

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том ..., стр. ...-... (2021)
DOI

УДК 512.55
MSC 16P10

О СЖАТЫХ ГРАФАХ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ КОНЕЧНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Е.В. Журавлев, О.А. Филина

ABSTRACT. We describe the compressed zero-divisor graphs of a commutative finite local rings R of characteristic p with Jacobson radical J such that $J^4 = (0)$, $F = R/J \cong GF(p^r)$ and $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$ or $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$.

Keywords: finite ring, local ring, zero-divisor graph.

1. ВВЕДЕНИЕ

Все кольца, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, ассоциативными, коммутативными и содержат единицу. Обозначим через $J = J(R)$ и R^* радикал Джекобсона и группу обратимых элементов кольца R , $F = GF(q)$ – конечное поле из $q = p^r$ элементов, p – простое число.

Графом делителей нуля $\Gamma(R)$ кольца R называется граф, вершинами которого являются элементы R и две вершины x, y , не обязательно различные, соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ (см. [1, 2]).

Пусть S – коммутативная полугруппа с нулем, $x \in S$ и

$$\text{Ann}(x) = \{y \in S \mid xy = 0\}.$$

Введем отношение эквивалентности:

$$\text{для любых } x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow \text{Ann}(x) = \text{Ann}(y).$$

Класс эквивалентности элемента $x \in S$ обозначим $[x]$, а соответствующее фактормножество $S/\sim$.

ZHURAVLEV E.V., FILINA O.A., ON ZERO DIVISOR GRAPHS OF FINITE COMMUTATIVE LOCAL RINGS.

© 2021 ЖУРАВЛЕВ Е.В., ФИЛИНА О.А..

Поступила 2021 г., опубликована 2021 г.

Отношение $\sim$ является конгруэнцией на S : для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ если $x_1 \sim x_2$ и $y_1 \sim y_2$, то $x_1 x_2 \sim y_1 y_2$. Следовательно, мы можем рассматривать фактормножество $S/\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$.

Рассмотрим граф $\Gamma(S/\sim)$, вершинами которого являются элементы $S/\sim$ и две вершины $[x]$, $[y]$, не обязательно различные, соединяются ребром тогда и только тогда, когда $[x][y] = [0]$ (равносильно $xy = 0$). Такие графы называются сжатыми графами делителей нуля (см. [3, 4]). Если $[x] \in \Gamma(S/\sim)$, то либо для любых $a, b \in [x]$ $ab = 0$, либо для любых $a, b \in [x]$ $ab \neq 0$. Таким образом, всякая вершина $[x]$ с петлей в $\Gamma(S/\sim)$ является полным подграфом в $\Gamma(S)$, все вершины которого имеют петли, а всякая вершина $[x]$ без петли в $\Gamma(S/\sim)$ это пустой подграф $\Gamma(S)$, то есть, множество изолированных вершин.

Кольцо R называется локальным, если $R/J = F$ – поле. Все делители нуля локального кольца образуют радикал J , который является нильпотентным идеалом некоторого индекса нильпотентности K , $K \in \mathbb{N}$, и всякий элемент локального кольца является либо обратимым, либо нильпотентным. Известно, что конечное коммутативное кольцо с единицей является прямой суммой локальных колец (см. [5, 6]).

Предложение 1. [5, 6, 7] Пусть R – локальное кольцо характеристики p , $R/J = GF(p^r) = F$ и K – индекс нильпотентности J . Тогда

- (1) J^k/J^{k+1} является конечномерным векторным пространством над F для всякого $1 \leq k \leq K-1$,
- (2) существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|R| = p^{nr}$ и $|J| = p^{(n-1)r}$.

Графы делителей нуля впервые были определены Д. Андерсоном, П. Ливингстоном и И. Беком в работах [1, 2]. Исследования в данной тематике связаны с описанием колец, графы делителей нуля которых удовлетворяют некоторым условиям. Например, полностью описаны кольца с планарными графами делителей нуля [8, 9, 10, 11], кольца, имеющие эйлеровы графы делителей нуля [12], и конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля [13]. В работах [14, 15] получено описание многообразий колец, в которых конечные кольца, имеющие изоморфные графы делителей нуля, изоморфны друг другу. В [16] изучены коммутативные конечные кольца с сжатым графом делителей нуля порядка 2, а также найдены все графы порядка 3, которые являются графами делителей нуля некоторого конечного кольца.

В связи с этим актуальна задача по изображению графов конечных колец. В работах [3, 4, 17] были описаны графы делителей нуля коммутативных локальных колец R порядка p^{nr} , при $nr \leq 5$. Авторы воспользовались классификацией конечных колец, предложенной в работах [18, 19, 20, 21]. Зная правила умножения элементов колец, А. Тадэиенфа и А. Ашрафи использовали представление графа делителей нуля в виде объединения и суммы полных и пустых графов (см. [17]). Н. Блумфилд (см. [4]) привел в качестве основного результата геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$ таких колец.

В настоящее время локальные кольца порядка p^{nr} , $nr > 5$, классифицированы лишь в некоторых частных случаях. Например, в работах [22, 23] с точностью до изоморфизма описаны все локальные кольца R характеристики p каждого из следующих типов:

- (1) $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$.
- (2) $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$.

Это кольца порядка p^{6r} . В работе [24] изучены сжатые графы колец характеристики 2 с условием $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$. Цель данной работы – продолжить исследования, начатые в [24], и указать $\sim$ -классы и геометрическое изображение графов $\Gamma(R/\sim)$ колец обоих типов при любом p .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть R – локальное кольцо характеристики p и $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$. Тогда кольцо R представимо в виде суммы

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$ – базис J над F , причем $u_1, u_2, u_3 \in J \setminus J^2$, $v \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$ (см. [22]). Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij} v + b_{ij} w \quad \text{и} \quad u_i v = c_{i1} w$$

для некоторых $a_{ij}, b_{ij}, c_{i1} \in F$, $i, j = \overline{1, 3}$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$$

– матрицы умножения кольца R , δ_1 – некоторый элемент $F^* \setminus F^{*2}$. Все попарно неизоморфные локальные кольца, рассматриваемые в данной ситуации, определяются следующими матрицами (см. [22]):

$$\begin{aligned} (1) \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ (2) \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ (3) \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{при } p = 2; \\ (4) \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } d \in \{1, \delta_1\}. \end{aligned}$$

Пусть R – локальное кольцо характеристики p и $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$. Тогда кольцо R представимо в виде суммы

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – базис J над F , причем $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2 \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$ (см. [22, 23]). Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v_j \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij}^{(1)} v_1 + a_{ij}^{(2)} v_2 + b_{ij} w \quad \text{и} \quad u_i v_j = c_{ij} w$$

для некоторых $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, b_{ij}, c_{ij} \in F, i, j = \overline{1, 2}$. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

– матрицы умножения кольца R .

Далее введем вспомогательные определения и укажем список всех попарно неизоморфных колец, рассматриваемых в данной ситуации (см. [22, 23]).

Пусть

$$M_1 = \{z \in F^* \mid \forall x \in F \ z(1 + 3\delta_1 x^2) - x\delta_1(3 + \delta_1 x^2) \neq 0\}.$$

Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{K}_1 = \{\varphi_{a,c}^\pm : M_1 \rightarrow F\}, \quad \varphi_{a,c}^\pm(z) = \frac{\pm az(a^2 + 3\delta_1 c^2) - c\delta_1(3a^2 + \delta_1 c^2)}{a(a^2 + 3\delta_1 c^2) \mp cz(3a^2 + \delta_1 c^2)},$$

где $a = 0, c = 1$ или $a = 1, c \in F$.

Относительно бинарной операции $(\phi_1 \circ \phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ ($\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K}_1$) данное множество образует группу, которая действует на множестве M_1 (см. [22]). Множество M_1 разбивается на непересекающиеся орбиты, обозначим через $\mathcal{K}_1 \setminus M_1$ множество их представителей.

Пусть δ_2 такой элемент F , что $\forall x \in F \ \delta_2 \neq x + x^2$. Пусть $\mu = a^2 c + ac^2 + c^3(1 + \delta_2)$, $\eta = a^3 + ac^2 \delta_2 + c^3 \delta_2$,

$$M_2 = \{z \in F \mid \forall s \in \{0, 1\} \ \forall a, c \in F, \ a \neq 0 \text{ или } c \neq 0, \ (\eta(1 + s) + \mu \delta_2)z + \eta \neq 0\}.$$

Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{K}_2 = \{\varphi_{s,a,c} : M_2 \rightarrow F\}, \quad \varphi_{s,a,c}(z) = \frac{(\eta + \mu s)z + \mu}{(\eta(1 + s) + \mu \delta_2)z + \eta},$$

где $s \in \{0, 1\}$, $a, c \in F$, $a \neq 0$ или $c \neq 0$. Относительно бинарной операции $(\phi_1 \circ \phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ ($\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K}_2$) это множество образует группу, которая действует на множестве M_2 (см. [23]). Пусть $\mathcal{K}_2 \setminus M_2$ – множество представителей орбит.

При $p = 2$ все попарно неизоморфные локальные кольца определяются следующими четверками матриц (см. [23]):

- (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (2) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (3) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (4) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (5) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix};$
- (6) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 + \delta_2 z & 1 \end{pmatrix},$

где $z \in \mathcal{K}_2 \setminus M_2$;

$$(7) \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(8) \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(9) \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где z – такой элемент F , что $z + 1 \notin (F^*)^3$, $z \neq 1$.

При $p \neq 2$ все попарно неизоморфные локальные кольца определяются следующими четверками матриц (см. [22]):

$$(1) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ при } p = 3;$$

$$(4) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(5) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix};$$

$$(6) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(7) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta & 1 \end{pmatrix},$$

где $\zeta \neq \pm 1$, $\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \notin (F^*)^3$;

$$(8) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \delta_1 \end{pmatrix},$$

где $\xi \in \mathcal{K}_1 \setminus M_1$;

$$(9) \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. ГРАФЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

Приведем несколько полезных свойств $\sim$ -классов (см. [4]).

Предложение 2. Пусть R – локальное кольцо и $A \subseteq R$. Если $x \in \text{Ann}(A)$, то $[x] \in \text{Ann}(A)$. То есть, аннулятор всякого подмножества кольца R является объединением $\sim$ -классов.

Предложение 3. Пусть R – локальное кольцо, $J^K = 0$, $J^{K-1} \neq 0$, $K \in \mathbb{N}$.

- (1) Если $x \in J^{K-1} \setminus \{0\}$, то $[x] = \text{Ann}(J) \setminus \{0\}$.
- (2) Если $x \in J \setminus \{0\}$, $\alpha \in R^*$, $y \in \text{Ann}(J)$, причем элемент $\alpha x + y \neq 0$, то $\text{Ann}(x) = \text{Ann}(\alpha x + y)$.

Рассмотрим сжатый граф $\Gamma(R/\sim)$ локального кольца R и введем дополнительные обозначения, связанные с группировкой схожих вершин графа. Если в графе $\Gamma(R/\sim)$ содержится полный подграф, вершины которого имеют петли, то мы будем изображать этот подграф с петлями как одну вершину с петлей. Если в множестве вершин графа $\Gamma(R/\sim)$ содержится подмножество попарно не смежных вершин без петель, то мы будем изображать соответствующий подграф как одну вершину без петли. Если же речь идет о группировке вершин графа $\Gamma(R/\sim)$, отличных от двух описанных выше ситуаций, то мы будем изображать соответствующий подграф как одну вершину с пунктирной петлей. При этом для каждой такой вершины-группы внизу рисунка мы укажем условие, при котором ее элементы соединяются ребром, в частности, петлей. Если группа вершин, обозначенная описанным выше способом, соединяется сплошным ребром с какой-либо вершиной $[x]$ графа $\Gamma(R/\sim)$, то это означает, что каждая вершина из группы смежна этой вершине $[x]$. Аналогично, если группа вершин, обозначенная описанным выше способом, соединяется пунктирным ребром с какой-либо вершиной $[x]$ графа $\Gamma(R/\sim)$, то это означает, что вершина из группы смежна этой вершине $[x]$ при выполнении определенного условия, указанного внизу рисунка.

Для любого локального кольца R очевидно $[0] = \{0\}$ и $[1] = R^*$. Для лаконичности изложения в геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$ мы не будем включать вершины $[0]$ и $[1]$. Очевидно, что $[0]$ смежна со всеми вершинами графа $\Gamma(R/\sim)$, а $[1]$ смежна только с $[0]$.

Теорема 1. Пусть R – локальное кольцо характеристики p и

$$J^4 = 0, \dim_F J/J^2 = 3, \dim_F J^2/J^3 = 1, \dim_F J^3 = 1,$$

где $F = R/J = GF(p^r)$. Тогда, в дополнение к $[0] = \{0\}$ и $[1] = R^*$, $R/\sim$ определяется одним из нижеуказанных множеств:

- (1) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw$, $[v] = F^*v + Fu_2 + Fu_3 + Fw$, $[w] = (Fu_2 + Fu_3 + Fw) \setminus \{0\}$;
- (2) $[u_1 + m_i u_2] = F^*(u_1 + m_i u_2) + Fu_3 + Fv + Fw$, $[u_2 + n_i v] = F^*(u_2 + n_i v) + Fu_3 + Fw$, $[v] = F^*v + Fu_3 + Fw$, $[w] = (Fu_3 + Fw) \setminus \{0\}$;
- (3) $[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] = F^*(u_1 + s_i u_2 + l_j u_3) + Fv + Fw$, для всяких $s_i, l_j \in F$, $[u_2 + n_i u_3 + k_j v] = F^*(u_2 + n_i u_3 + k_j v) + Fw$, для всяких $n_i, k_j \in F$, $[u_3 + m_i v] = F^*(u_3 + m_i v) + Fw$, для всякого $m_i \in F$, $[v] = F^*v + Fw$, $[w] = F^*w$;
- (4) $[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] = F^*(u_1 + s_i u_2 + l_j u_3) + Fv + Fw$, для всяких $s_i, l_j \in F$, $[u_2 + n_i u_3 + k_j v] = F^*(u_2 + n_i u_3 + k_j v) + Fw$, для всяких $n_i, k_j \in F$, $[u_3 + m_i v] = F^*(u_3 + m_i v) + Fw$, для всякого $m_i \in F$, $[v] = F^*v + Fw$, $[w] = F^*w$.

Для каждого из представленных выше случаев геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$, за исключением вершин $[0]$ и $[1]$, имеет вид:

(1)

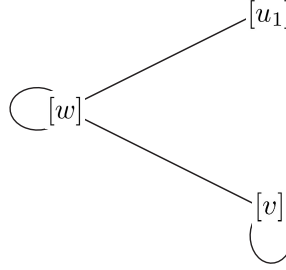


рис. 1

(2)

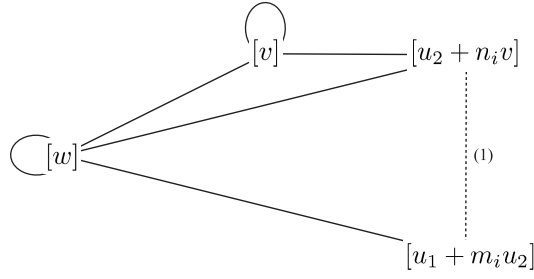
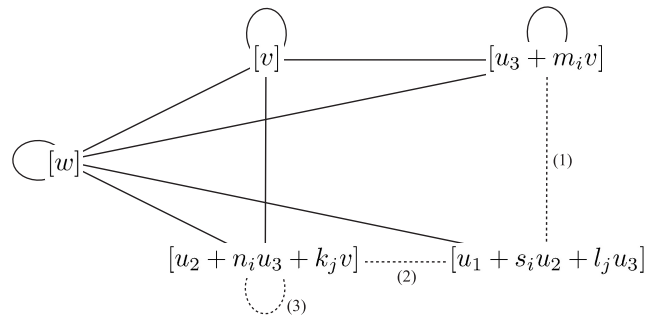
(1) если $m_i + n_j = 0$.

рис. 2

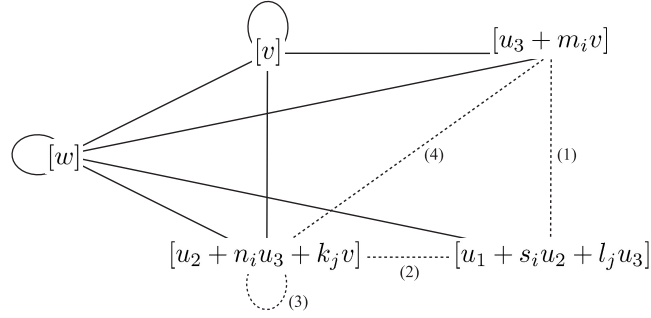
(3)



- 1) если $m_i + s_j = 0$;
 2) если $k_j + l_\beta + n_i s_\alpha = 0$.
 3) если $n_\alpha + n_\beta = 0$.

рис. 3

(4)



- 1) если $m_i + dl_j = 0$;
- 2) если $k_j + s_\alpha + dl_\beta n_i = 0$;
- 3) если $dn_i n_j + 1 = 0$;
- 4) если $n_i = 0$.

рис. 4

Доказательство. При нахождении графа $\Gamma(R/\sim)$ кольца R будем действовать по следующему алгоритму:

- (1) Указываем разбиение кольца на $\sim$ -классы.
- (2) Находим аннулятор каждого из $\sim$ -классов, при этом замечая, что все элементы одного класса имеют равные аннуляторы и элементы из разных классов имеют разные аннуляторы. В силу предложения 3, например, вместо множества $F^*u_1 + Fv + Fw$ мы можем рассматривать множество $u_1 + Fv + Fw$.
- (3) Замечаем, что порядок объединения рассматриваемых классов равен порядку кольца, то есть q^6 .
- (4) Находим разбиение аннуляторов $\sim$ -классов на классы эквивалентности, которое существует в силу предложения 2, и приводим геометрическое изображение графа.

Произвольные элементы поля F будем обозначать через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \beta', \gamma'$, а элементы радикала J – через x и x' . Например, для кольца $R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw$:

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \beta v + \gamma w;$$

$$x' = \alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3 + \beta' v + \gamma' w.$$

Далее подробно рассмотрим каждый случай.

Случай 1. Пусть

$$\begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3 u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w, \quad \begin{pmatrix} u_1 v \\ u_2 v \\ u_3 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Докажем, что

$$\begin{aligned} R &= [1] \cup [u_1] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \\ [u_1] &= F^*u_1 + Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw, \\ [v] &= F^*v + Fu_2 + Fu_3 + Fw, \\ [w] &= (Fu_2 + Fu_3 + Fw) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \beta\alpha'_1 + \alpha_1\beta' = 0, \alpha_1\alpha'_1 = 0.$$

Если $x \in u_1 + Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw$, то $\alpha_1 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \beta\alpha'_1 + \beta' = 0, \alpha'_1 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_1 = 0, \beta' = 0$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fw.$$

Если $x \in v + Fu_2 + Fu_3 + Fw$, то $\alpha_1 = 0, \beta = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x \in (Fu_2 + Fu_3 + Fw) \setminus \{0\}$, то $\alpha_1 = \beta = 0, \alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_3 \neq 0$ или $\gamma \neq 0$, и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = J.$$

Далее,

$$|R^*| + |F^*u_1 + Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw| + |F^*v + Fu_2 + Fu_3 + Fw| + \\ + |(Fu_2 + Fu_3 + Fw) \setminus \{0\}| + |\{0\}| = (q^6 - q^5) + (q-1)q^4 + (q-1)q^3 + q^3 - 1 + 1 = q^6.$$

Итак,

$$R = [1] \cup [u_1] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\text{Ann}[u_1] = [w] \cup [0],$$

$$\text{Ann}[v] = [w] \cup [v] \cup [0],$$

$$\text{Ann}[w] = J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 1.

Случай 2. Пусть

$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w, \quad \begin{pmatrix} u_1v \\ u_2v \\ u_3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Докажем, что

$$R = [1] \bigcup_{m_i \in F} [u_1 + m_iu_2] \bigcup_{n_i \in F} [u_2 + n_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$[u_1 + m_iu_2] = F^*(u_1 + m_iu_2) + Fu_3 + Fv + Fw,$$

$$[u_2 + n_iv] = F^*(u_2 + n_iv) + Fu_3 + Fw,$$

$$[v] = F^*v + Fu_3 + Fw,$$

$$[w] = (Fu_3 + Fw) \setminus \{0\}.$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha'_2 + \beta\alpha'_1 + \alpha_1\beta' = 0, \alpha_1\alpha'_1 = 0.$$

Если $x \in u_1 + m_iu_2 + Fu_3 + Fv + Fw$ для некоторого $m_i \in F, i \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = m_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = 0, \beta' + \beta\alpha'_1 + m_i\alpha'_2 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_1 = 0$, $\beta' = -m_i\alpha'_2$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_2 - m_iv) + Fu_3 + Fw.$$

Если $x \in u_2 + n_iv + Fu_3 + Fw$ для некоторого $n_i \in F$, $i \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta = n_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_2 + n_i\alpha'_1 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_2 = -n_i\alpha'_1$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_1 - n_iu_2) + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x \in v + Fu_3 + Fw$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x \in (Fu_3 + Fw) \setminus \{0\}$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0$, $\alpha_3 \neq 0$ или $\gamma \neq 0$, и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно, $\text{Ann}(x) = J$.

Далее,

$$\begin{aligned} & |R^*| + \left| \bigcup_{m_i \in F} (F^*(u_1 + m_iu_2) + Fu_3 + Fv + Fw) \right| + \\ & + \left| \bigcup_{n_i \in F} (F^*(u_2 + n_iv) + Fu_3 + Fw) \right| + |F^*v + Fu_3 + Fw| + |(Fu_3 + Fw) \setminus \{0\}| + |\{0\}| = \\ & = (q^6 - q^5) + (q - 1)q^4 + (q - 1)q^3 + (q - 1)q^2 + q^2 - 1 + 1 = q^6. \end{aligned}$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{m_i \in F} [u_1 + m_iu_2] \bigcup_{n_i \in F} [u_2 + n_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $m_i, n_i \in F$, $i \in \{1, \dots, q\}$ справедливо:

$$\begin{aligned} \text{Ann}[u_1 + m_iu_2] &= [u_2 - m_iv] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[u_2 + n_iv] &= [u_1 - n_iu_2] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[v] &= \bigcup_{n_i \in F} [u_2 + n_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[w] &= J. \end{aligned}$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 2.

Случай 3. Пусть $p = 2$,

$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w, \quad \begin{pmatrix} u_1v \\ u_2v \\ u_3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Докажем, что

$$\begin{aligned} R &= [1] \bigcup_{s_i, l_j \in F} [u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] \bigcup_{n_i, k_j \in F} [u_2 + n_iu_3 + k_jv] \bigcup_{m_i \in F} [u_3 + m_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \\ [u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] &= F^*(u_1 + s_iu_2 + l_ju_3) + Fv + Fw, \\ [u_2 + n_iu_3 + k_jv] &= F^*(u_2 + n_iu_3 + k_jv) + Fw, \\ [u_3 + m_iv] &= F^*(u_3 + m_iv) + Fw, \end{aligned}$$

$$[v] = F^*v + Fw,$$

$$[w] = F^*w.$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_2 + \beta\alpha'_1 + \alpha_1\beta' = 0, \alpha_1\alpha'_1 = 0.$$

Если $x \in u_1 + s_i u_2 + l_j u_3 + Fv + Fw$ для некоторых $s_i, l_j \in F$, то $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = s_i, \alpha_3 = l_j$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = 0, \beta' + l_j\alpha'_2 + s_i\alpha'_3 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_1 = 0, \beta' = l_j\alpha'_2 + s_i\alpha'_3$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_2 + l_j v) + F(u_3 + s_i v) + Fw.$$

Если $x \in u_2 + n_i u_3 + k_j v + Fw$ для некоторых $n_i, k_j \in F, i, j \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = n_i, \beta = k_j$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_3 + k_j\alpha'_1 + n_i\alpha'_2 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_3 = k_j\alpha'_1 + n_i\alpha'_2$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_1 + k_j u_3) + F(u_2 + n_i u_3) + Fv + Fw.$$

Если $x \in u_3 + m_i v + Fw$ для некоторого $m_i \in F, i \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1, \beta = m_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_2 + m_i\alpha'_1 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_2 = m_i\alpha'_1$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_1 + m_i u_2) + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x \in v + Fw$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x = w$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta = 0$ и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно, $\text{Ann}(x) = J$.

Далее,

$$\begin{aligned} & |R^*| + \left| \bigcup_{s_i, l_j \in F} (F^*(u_1 + s_i u_2 + l_j u_3) + Fv + Fw) \right| + \\ & + \left| \bigcup_{n_i, k_j \in F} (F^*(u_2 + n_i u_3 + k_j v) + Fw) \right| + \left| \bigcup_{m_i \in F} (F^*(u_3 + m_i v) + Fw) \right| + \\ & + |F^*v + Fw| + |F^*w| + |\{0\}| = \\ & = (q^6 - q^5) + (q - 1)q^4 + (q - 1)q^3 + (q - 1)q^2 + (q - 1)q + q - 1 + 1 = q^6. \end{aligned}$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{s_i, l_j \in F} [u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] \bigcup_{n_i, k_j \in F} [u_2 + n_i u_3 + k_j v] \bigcup_{m_i \in F} [u_3 + m_i v] \cup [v] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $s_i, l_j, n_i, k_j, m_i \in F, i, j \in \{1, \dots, q\}$ справедливо:

$$\begin{aligned}
\text{Ann}[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] &= \bigcup_{n_\alpha \in F} [u_2 + n_\alpha u_3 + (l_j + n_\alpha s_i)v] \cup [u_3 + s_i v] \cup [w] \cup [0], \\
\text{Ann}[u_2 + n_i u_3 + k_j v] &= \bigcup_{s_\alpha \in F} [u_1 + s_\alpha u_2 + (k_j + n_i s_\alpha)u_3] \bigcup_{k_\beta \in F} [u_2 + n_i u_3 + k_\beta v] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \\
\text{Ann}[u_3 + m_i v] &= \bigcup_{l_\alpha \in F} [u_1 + m_i u_2 + l_\alpha u_3] \bigcup_{m_\alpha \in F} [u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \\
\text{Ann}[v] &= \bigcup_{n_\alpha, k_\beta \in F} [u_2 + n_\alpha u_3 + k_\beta v] \bigcup_{m_\alpha \in F} [u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \\
\text{Ann}[w] &= J.
\end{aligned}$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 3.

Случай 4. Пусть

$$\begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3 u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} w, \quad \begin{pmatrix} u_1 v \\ u_2 v \\ u_3 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Докажем, что

$$\begin{aligned}
R &= [1] \bigcup_{s_i, l_j \in F} [u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] \bigcup_{n_i, k_j \in F} [u_2 + n_i u_3 + k_j v] \bigcup_{m_i \in F} [u_3 + m_i v] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \\
[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] &= F^*(u_1 + s_i u_2 + l_j u_3) + Fv + Fw, \\
[u_2 + n_i u_3 + k_j v] &= F^*(u_2 + n_i u_3 + k_j v) + Fw, \\
[u_3 + m_i v] &= F^*(u_3 + m_i v) + Fw, \\
[v] &= F^*v + Fw, \\
[w] &= F^*w.
\end{aligned}$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 \alpha'_2 + d \alpha_3 \alpha'_3 + \alpha_1 \beta' + \beta \alpha'_1 = 0, \alpha_1 \alpha'_1 = 0.$$

Если $x \in u_1 + s_i u_2 + l_j u_3 + Fv + Fw$ для некоторых $s_i, l_j \in F$, $i, j \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = s_i, \alpha_3 = l_j$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = 0, \beta' + \beta \alpha'_1 + s_i \alpha'_2 + d l_j \alpha'_3 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_1 = 0, \beta' = -(s_i \alpha'_2 + d l_j \alpha'_3)$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_2 - s_i v) + F(u_3 - d l_j v) + Fw.$$

Если $x \in u_2 + n_i u_3 + k_j v + Fw$ для некоторых $n_i, k_j \in F$, $i, j \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = n_i, \beta = k_j$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_2 + k_j \alpha'_1 + d n_i \alpha'_3 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_2 = -(k_j \alpha'_1 + d n_i \alpha'_3)$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_1 - k_j u_2) + F(u_3 - d n_i u_2) + Fv + Fw.$$

Если $x \in u_3 + m_i v + Fw$ для некоторого $m_i \in F$, $i \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1, \beta = m_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow d \alpha'_3 + m_i \alpha'_1 = 0.$$

Отсюда, $\alpha'_3 = -\frac{m_i}{d}\alpha'_1$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_1 - \frac{m_i}{d}u_3) + Fu_2 + Fv + Fw.$$

Если $x \in v + Fw$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x = w$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta = 0$ и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = J.$$

Далее,

$$\begin{aligned} & |R^*| + \left| \bigcup_{s_i, l_j \in F} (F^*(u_1 + s_i u_2 + l_j u_3) + Fv + Fw) \right| + \\ & + \left| \bigcup_{n_i, k_j \in F} (F^*(u_2 + n_i u_3 + k_j v) + Fw) \right| + \left| \bigcup_{m_i \in F} (F^*(u_3 + m_i v) + Fw) \right| + \\ & + |F^*v + Fw| + |F^*w| + |\{0\}| = \\ & = (q^6 - q^5) + (q-1)q^4 + (q-1)q^3 + (q-1)q^2 + (q-1)q + q - 1 + 1 = q^6. \end{aligned}$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{s_i, l_j \in F} [u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] \bigcup_{n_i, k_j \in F} [u_2 + n_i u_3 + k_j v] \bigcup_{m_i \in F} [u_3 + m_i v] \cup [v] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $s_i, l_j, n_i, k_j, m_i \in F, i, j \in \{1, \dots, q\}$ справедливо:

$$\text{Ann}[u_1 + s_i u_2 + l_j u_3] = \bigcup_{n_\alpha \in F} [u_2 + n_\alpha u_3 - (s_i + dl_j n_\alpha)v] \cup [u_3 - dl_j v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\text{Ann}[u_2 + k_j v] = \bigcup_{l_\beta \in F} [u_1 - k_j u_2 + l_\beta u_3] \bigcup_{m_\alpha \in F} [u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\begin{aligned} \text{Ann}[u_2 + n_i u_3 + k_j v] &= \bigcup_{l_\beta \in F} [u_1 - (k_j + dl_\beta n_i)u_2 + l_\beta u_3] \\ &\quad \bigcup_{k_\alpha \in F} [u_2 - \frac{1}{dn_i}u_3 + k_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \text{ где } n_i \neq 0, \end{aligned}$$

$$\text{Ann}[u_3 + m_i v] = \bigcup_{s_\alpha \in F} [u_1 + s_\alpha u_2 - \frac{m_i}{d}u_3] \bigcup_{k_\alpha \in F} [u_2 + k_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\text{Ann}[v] = \bigcup_{n_\alpha, k_\beta \in F} [u_2 + n_\alpha u_3 + k_\beta v] \bigcup_{m_\alpha \in F} [u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\text{Ann}[w] = J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 4. $\square$

Теорема 2. Пусть R – локальное кольцо характеристики p и

$$J^4 = 0, \dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2/J^3 = 2, \dim_F J^3 = 1,$$

где $F = R/J = GF(p^r)$.

Если $p = 2$, то, в дополнение к $[0] = \{0\}$ и $[1] = R^*$, $R/\sim$ определяется одним из нижеуказанных множеств:

- (1) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[u_2] = (Fu_2 + Fv_2) \setminus \{0\} + Fv_1 + Fw$,
 $[w] = (Fv_1 + Fw) \setminus \{0\}$;
- (2) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[v_2] = F^*v_2 + Fv_1 + Fw$,
 $[w] = (Fv_1 + Fw) \setminus \{0\}$;
- (3) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_2 + k_i v_2] = F^*(u_2 + k_i v_2) + Fv_1 + Fw$, для каждого $k_i \in F$,
 $[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (4) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_2 + k_i v_2] = F^*(u_2 + k_i v_2) + Fv_1 + Fw$, для каждого $k_i \in F$,
 $[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (5) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_2] = F^*v_2 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (6) $[n_i u_1 + u_2] = F^*(n_i u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_1] = F^*u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (7) $[n_i u_1 + u_2] = F^*(n_i u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$, $n_i \neq 0, 1$,
 $[u_1] = F^*u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[u_2 + k_i v_2] = F^*(u_2 + k_i v_2) + Fv_1 + Fw$, для каждого $k_i \in F$,
 $[u_1 + u_2 + l_i v_1] = F^*(u_1 + u_2 + l_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, для каждого $l_i \in F$,
 $[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_2] = F^*v_2 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (8) $[u_1] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \alpha_i, \beta_i, \gamma \in F, \alpha_1 \neq 0, \alpha_1 \neq \alpha_2\}$,
 $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[u_1 + u_2 + v_1] = \{\alpha_1(u_1 + u_2) + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \alpha_1, \beta_i, \gamma \in F, \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq \beta_2\}$,
 $[u_1 + u_2] = F^*(u_1 + u_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$,
 $[v_1] = \{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \beta_i, \gamma \in F, \beta_1 \neq \beta_2\}$,
 $[w] = (F(v_1 + v_2) + Fw) \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, 2}$;
- (9) $[n_i u_1 + u_2] = F^*(n_i u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$, $n_i \neq 0, 1$,
 $[u_1] = F^*u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,

$$\begin{aligned}
[u_2 + k_i v_2] &= F^*(u_2 + k_i v_2) + Fv_1 + Fw, \text{ для каждого } k_i \in F, \\
[u_1 + u_2 + l_i v_1] &= F^*(u_1 + u_2 + l_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw, \text{ для каждого } l_i \in F, \\
[m_i v_1 + v_2] &= F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw, \text{ для каждого } m_i \in F, \\
[v_1] &= F^*v_1 + Fw, \\
[w] &= F^*w.
\end{aligned}$$

Для каждого из случаев, геометрическое изображение графа $\Gamma(S/\sim)$, за исключением вершин $[0]$ и $[1]$, имеет вид:

(1)

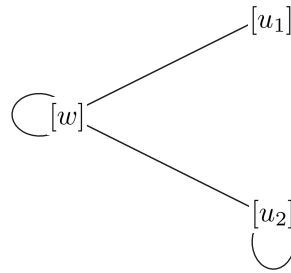


рис. 5

(2)

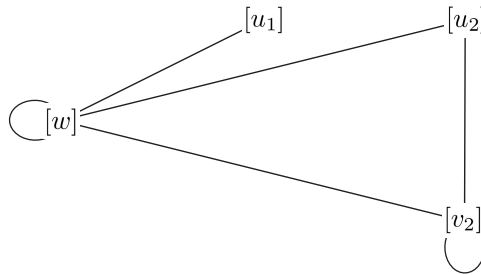
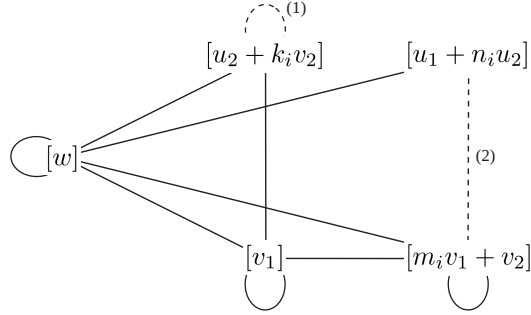


рис. 6

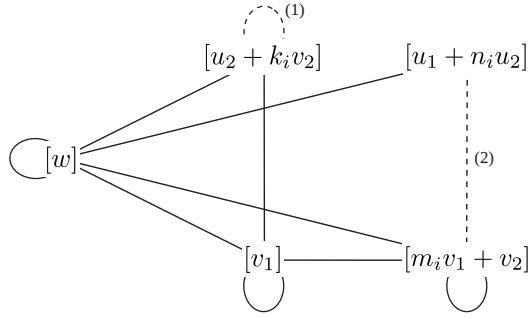
(3)



- (1) если $k_i = k_j$;
 (2) если $m_i = n_j$.

рис. 7

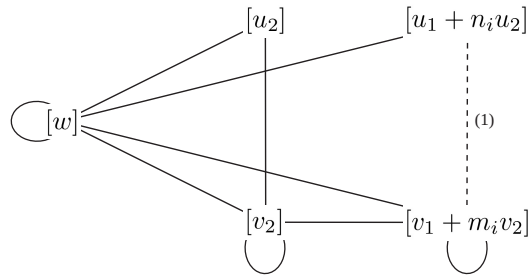
(4)



- (1) если $k_i + k_j + 1 = 0$;
 (2) если $m_i = n_j$.

рис. 8

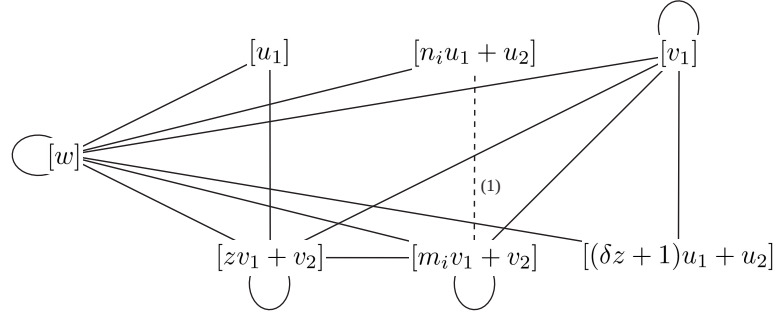
(5)



- (1) если $m_i = \delta n_j$.

рис. 9

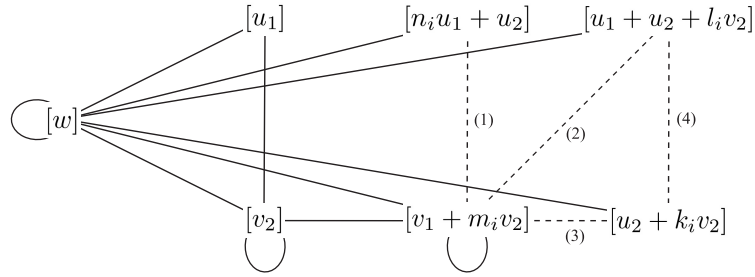
(6)


 $m_i \neq z, n_i \neq \delta z + 1.$

(1) если $m_i n_j + z n_j + (\delta z + 1) m_i + 1 = 0.$

рис. 10

(7)


 $n_i \neq 0, 1.$

(1) если $m_i = n_j + 1;$

(2) если $m_i = 0;$

(3) если $m_i = 1;$

(4) если $l_i = k_j.$

рис. 11

(8)

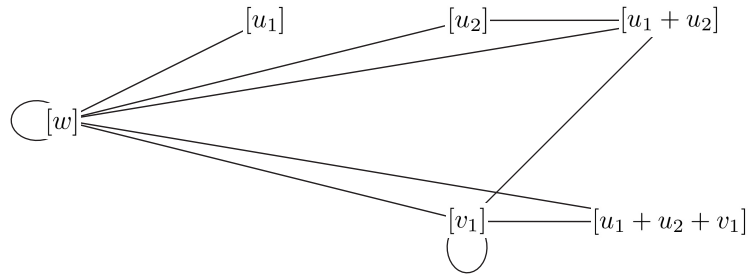
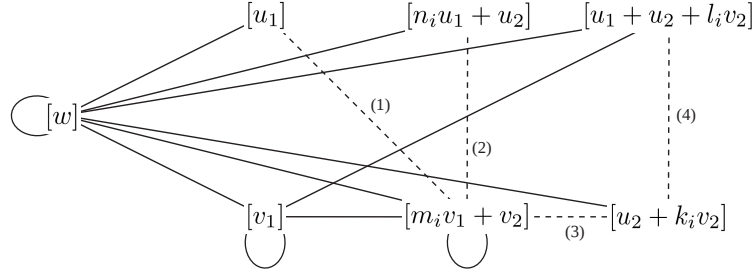


рис. 12

(9)

 $n_i \neq 0, 1.$

- (1) если $m_i = z$;
- (2) если $1 + m_i + m_i n_j + n_j z = 0$, $m_i \neq 1, z$;
- (3) если $m_i = 1$;
- (4) если $l_i = (1 + z)k_j$.

рис. 13

Если $p \neq 2$, то, в дополнение к $[0] = \{0\}$ и $[1] = R^*$, $R/\sim$ определяется одним из нижеуказанных множеств:

- (1) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[u_2] = (Fu_2 + Fv_1) \setminus \{0\} + Fv_2 + Fw$,
 $[w] = (Fv_2 + Fw) \setminus \{0\}$;
- (2) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[v_1] = F^*v_1 + Fv_2 + Fw$, $[w] = (Fv_2 + Fw) \setminus \{0\}$;
- (3) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_2 + k_i v_1] = F^*(u_2 + k_i v_1) + Fv_2 + Fw$, для каждого $k_i \in F$,
 $[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_2] = F^*v_2 + Fw$, $[w] = F^*w$;
- (4) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $n_i \neq \pm 1$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_1 + u_2 + k_i v_2] = F^*(u_1 + u_2 + k_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, для каждого $k_i \in F$,
 $[u_1 - u_2 + l_i v_2] = F^*(u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw$, для каждого $l_i \in F$,
 $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (5) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (6) $[u_1] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 \neq -\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma \in F\}$,
 $[u_1 + u_2] = F^*(u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[u_1 - u_2 + v_1] = \{\alpha_1(u_1 - u_2) + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq -\beta_2, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma \in F\}$,
 $[u_1 - u_2] = F^*(u_1 - u_2) + F(v_1 - v_2) + Fw$,
 $[v_1] = \{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \beta_1 \neq -\beta_2, \beta_1, \beta_2, \gamma \in F\}$,
 $[w] = (F(v_1 - v_2) + Fw) \setminus \{0\}$;

- (7) $[u_1 + k_i u_2] = F^*(u_1 + k_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $k_i \in F$, $k_i \neq \pm 1$,
 $[u_1 + u_2 + n_i v_2] = F^*(u_1 + u_2 + n_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_1 - u_2 + l_i v_2] = F^*(u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw$, для каждого $l_i \in F$,
 $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_2] = F^*v_2 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (8) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
 $[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[v_2] = F^*v_2 + Fw$,
 $[w] = F^*w$;
- (9) $[u_1 + m_i u_2] = F^*(u_1 + m_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для каждого $m_i \in F$,
 $[u_2 + n_i v_1] = F^*(u_2 + n_i v_1) + Fv_2 + Fw$, для каждого $n_i \in F$,
 $[v_1 + k_i v_2] = F^*(v_1 + k_i v_2) + Fw$, для каждого $k_i \in F$,
 $[v_2] = F^*v_2 + Fw$,
 $[w] = F^*w$.

Для каждого из представленных выше случаев геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$, за исключением вершин $[0]$ и $[1]$, имеет вид:

(1)

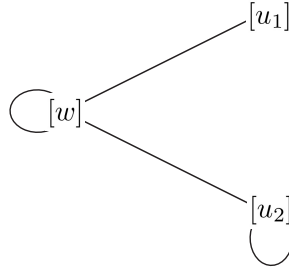


рис. 14

(2)

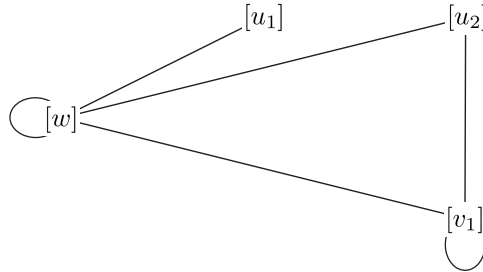
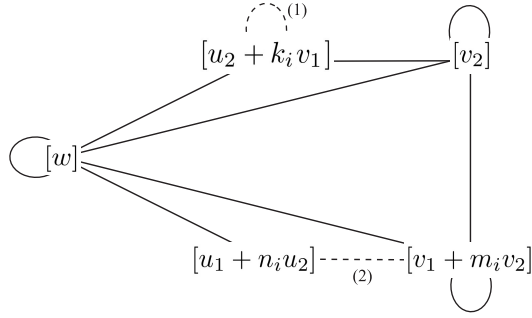


рис. 15

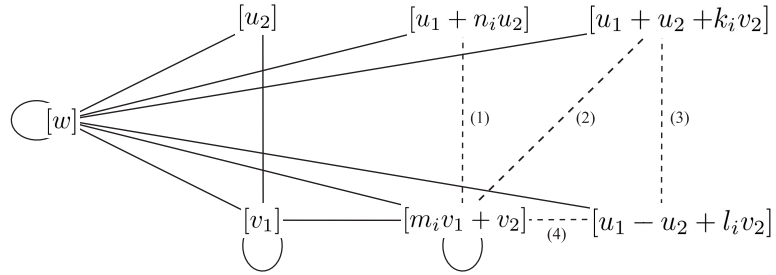
(3)



- (1) если $k_i + k_j = 0$;
 (2) если $m_i + n_j + 1 = 0$.

рис. 16

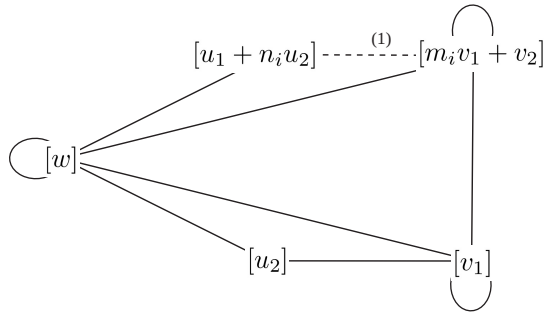
(4)



- (1) если $n_i + m_j = 0$;
 (2) если $m_i = -1$;
 (3) если $k_i = l_j$;
 (4) если $m_i = 1$.

рис. 17

(5)



- (1) если $m_i + \delta n_j = 0$.

рис. 18

(6)

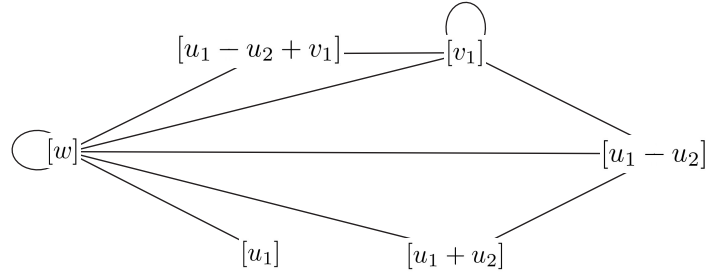
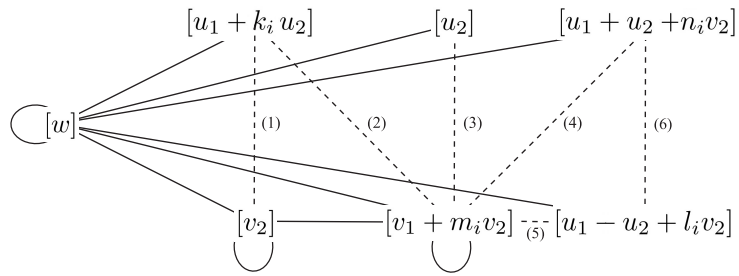


рис. 19

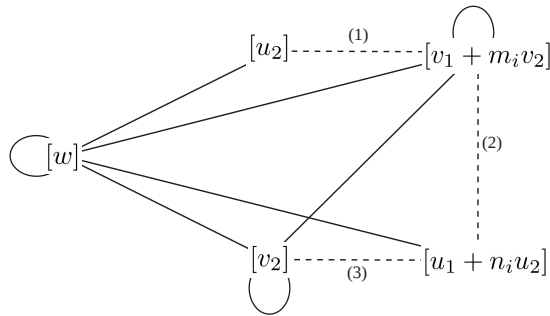
(7)



- $k_i \neq \pm 1$
- (1) если $k_i = -\zeta$;
 - (2) если $k_i m_j + k_i \zeta + m_j \zeta + 1 = 0$;
 - (3) если $m_i = -\zeta$;
 - (4) если $m_i = -1$;
 - (5) если $m_i = 1$.
 - (6) если $(1 + \zeta)l_i = (1 - \zeta)n_j$.

рис. 20

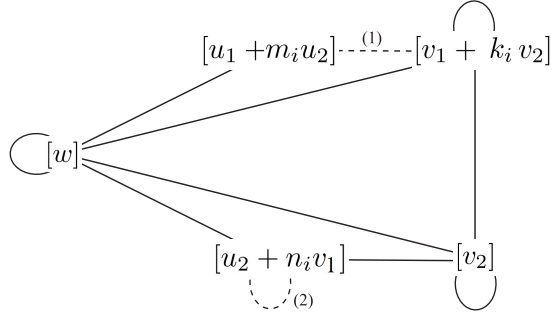
(8)



- (1) если $m_i = -\frac{\xi}{\delta}$;
- (2) если $\xi m_i + \xi n_j + \delta m_i n_j + 1 = 0$, $n_j \neq -\frac{\xi}{\delta}$, $m_i \neq -\frac{\xi}{\delta}$;
- (3) если $n_i = -\frac{\xi}{\delta}$.

рис. 21

(9)



- (1) если $k_i + m_j = 0$;
 (2) если $n_i + n_j = 0$.

рис. 22

Доказательство. Результаты для колец характеристики $p = 2$ были доказаны в работе [24] и сформулированы в настоящей теореме для полноты изложения.

Рассмотрим случай $p \neq 2$. Наибольшую сложность представляет нахождение классов эквивалентности, указанных в формулировке теоремы для каждого из случаев. При известных классах и графическом изображении графа все доказательства однотипны и по сути сводятся к вычислительной проверке. Далее, для примера, мы рассмотрим только случай 7 как наиболее сложный из всех.

Случай 7. Пусть

$$\begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \omega, \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta & 1 \end{pmatrix} \omega,$$

где $\zeta \neq \pm 1$ и $\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \notin (F^*)^3$.

Докажем, что

$$R = [1] \bigcup_{k_i \in F \setminus \{\pm 1\}} [u_1 + k_i u_2] \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + u_2 + n_i v_2] \bigcup_{l_i \in F} [u_1 - u_2 + l_i v_2] \cup [u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$

$$[u_1 + k_i u_2] = F^*(u_1 + k_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw, k_i \neq \pm 1,$$

$$[u_1 + u_2 + n_i v_2] = F^*(u_1 + u_2 + n_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw,$$

$$[u_1 - u_2 + l_i v_2] = F^*(u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw,$$

$$[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw,$$

$$[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw,$$

$$[v_2] = F^*v_2 + Fw,$$

$$[w] = F^*w.$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \alpha'_1 + \alpha_2 \alpha'_2 = 0, \alpha_1 \alpha'_2 + \alpha_2 \alpha'_1 = 0,$$

$$\alpha_1(\beta'_1 + \beta'_2 \zeta) + \alpha_2(\beta'_1 \zeta + \beta'_2) + \beta_1(\alpha'_1 + \alpha'_2 \zeta) + \beta_2(\alpha'_1 \zeta + \alpha'_2) = 0.$$

Если $x \in u_1 + k_i u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, то $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = k_i$ для некоторого $k_i \in F$, $k_i \neq \pm 1, i \in \{1, \dots, q\}$, и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 + k_i \alpha'_2 = 0, \alpha'_2 + k_i \alpha'_1 = 0,$$

$$\beta'_1 + \beta'_2 \zeta + k_i(\beta'_1 \zeta + \beta'_2) + \beta_1(\alpha'_1 + \alpha'_2 \zeta) + \beta_2(\alpha'_1 \zeta + \alpha'_2) = 0.$$

Так как $\alpha'_1 + k_i \alpha'_2 = 0$ и $\alpha'_2 + k_i \alpha'_1 = 0$, то $\alpha'_1(1 - k_i^2) = 0$, а значит, $\alpha'_1 = \alpha'_2 = 0$. Следовательно,

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = \alpha'_2 = 0, \beta'_1(1 + k_i \zeta) + \beta'_2(k_i + \zeta) = 0.$$

Если $k_i \neq -\zeta$, то

$$\text{Ann}(r) = F \left(v_1 - \frac{1 + k_i \zeta}{k_i + \zeta} v_2 \right) + Fw.$$

Если $k_i = -\zeta$, то $\beta'_1 = 0$ и

$$\text{Ann}(x) = Fv_2 + Fw.$$

Если $x \in (u_1 + u_2 + n_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_2 = \beta_1 + n_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_2 = -\alpha'_1, \beta'_2 = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} n_i \alpha'_1 - \beta'_1.$$

Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F \left(u_1 - u_2 + \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} n_i v_2 \right) + F(v_1 - v_2) + Fw.$$

Если $x \in (u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw$, то $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \beta_2 = -\beta_1 + l_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_2 = \alpha'_1, \beta'_2 = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} l_i \alpha'_1 + \beta'_1.$$

Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F \left(u_1 + u_2 + \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} l_i v_2 \right) + F(v_1 + v_2) + Fw.$$

Если $x \in u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_2 = \alpha'_1 = 0, \beta'_2 = -\beta'_1 \zeta.$$

Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(v_1 - \zeta v_2) + Fw.$$

Если $x \in v_1 + m_i v_2 + Fw$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = m_i$ для некоторого $m_i \in F, i \in \{1, \dots, q\}$, и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 + \alpha'_2 m_i + \alpha'_2 \zeta + \alpha'_1 m_i \zeta = 0.$$

Если $m_i \neq -\zeta$, то $\alpha'_2 = -\frac{1 + m_i \zeta}{m_i + \zeta} \alpha'_1$ и

$$\text{Ann}(x) = F \left(u_1 - \frac{1 + m_i \zeta}{m_i + \zeta} u_2 \right) + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $m_i = -\zeta$, то $\alpha'_1 = 0$ и

$$\text{Ann}(x) = Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $x \in v_2 + Fw$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_2 = -\alpha'_1 \zeta.$$

Следовательно,

$$\text{Ann}(x) = F(u_1 - \zeta u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $x = w$, то $xx' = 0$ для любого $x' \in J$ и, следовательно, $\text{Ann}(w) = J$.

Далее,

$$\begin{aligned} & |R^*| + \left| \bigcup_{k_i \in F \setminus \{\pm 1\}} (F^*(u_1 + k_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw) \right| + \\ & \quad + |F^*(u_1 + u_2 + n_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw| + \\ & \quad + |F^*(u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw| + |F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw| + \\ & \quad + \left| \bigcup_{m_i \in F} (F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw) \right| + |F^*v_2 + Fw| + |F^*w| + |\{0\}| = \\ & \quad = (q-1)q^5 + (q-1)(q-2)q^3 + (q-1)q^3 + (q-1)q^3 + \\ & \quad \quad (q-1)q^3 + (q-1)q^2 + (q-1)q + (q-1) + 1 = q^6. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} R = [1] \bigcup_{k_i \in F \setminus \{\pm 1\}} [u_1 + k_i u_2] \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + u_2 + n_i v_2] \bigcup_{l_i \in F} [u_1 - u_2 + l_i v_2] \cup [u_2] \\ \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0] \end{aligned}$$

и для любых $k_i, l_i, m_j, n_i \in F$, $i, j \in \{1, \dots, q\}$,

$$\begin{aligned} \text{Ann}[u_1 + k_i u_2] &= \left[v_1 - \frac{1 + k_i \zeta}{k_i + \zeta} v_2 \right] \cup [w] \cup [0], \quad k_i \neq -\zeta, \\ \text{Ann}[u_1 - \zeta u_2] &= [v_2] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[u_1 + u_2 + n_i v_2] &= \left[u_1 - u_2 + \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} n_i v_2 \right] \cup [v_1 - v_2] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[u_1 - u_2 + l_i v_2] &= \left[u_1 + u_2 + \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} n_i v_2 \right] \cup [v_1 + v_2] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[u_2] &= [v_1 - \zeta v_2] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[v_1 + m_j v_2] &= \left[u_1 - \frac{1 + m_j \zeta}{m_j + \zeta} u_2 \right] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0], \quad m_j \neq \pm 1, -\zeta, \\ \text{Ann}[v_1 - \zeta v_2] &= [u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[v_1 - v_2] &= \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + u_2 + n_i v_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[v_1 + v_2] &= \bigcup_{l_i \in F} [u_1 - u_2 + l_i v_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[v_2] &= [u_1 - \zeta u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0], \\ \text{Ann}[w] &= J. \end{aligned}$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 20.

□

REFERENCES

- [1] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra, **116** (1988), 208–226.
- [2] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434–447.
- [3] N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Communication in Algebra, **38** (2010), 2965–2980.
- [4] N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^5* , Communication in Algebra, **41** (2013), 765–775.
- [5] B.R. McDonald, *Finite rings with identity*, Decker, 1974.
- [6] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compositio Math., **21** (1969), 195–229.
- [7] C.J. Chikunji, *Unit groups of cube radical zero commutative completely primary finite rings*, Int. J. Math. Sci., **4** (2005), 572–579.
- [8] S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi, *When zero-divisor graph is planar or a complete r -partite graph*, J. Algebra, **270** (2003), 169–180.
- [9] R. Belshoff, J. Chapman, *Planar zero-divisor graphs*, J. Algebra, **316** (2007), 471–480.
- [10] A.S. Kuz'mina, Yu.N. Maltsev, *Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs*, Asian-European J. Math., **1**(4) (2008), 565–574.
- [11] A.S. Kuzmina, *On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs*, Discretnaya Matematika, **4** (2009), 60–75.
- [12] A.S. Kuzmina, *Finite rings with Eulerian zero-divisor graphs*, J. of Algebra and Its Appl., **11**(3) (2012), 551–559.
- [13] S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra, **296** (2006), 462–479.
- [14] A.S. Kuzmina, *On some properties of ring varieties, where isomorphic zero-divisor graphs of finite rings give isomorphic rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **8** (2011), 179–190.
- [15] E.V. Zhuravlev, A.S. Kuz'mina, Yu.N. Mal'tsev, *The description of varieties of rings whose finite rings are uniquely determined by their zero-divisor graphs*, Russian Mathematics, **57** (2013), 10–20.
- [16] E. V. Zhuravlev, A. S. Monastyreva, *Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings*, Siberian Mathematical Journal, **61:1** (2020), 76–84.
- [17] A. Tadayyonfar, A.R. Ashrafi, *The zero divisor graphs of finite rings of cubefree order*, FILOMAT, **29:8** (2010), 1715–1720.
- [18] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5 . Part 1. Nonlocal rings*, J. Algebra, **231** (2000), 677–690.
- [19] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5 . Part 2. Local rings*, J. Algebra, **231** (2000), 691–704.
- [20] V.G. Antipkin, V.P. Elizarov, *Rings of order p^3* , Siberian Mathematical Journal, **23** (1982), 457–464.
- [21] B. Fine, *Classification of finite rings of order p^2* , Mathematics Magazine, **66** (1993), 248–252.
- [22] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), – 15–29 c.
- [23] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 625–638.
- [24] E.V. Zhuravlev, A.S. Monastyreva, *On zero divisor graphs of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 465–480.

EVGENIY VLADIMIROVICH ZHURAVLEV
 ALTAI STATE UNIVERSITY,
 PR. LENINA, 61,
 656049, BARNAUL, RUSSIA
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru

OLGA ALEXANDROVNA FILINA
 ALTAI STATE UNIVERSITY,
 PR. LENINA, 61,
 656049, BARNAUL, RUSSIA
E-mail address: olya-filina@mail.ru