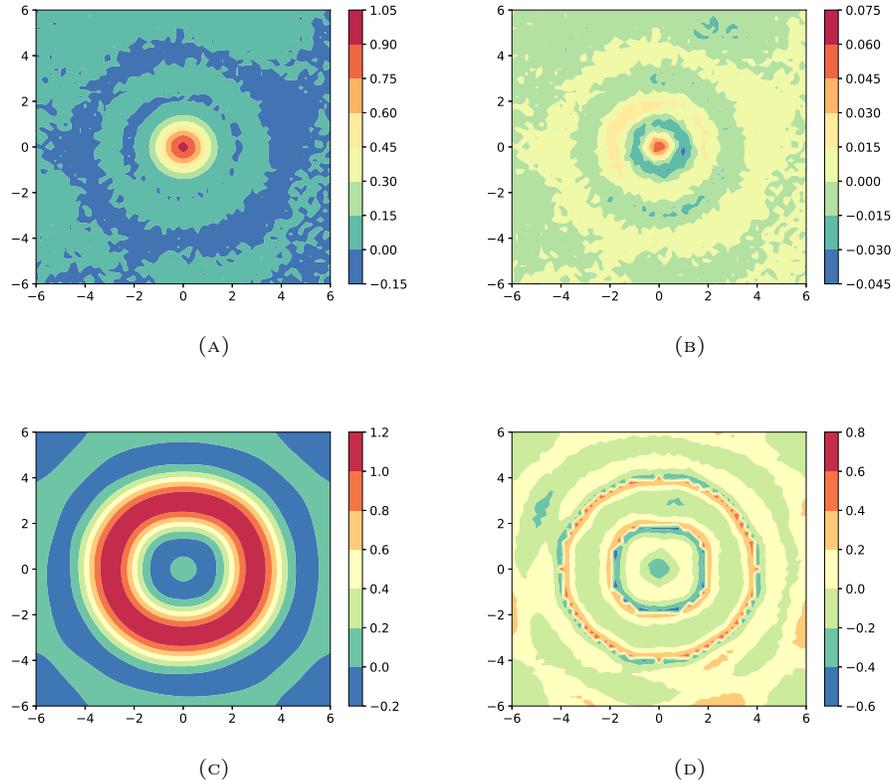


Рис. 5. Восстановление гладкого и разрывного начальных условий двумерной ретроспективной обратной задачи при наличии «шума» в задании финального условия

ного и разрывного начальных условий в тех случаях, когда финальные условия заданы с небольшим «шумом». Итерации продолжались до тех пор, пока погрешность убывала. Всего произведено 6 итераций в обоих случаях. На рис. 5 (А) приведен график восстановленного начального условия при задании возмущенного точного финального условия, вычисленное с помощью итерационного метода сопряженных градиентов. Ошибка определения начального условия приведена рис. 5 (В) и составила чуть меньше 9%. Восстановленное разрывное условие представлено на рис. 5 (С), а на рис. 5 (D) приведен график ошибки определения начального условия. Пространственная сетка достаточно грубая, поэтому точность определения разрывного начального условия невысокая.

6. Заключение

Предложено итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности, заключающийся в численной реализации дискретного аналога

интеграла Пуассона с помощью итерационного метода сопряженных градиентов. Проведенные расчеты на модельных примерах показали их высокую точность и вычислительную эффективность. Метод позволяет восстанавливать не только гладкие, но и разрывные начальные условия. Он достаточно хорошо работает при наличии небольших возмущений финального условия.

REFERENCES

- [1] R. Lattes and J.L. Lions, *The Method of Quasi-Reversibility*, Amer. Elsevier Publ., New York, 1969.
- [2] В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, Наука, Москва, 1978.
- [3] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва, 1979.
- [4] А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов, *Интегральные уравнения*, Изд-во МГУ, Москва, 1989.
- [5] А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола, *Численные методы решения некорректных задач*, Наука, Москва, 1990.
- [6] А.М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, Изд-во МГУ, Москва, 1994.
- [7] М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.Т. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, Москва, 1980.
- [8] В.Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, АН СССР, Москва, 1984.
- [9] А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, *Численные методы решения обратных задач математической физики*, Издательство ЛКИ, Москва, 2009.
- [10] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2018.
- [11] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, Dekker, Marcel, 2000.
- [12] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2006.
- [13] А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев, *Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности*, Матем. моделирование, **9:5** (1997), 119–127.
- [14] D. Lesnic, L. Elliott, D. Ingham, *An iterative boundary element method for solving the backward heat conduction problem using an elliptic approximation*, Inverse Problems in Engineering, **6:4**, (1998), 255–279. DOI:10.1080/174159798088027679.
- [15] А. И. Короткий, И. А. Цепелев, *Решение ретроспективной обратной задачи для одной нелинейной эволюционной модели*, Тр. ИММ УрО РАН, **9:2**, (2003), 73–86.
- [16] A. Ismail-Zadeh, A. Korotkii, G. Schubert, I. Tsepelev, *Numerical techniques for solving the inverse retrospective problem of thermal evolution of the Earth interior*, Computers & Structures, **87:11**, (2009), 802–811. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.01.005.
- [17] B.T. Johansson, D. Lesnic, *A procedure for determining a spacewise dependent heat source and the initial temperature*, Applicable Analysis, **87:3**, (2008), 265–276. Doi:10.1080/00036810701858193.
- [18] Zhenyu Zhao, Zehong Meng, *A modified Tikhonov regularization method for a backward heat equation*, Inverse Problems in Science and Engineering. **19:8**, (2011), 1175–1182. DOI: 10.1080/17415977.2011.605885.
- [19] V.I. Vasil'ev, A.M. Kardashevsky, P.V. Sivtsev, *Computational experiment on the numerical solution of some inverse problems of mathematical physics*, IOP Conf. Series: Mater. Sci. Eng. (2016), 158, 012093. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012093.
- [20] V.I. Vasil'ev, A.M. Kardashevsky, *Iterative Solution of the Retrospective Inverse problem for a Parabolic Equation Using the Conjugate Gradient Method*, LNCS, (2017), 10187, 698–705. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-57099-0-80>.
- [21] N.S. Mera, *The method of fundamental solutions for the backward heat conduction problem*, Inverse Problems in Science and Engineering Vol. **13:1**, (2005), 65–78. DOI: 10.1080/10682760410001710141.
- [22] В.П. Танана, А.И. Сидикова, *Об оценке погрешности приближенного решения, вызванной дискретизацией интегрального уравнения первого рода*, Труды ИММ УрО РАН, **22:1**, (2016), 263–270, DOI: 10.1134/S0081543817090231.

- [23] В.И. Васильев, А.М. Кардашевский, *Численное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности с помощью интеграла Пуассона*, Сиб. журн. индустр. матем., **21**:3, (2018), 26–36. DOI: <https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.303>.
- [24] A. Savitzky and Marcel J.E. Golay, *Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures*, Anal. Chem., **36**:8, 1627–1639. DOI:10.1021/ac60214a047.

Васильев Василий Иванович

Россия, Якутск, Северо-Восточный федеральный университет
vasvasil@mail.ru

Кардашевский Анатолий Михайлович

Россия, Якутск, Северо-Восточный федеральный университет
kardam123@gmail.com

VASIL'EV V.I., KARDASHEVSKY A.M.
NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
STR. BELINSKOGO, 58,
677000, YAKUTSK, RUSSIA

Email address: vasvasil@mail.ru, kardam123@gmail.com