S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том .., стр. ...–... (2021) УДК 512.55
DOI MSC 16P10

О СЖАТЫХ ГРАФАХ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ КОНЕЧНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Е.В. Журавлев, О.А. Филина

Abstract. We describe the compressed zero-divisor graphs of a commutative finite local rings R of characteristic p with Jacobson radical J such that $J^4 = (0)$, $F = R/J \cong GF(p^r)$ and $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$ or $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$.

Keywords: finite ring, local ring, zero-divisor graph.

1. Введение

Все кольца, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, ассоциативными, коммутативными и содержат единицу. Обозначим через $J = J(R)$ и R^* радикал Джекобсона и группу обратимых элементов кольца R, $F = GF(q)$ – конечное поле из $q = p^r$ элементов, p – простое число.

Графом делителей нуля $\Gamma(R)$ кольца R называется граф, вершинами которого являются элементы R и две вершины x, y, не обязательно различные, соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ (см. [1, 2]).

Пусть S – коммутативная полугруппа с нулем, $x \in S$ и

$$\mathrm{Ann}(x) = \{y \in S \mid xy = 0\}.$$

Введем отношение эквивалентности:

$$\text{для любых } x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y).$$

Класс эквивалентности элемента $x \in S$ обозначим $[x]$, а соответствующее фактормножество $S/\!\sim$.

Zhuravlev E.V., Filina O.A., On zero divisor graphs of finite commutative local rings.

Поступила 2021 г., опубликована 2021 г.

Отношение $\sim$ является конгруэнцией на S: для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ если $x_1 \sim x_2$ и $y_1 \sim y_2$, то $x_1x_2 \sim y_1y_2$. Следовательно, мы можем рассматривать фактормножество $S/\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$.

Рассмотрим граф $\Gamma(S/\sim)$, вершинами которого являются элементы $S/\sim$ и две вершины $[x]$, $[y]$, не обязательно различные, соединяются ребром тогда и только тогда, когда $[x][y] = [0]$ (равносильно $xy = 0$). Такие графы называются сжатыми графами делителей нуля (см. [3, 4]). Если $[x] \in \Gamma(S/\sim)$, то либо для любых $a, b \in [x]$ $ab = 0$, либо для любых $a, b \in [x]$ $ab \neq 0$. Таким образом, всякая вершина $[x]$ с петлей в $\Gamma(S/\sim)$ является полным подграфом в $\Gamma(S)$, все вершины которого имеют петли, а всякая вершина $[x]$ без петли в $\Gamma(S/\sim)$ это пустой подграф $\Gamma(S)$, то есть, множество изолированных вершин.

Кольцо R называется локальным, если $R/J = F$ – поле. Все делители нуля локального кольца образуют радикал J, который является нильпотентным идеалом некоторого индекса нильпотентности K, $K \in \mathbb{N}$, и всякий элемент локального кольца является либо обратимым, либо нильпотентным. Известно, что конечное коммутативное кольцо с единицей является прямой суммой локальных колец (см. [5, 6]).

Предложение 1. [5, 6, 7] *Пусть R – локальное кольцо характеристики p, $R/J = GF(p^r) = F$ и K – индекс нильпотентности J. Тогда*

(1) *J^k/J^{k+1} является конечномерным векторным пространством над F для всякого $1 \leq k \leq K-1$.*
(2) *существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|R| = p^{nr}$ и $|J| = p^{(n-1)r}$.*

Графы делителей нуля впервые были определены Д. Андерсоном, П. Ливингстоном и И. Беком в работах [1, 2]. Исследования в данной тематике связаны с описанием колец, графы делителей нуля которых удовлетворяют некоторым условиям . Например, полностью описаны кольца с планарными графами делителей нуля [8, 9, 10, 11], кольца, имеющие эйлеровы графы делителей нуля [12], и конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля [13]. В работах [14, 15] получено описание многообразий колец, в которых конечные кольца, имеющие изоморфные графы делителей нуля, изоморфны друг другу. В [16] изучены коммутативные конечные кольца с сжатым графом делителей нуля порядка 2, а также найдены все графы порядка 3, которые являются графами делителей нуля некоторого конечного кольца.

В связи с этим, актуальна задача по изображению графов конечных колец. В работах [3, 4, 17] были описаны графы делителей нуля коммутативных локальных колец R порядка p^{nr}, при $nr \leq 5$. Авторы воспользовались классификацией конечных колец, предложенной в работах [18, 19, 20, 21]. Зная правила умножения элементов колец, А. Тадэйенфа и А. Ашрафи использовали представление графа делителей нуля в виде объединения и суммы полных и пустых графов (см. [17]). Н. Блумфилд (см. [4]) привел в качестве основного результата геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$ таких колец.

В настоящее время, локальные кольца порядка p^{nr}, $nr > 5$, классифицированы лишь в некоторых частных случаях. Например, в работах [22, 23] с точностью до изоморфизма описаны все локальные кольца R характеристики p каждого из следующих типов:

(1) $\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2/J^3 = 2,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = (0)$.
(2) $\dim_F J/J^2 = 3,\ \dim_F J^2/J^3 = 1,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = (0)$.

Это кольца порядка p^{6r}. В работе [24] изучены сжатые графы колец характеристики 2 с условием $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$. Цель данной работы – продолжить исследования, начатые в [24], и указать $\sim$-классы и геометрическое изображение графов $\Gamma(R/\sim)$ колец обоих типов при любом p.

2. Предварительные сведения

Пусть R – локальное кольцо характеристики p и $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$. Тогда кольцо R представимо в виде суммы

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$ – базис J над F, причем $u_1, u_2, u_3 \in J \setminus J^2$, $v \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$ (см. [22]). Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij} v + b_{ij} w \quad \text{и} \quad u_i v = c_{i1} w$$

для некоторых a_{ij}, b_{ij}, $c_{i1} \in F$, $i, j = \overline{1, 3}$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$$

– матрицы умножения кольца R, δ_1 – некоторый элемент $F^* \setminus F^{*2}$. Все попарно неизоморфные локальные кольца, рассматриваемые в данной ситуации, определяются следующими матрицами (см. [22]):

$$(1) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ при } p = 2;$$

$$(4) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } d \in \{1, \delta_1\}.$$

Пусть R – локальное кольцо характеристики p и $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$. Тогда кольцо R представимо в виде суммы

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – базис J над F, причем $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2 \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$ (см. [22, 23]). Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v_j \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij}^{(1)} v_1 + a_{ij}^{(2)} v_2 + b_{ij} w \quad \text{и} \quad u_i v_j = c_{ij} w,$$

для некоторых $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$, b_{ij}, $c_{ij} \in F$, $i,j=\overline{1,2}$. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

– матрицы умножения кольца R.

Далее, введем вспомогательные определения и укажем список всех попарно неизоморфных колец, рассматриваемых в данной ситуации (см. [22, 23]).

Пусть

$$M_1 = \left\{ z \in F^* \mid \forall x \in F\ z(1+3\delta_1 x^2) - x\delta_1(3+\delta_1 x^2) \neq 0 \right\}.$$

Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{K}_1 = \left\{ \varphi_{a,c}^{\pm} : M_1 \to F \right\},\quad \varphi_{a,c}^{\pm}(z) = \frac{\pm az(a^2+3\delta_1 c^2) - c\delta_1(3a^2+\delta_1 c^2)}{a(a^2+3\delta_1 c^2) \mp cz(3a^2+\delta_1 c^2)},$$

где $a=0$, $c=1$ или $a=1$, $c\in F$.

Относительно бинарной операции $(\phi_1\circ\phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1,\phi_2\in\mathcal{K}_1)$ данное множество образует группу, которая действует на множестве M_1 (см. [22]). Множество M_1 разбивается на непересекающиеся орбиты, обозначим через $\mathcal{K}_1 \setminus M_1$ множество их представителей.

Пусть δ_2 такой элемент F, что $\forall x \in F$ $\delta_2 \neq x + x^2$. Пусть $\mu = a^2c + ac^2 + c^3(1+\delta_2)$, $\eta = a^3 + ac^2\delta_2 + c^3\delta_2$,

$$M_2 = \{ z\in F \,|\, \forall s\in\{0,1\}\ \forall a,c\in F,\ a\neq 0 \text{ или } c\neq 0,\ (\eta(1+s)+\mu\delta_2)z+\eta\neq 0\}.$$

Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{K}_2 = \{\varphi_{s,a,c} :\, M_2 \to F\},\quad \varphi_{s,a,c}(z) = \frac{(\eta+\mu s)z+\mu}{(\eta(1+s)+\mu\delta_2)z+\eta},$$

где $s\in\{0,1\}$, $a,c\in F$, $a\neq 0$ или $c\neq 0$. Относительно бинарной операции $(\phi_1\circ\phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1,\phi_2\in\mathcal{K}_2)$ это множество образует группу, которая действует на множестве M_2 (см. [23]). Пусть $\mathcal{K}_2 \setminus M_2$ – множество представителей орбит.

При $p=2$ все попарно неизоморфные локальные кольца определяются следующими четверками матриц (см. [23]):

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(5) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix}$;

(6) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1+\delta_2 z & 1 \end{pmatrix}$,

где $z \in \mathcal{K}_2 \backslash M_2$;

(7) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(8) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(9) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

где z – такой элемент F, что $z+1 \notin (F^*)^3$, $z \neq 1$.

При $p \neq 2$ все попарно неизоморфные локальные кольца определяются следующими четверками матриц (см. [22]):

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, при $p = 3$;

(4) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(5) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$;

(6) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(7) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta & 1 \end{pmatrix}$,

где $\zeta \neq \pm 1, \dfrac{1-\zeta}{1+\zeta} \notin (F^*)^3$;

(8) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \delta_1 \end{pmatrix}$,

где $\xi \in \mathcal{K}_1 \setminus M_1$;

(9) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Графы делителей нуля

Приведем несколько полезных свойств $\sim$-классов (см. [4]).

Предложение 2. *Пусть R – локальное кольцо и $A \subseteq R$. Если $x \in \mathrm{Ann}(A)$, то $[x] \in \mathrm{Ann}(A)$. То есть, аннулятор всякого подмножества кольца R является объединением $\sim$-классов.*

Предложение 3. *Пусть R – локальное кольцо, $J^K = 0$, $J^{K-1} \neq 0$, $K \in \mathbb{N}$.*

(1) *Если $x \in J^{K-1} \setminus \{0\}$, то $[x] = \mathrm{Ann}(J) \setminus \{0\}$.*
(2) *Если $x \in J \setminus \{0\}$, $\alpha \in R^*$, $y \in \mathrm{Ann}(J)$, причем элемент $\alpha x + y \neq 0$, то $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(\alpha x + y)$.*

Рассмотрим сжатый граф $\Gamma(R/\sim)$ локального кольца R и введем дополнительные обозначения, связанные с группировкой схожих вершин графа. Если в графе $\Gamma(R/\sim)$ содержится полный подграф, вершины которого имеют петли, то мы будем изображать этот подграф с петлями как одну вершину с петлей. Если в множестве вершин графа $\Gamma(R/\sim)$ содержится подмножество попарно не смежных вершин без петель, то мы будем изображать соответствующий подграф как одну вершину без петли. Если же речь идет о группировке вершин графа $\Gamma(R/\sim)$, отличных от двух описанных выше ситуаций, то мы будем изображать соответствующий подграф как одну вершину с пунктирной петлей. Причем, для каждой такой вершины-группы внизу рисунка мы укажем условие при котором ее элементы соединяются ребром, в частности, петлей. Если группа вершин, обозначенная описанным выше способом, соединяется сплошным ребром с какой-либо вершиной $[x]$ графа $\Gamma(R/\sim)$, то это означает, что каждая вершина из группы смежна этой вершине $[x]$. Аналогично, если группа вершин, обозначенная описанным выше способом, соединяется пунктирным ребром с какой-либо вершиной $[x]$ графа $\Gamma(R/\sim)$, то это означает, что вершина из группы смежна этой вершине $[x]$ при выполнении определенного условия, указанного внизу рисунка.

Для любого локального кольца R очевидно $[0]=\{0\}$ и $[1]=R^*$. Для лаконичности изложения, в геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$ мы не будем включать вершины $[0]$ и $[1]$. Очевидно, что $[0]$ смежна со всеми вершинами графа $\Gamma(R/\sim)$, а $[1]$ смежна только с $[0]$.

Теорема 1. *Пусть R – локальное кольцо характеристики p и*

$$J^4=0, \dim_F J/J^2=3, \dim_F J^2/J^3=1, \dim_F J^3=1,$$

где $F=R/J=GF(p^r)$. Тогда, в дополнение к $[0]=\{0\}$ и $[1]=R^*$, $R/\sim$ определяется одним из нижеуказанных множеств:

(1) $[u_1]=F^*u_1+Fu_2+Fu_3+Fv+Fw$, $[v]=F^*v+Fu_2+Fu_3+Fw$, $[w]=(Fu_2+Fu_3+Fw)\backslash\{0\}$;
(2) $[u_1+m_iu_2]=F^*(u_1+m_iu_2)+Fu_3+Fv+Fw$, $[u_2+n_iv]=F^*(u_2+n_iv)+Fu_3+Fw$, $[v]=F^*v+Fu_3+Fw$, $[w]=(Fu_3+Fw)\backslash\{0\}$;
(3) $[u_1+s_iu_2+l_ju_3]=F^*(u_1+s_iu_2+l_ju_3)+Fv+Fw$, *для всяких* $s_i,l_j\in F$, $[u_2+n_iu_3+k_jv]=F^*(u_2+n_iu_3+k_jv)+Fw$, *для всяких* $n_i,k_j\in F$, $[u_3+m_iv]=F^*(u_3+m_iv)+Fw$, *для всякого* $m_i\in F$, $[v]=F^*v+Fw$, $[w]=F^*w$;
(4) $[u_1+s_iu_2+l_ju_3]=F^*(u_1+s_iu_2+l_ju_3)+Fv+Fw$, *для всяких* $s_i,l_j\in F$, $[u_2+n_iu_3+k_jv]=F^*(u_2+n_iu_3+k_jv)+Fw$, *для всяких* $n_i,k_j\in F$, $[u_3+m_iv]=F^*(u_3+m_iv)+Fw$, *для всякого* $m_i\in F$, $[v]=F^*v+Fw$, $[w]=F^*w$.

Для каждого из случаев, геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$, за исключением вершин $[0]$ и $[1]$, имеет вид:

(1)

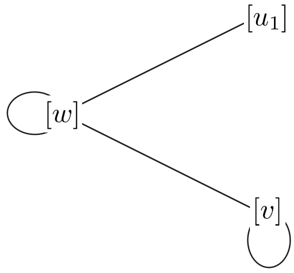
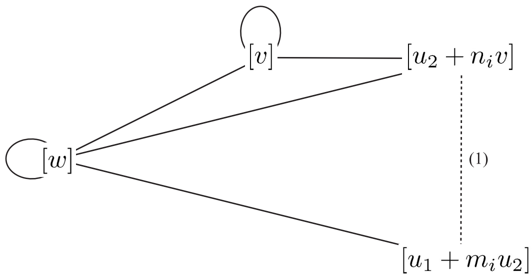


рис. 1

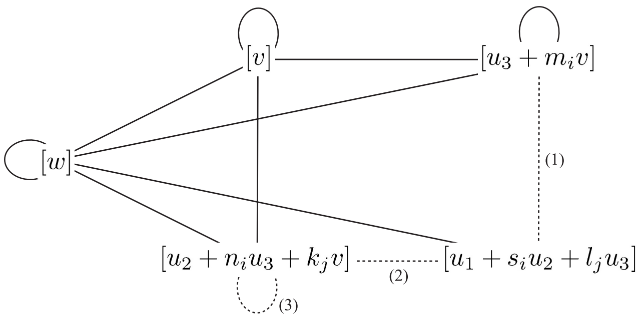
(2)



(1) *если* $m_i + n_j = 0$.

рис. 2

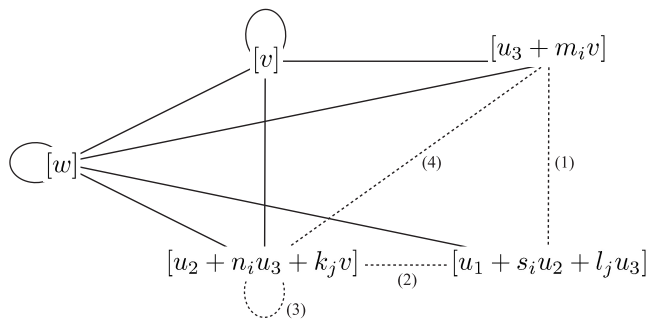
(3)



1) *если* $m_i + s_j = 0$;
2) *если* $k_j + l_\beta + n_i s_\alpha = 0$.
3) *если* $n_\alpha + n_\beta = 0$.

рис. 3

(4)



1) *если* $m_i + dl_j = 0$;
2) *если* $k_j + s_\alpha + dl_\beta n_i = 0$;
3) *если* $dn_in_j + 1 = 0$;
4) *если* $n_i = 0$.

рис. 4

Доказательство. При нахождении графа $\Gamma(R/\sim)$ кольца R будем действовать по следующему алгоритму:

(1) Указываем цель доказательства – множества, являющиеся $\sim$-классами.
(2) Находим аннулятор каждого из множеств, при этом замечая, что все элементы одного множества имеют равные аннуляторы и элементы из разных множеств имеют разные аннуляторы. В силу предложения 3, например, вместо множества $F^*u_1+Fv+Fw$ мы можем рассматривать множество $u_1+Fv+Fw$.
(3) Замечаем, что порядок объединения рассматриваемых множеств равен порядку кольца, то есть q^6.
(4) Находим разбиение аннуляторов $\sim$-классов на классы эквивалентности, которое существует в силу предложения 2, и приводим геометрическое изображение графа.

Произвольные элементы поля F будем обозначать через α_1, α_2, α_3, β, γ, α'_1, α'_2, α'_3, β', γ', а элементы радикала J – через x и x'. Например, для кольца $R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw$:

$$x = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 + \beta v + \gamma w;$$

$$x' = \alpha'_1u_1 + \alpha'_2u_2 + \alpha'_3u_3 + \beta'v + \gamma'w.$$

Далее, подробно рассмотрим каждый случай.

Случай 1. Пусть

$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w, \ \begin{pmatrix} u_1v \\ u_2v \\ u_3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Докажем, что

$$R = [1] \cup [u_1] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw,$$

$$[v] = F^*v + Fu_2 + Fu_3 + Fw,$$

$$[w] = (Fu_2 + Fu_3 + Fw)\backslash\{0\}.$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \beta\alpha_1' + \alpha_1\beta' = 0,\ \alpha_1\alpha_1' = 0.$$

Если $x \in u_1 + Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw$, то $\alpha_1 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \beta\alpha_1' + \beta' = 0,\ \alpha_1' = 0.$$

Отсюда, $\alpha_1' = 0$, $\beta' = 0$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fw.$$

Если $x \in v + Fu_2 + Fu_3 + Fw$, то $\alpha_1 = 0$, $\beta = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x \in (Fu_2 + Fu_3 + Fw)\setminus\{0\}$, то $\alpha_1 = \beta = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_3 \neq 0$ или $\gamma \neq 0$, и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = J.$$

Далее,

$$|R^*| + |F^*u_1 + Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw| + |F^*v + Fu_2 + Fu_3 + Fw| +$$
$$+ |(Fu_2 + Fu_3 + Fw)\setminus\{0\}| + |\{0\}| = (q^6 - q^5) + (q-1)q^4 + (q-1)q^3 + q^3 - 1 + 1 = q^6.$$

Итак,

$$R = [1] \cup [u_1] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_1] = [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[v] = [w] \cup [v] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[w] = J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 1.

Случай 2. Пусть

$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w,\ \begin{pmatrix} u_1v \\ u_2v \\ u_3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Докажем, что

$$R = [1] \bigcup_{m_i \in F} [u_1 + m_iu_2] \bigcup_{n_i \in F} [u_2 + n_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$
$$[u_1 + m_iu_2] = F^*(u_1 + m_iu_2) + Fu_3 + Fv + Fw,$$
$$[u_2 + n_iv] = F^*(u_2 + n_iv) + Fu_3 + Fw,$$
$$[v] = F^*v + Fu_3 + Fw,$$
$$[w] = (Fu_3 + Fw)\setminus\{0\}.$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha_2' + \beta\alpha_1' + \alpha_1\beta^{'} = 0,\ \alpha_1\alpha_1' = 0.$$

Если $x \in u_1 + m_iu_2 + Fu_3 + Fv + Fw$, для некоторого $m_i \in F$, $i \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = m_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0,\ \beta' + \beta\alpha_1' + m_i\alpha_2' = 0.$$

Отсюда, $\alpha_1' = 0$, $\beta' = -m_i\alpha_2'$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_2 - m_iv) + Fu_3 + Fw.$$

Если $x \in u_2 + n_iv + Fu_3 + Fw$, для некоторого $n_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, q\}$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta = n_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' + n_i\alpha_1' = 0.$$

Отсюда, $\alpha_2' = -n_i\alpha_1'$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_1 - n_iu_2) + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x \in v + Fu_3 + Fw$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x \in (Fu_3 + Fw)\backslash\{0\}$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0$, $\alpha_3 \neq 0$ или $\gamma \neq 0$, и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно, $\mathrm{Ann}(x) = J$.

Далее,

$$|R^*| + \left|\bigcup_{m_i\in F}(F^*(u_1 + m_iu_2) + Fu_3 + Fv + Fw)\right| +$$

$$+\left|\bigcup_{n_i\in F}(F^*(u_2 + n_iv) + Fu_3 + Fw)\right| + |F^*v + Fu_3 + Fw| + |(Fu_3 + Fw)\backslash\{0\}| + |\{0\}| =$$

$$= (q^6 - q^5) + (q-1)q^4 + (q-1)q^3 + (q-1)q^2 + q^2 - 1 + 1 = q^6.$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{m_i\in F}[u_1 + m_iu_2] \bigcup_{n_i\in F}[u_2 + n_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $m_i, n_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, q\}$ справедливо:

$$\mathrm{Ann}[u_1 + m_iu_2] = [u_2 - m_iv] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_2 + n_iv] = [u_1 - n_iu_2] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[v] = \bigcup_{n_i\in F}[u_2 + n_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[w] = J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 2.

Случай 3. Пусть $p = 2$,

$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w, \quad \begin{pmatrix} u_1v \\ u_2v \\ u_3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Докажем, что

$$R = [1] \bigcup_{s_i, l_j\in F}[u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] \bigcup_{n_i, k_j\in F}[u_2 + n_iu_3 + k_jv] \bigcup_{m_i\in F}[u_3 + m_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$[u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] = F^*(u_1 + s_iu_2 + l_ju_3) + Fv + Fw,$$
$$[u_2 + n_iu_3 + k_jv] = F^*(u_2 + n_iu_3 + k_jv) + Fw,$$
$$[u_3 + m_iv] = F^*(u_3 + m_iv) + Fw,$$

$$[v] = F^*v + Fw,$$
$$[w] = F^*w.$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha_3' + \alpha_3\alpha_2' + \beta\alpha_1' + \alpha_1\beta' = 0, \alpha_1\alpha_1' = 0.$$

Если $x \in u_1 + s_iu_2 + l_ju_3 + Fv + Fw$, для некоторых $s_i, l_j \in F$, то $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = s_i$, $\alpha_3 = l_j$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0, \beta' + l_j\alpha_2' + s_i\alpha_3' = 0.$$

Отсюда, $\alpha_1' = 0$, $\beta' = l_j\alpha_2' + s_i\alpha_3'$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_2 + l_jv) + F(u_3 + s_iv) + Fw.$$

Если $x \in u_2 + n_iu_3 + k_jv + Fw$, для некоторых $n_i, k_j \in F$, $i, j \in \{1, \ldots, q\}$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = n_i$, $\beta = k_j$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_3' + k_j\alpha_1' + n_i\alpha_2' = 0.$$

Отсюда, $\alpha_3' = k_j\alpha_1' + n_i\alpha_2'$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_1 + k_ju_3) + F(u_2 + n_iu_3) + Fv + Fw.$$

Если $x \in u_3 + m_iv + Fw$, для некоторого $m_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, q\}$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1, \beta = m_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' + m_i\alpha_1' = 0.$$

Отсюда, $\alpha_2' = m_i\alpha_1'$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_1 + m_iu_2) + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x \in v + Fw$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x = w$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\beta = 0$ и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно, $\mathrm{Ann}(x) = J$.

Далее,

$$|R^*| + \left|\bigcup_{s_i, l_i \in F} (F^*(u_1 + s_iu_2 + l_ju_3) + Fv + Fw)\right| +$$
$$+ \left|\bigcup_{n_i, k_j \in F} (F^*(u_2 + n_iu_3 + k_jv) + Fw)\right| + \left|\bigcup_{m_i \in F} (F^*(u_3 + m_iv) + Fw)\right| +$$
$$+ |F^*v + Fw| + |F^*w| + |\{0\}| =$$
$$= (q^6 - q^5) + (q-1)q^4 + (q-1)q^3 + (q-1)q^2 + (q-1)q + q - 1 + 1 = q^6.$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{s_i, l_j \in F} [u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] \bigcup_{n_i, k_j \in F} [u_2 + n_iu_3 + k_jv] \bigcup_{m_i \in F} [u_3 + m_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $s_i, l_j, n_i, k_j, m_i \in F$, $i, j \in \{1, \ldots, q\}$ справедливо:

$$\mathrm{Ann}[u_1+s_iu_2+l_ju_3]=\bigcup_{n_\alpha\in F}[u_2+n_\alpha u_3+(l_j+n_\alpha s_i)v]\cup[u_3+s_iv]\cup[w]\cup[0],$$

$$\mathrm{Ann}[u_2+n_iu_3+k_jv]=\bigcup_{s_\alpha\in F}[u_1+s_\alpha u_2+(k_j+n_is_\alpha)u_3]\bigcup_{k_\beta\in F}[u_2+n_iu_3+k_\beta v]\cup[v]\cup[w]\cup[0],$$

$$\mathrm{Ann}[u_3+m_iv]=\bigcup_{l_\alpha\in F}[u_1+m_iu_2+l_\alpha u_3]\bigcup_{m_\alpha\in F}[u_3+m_\alpha v]\cup[v]\cup[w]\cup[0],$$

$$\mathrm{Ann}[v]=\bigcup_{n_\alpha,k_\beta\in F}[u_2+n_\alpha u_3+k_\beta v]\bigcup_{m_\alpha\in F}[u_3+m_\alpha v]\cup[v]\cup[w]\cup[0],$$

$$\mathrm{Ann}[w]=J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 3.

Случай 4. Пусть

$$\begin{pmatrix}u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3\\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3\\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}v+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&d\end{pmatrix}w,\ \begin{pmatrix}u_1v\\u_2v\\u_3v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}w.$$

Докажем, что

$$R=[1]\bigcup_{s_i,l_j\in F}[u_1+s_iu_2+l_ju_3]\bigcup_{n_i,k_j\in F}[u_2+n_iu_3+k_jv]\bigcup_{m_i\in F}[u_3+m_iv]\cup[v]\cup[w]\cup[0],$$

$$[u_1+s_iu_2+l_ju_3]=F^*(u_1+s_iu_2+l_ju_3)+Fv+Fw,$$
$$[u_2+n_iu_3+k_jv]=F^*(u_2+n_iu_3+k_jv)+Fw,$$
$$[u_3+m_iv]=F^*(u_3+m_iv)+Fw,$$
$$[v]=F^*v+Fw,$$
$$[w]=F^*w.$$

В этом случае

$$xx'=0\Leftrightarrow\alpha_2\alpha_2'+d\alpha_3\alpha_3'+\alpha_1\beta'+\beta\alpha_1'=0,\alpha_1\alpha_1'=0.$$

Если $x\in u_1+s_iu_2+l_ju_3+Fv+Fw$, для некоторых $s_i,l_j\in F$, $i,j\in\{1,\dots,q\}$, то $\alpha_1=1,\alpha_2=s_i,\alpha_3=l_j$ и

$$xx'=0\Leftrightarrow\alpha_1'=0,\beta'+\beta\alpha_1'+s_i\alpha_2'+dl_j\alpha_3'=0.$$

Отсюда, $\alpha_1'=0,\beta'=-(s_i\alpha_2'+dl_j\alpha_3')$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x)=F(u_2-s_iv)+F(u_3-dl_jv)+Fw.$$

Если $x\in u_2+n_iu_3+k_jv+Fw$, для некоторых $n_i,k_j\in F$, $i,j\in\{1,\dots,q\}$, то $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=n_i$, $\beta=k_j$ и

$$xx'=0\Leftrightarrow\alpha_2'+k_j\alpha_1'+dn_i\alpha_3'=0.$$

Отсюда, $\alpha_2'=-(k_j\alpha_1'+dn_i\alpha_3')$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x)=F(u_1-k_ju_2)+F(u_3-dn_iu_2)+Fv+Fw.$$

Если $x\in u_3+m_iv+Fw$, для некоторого $m_i\in F$, $i\in\{1,\dots,q\}$, то $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=1$, $\beta=m_i$ и

$$xx'=0\Leftrightarrow d\alpha_3'+m_i\alpha_1'=0.$$

Отсюда, $\alpha_3' = -\frac{m_i}{d}\alpha_1'$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_1 - \frac{m_i}{d}u_3) + Fu_2 + Fv + Fw.$$

Если $x \in v + Fw$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_2 + Fu_3 + Fv + Fw.$$

Если $x = w$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\beta = 0$ и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = J.$$

Далее,

$$|R^*| + \left|\bigcup_{s_i,l_j\in F}(F^*(u_1 + s_iu_2 + l_ju_3) + Fv + Fw)\right| +$$
$$+\left|\bigcup_{n_i,k_j\in F}(F^*(u_2 + n_iu_3 + k_jv) + Fw)\right| + \left|\bigcup_{m_i\in F}(F^*(u_3 + m_iv) + Fw)\right| +$$
$$+ |F^*v + Fw| + |F^*w| + |\{0\}| =$$
$$= (q^6 - q^5) + (q-1)q^4 + (q-1)q^3 + (q-1)q^2 + (q-1)q + q - 1 + 1 = q^6.$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{s_i,l_j\in F}[u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] \bigcup_{n_i,k_j\in F}[u_2 + n_iu_3 + k_jv] \bigcup_{m_i\in F}[u_3 + m_iv] \cup [v] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $s_i, l_j, n_i, k_j, m_i \in F$, $i, j \in \{1, \ldots, q\}$ справедливо:

$$\mathrm{Ann}[u_1 + s_iu_2 + l_ju_3] = \bigcup_{n_\alpha\in F}[u_2 + n_\alpha u_3 - (s_i + dl_jn_\alpha)v] \cup [u_3 - dl_jv] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}[u_2 + k_jv] = \bigcup_{l_\beta\in F}[u_1 - k_ju_2 + l_\beta u_3] \bigcup_{m_\alpha\in F}[u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}[u_2 + n_iu_3 + k_jv] = \bigcup_{l_\beta\in F}[u_1 - (k_j + dl_\beta n_i)u_2 + l_\beta u_3]$$
$$\bigcup_{k_\alpha\in F}[u_2 - \frac{1}{dn_i}u_3 + k_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0], \text{ где } n_i \neq 0,$$

$$\mathrm{Ann}[u_3 + m_iv] = \bigcup_{s_\alpha\in F}[u_1 + s_\alpha u_2 - \frac{m_i}{d}u_3] \bigcup_{k_\alpha\in F}[u_2 + k_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}[v] = \bigcup_{n_\alpha,k_\beta\in F}[u_2 + n_\alpha u_3 + k_\beta v] \bigcup_{m_\alpha\in F}[u_3 + m_\alpha v] \cup [v] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}[w] = J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 4. $\square$

Теорема 2. *Пусть R – локальное кольцо характеристики p и*

$$J^4 = 0, \dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2/J^3 = 2, \dim_F J^3 = 1,$$

где $F = R/J = GF(p^r)$.

Если $p = 2$, то, в дополнение к $[0] = \{0\}$ и $[1] = R^*$, $R/\sim$ определяется одним из нижеуказанных множеств:

(1) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[u_2] = (Fu_2 + Fv_2)\backslash\{0\} + Fv_1 + Fw$,
$[w] = (Fv_1 + Fw)\backslash\{0\}$;

(2) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[v_2] = F^*v_2 + Fv_1 + Fw$,
$[w] = (Fv_1 + Fw)\backslash\{0\}$;

(3) $[u_1 + n_iu_2] = F^*(u_1 + n_iu_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_2 + k_iv_2] = F^*(u_2 + k_iv_2) + Fv_1 + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$,
$[m_iv_1 + v_2] = F^*(m_iv_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
$[w] = F^*w$;

(4) $[u_1 + n_iu_2] = F^*(u_1 + n_iu_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_2 + k_iv_2] = F^*(u_2 + k_iv_2) + Fv_1 + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$,
$[m_iv_1 + v_2] = F^*(m_iv_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
$[w] = F^*w$;

(5) $[u_1 + n_iu_2] = F^*(u_1 + n_iu_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[v_1 + m_iv_2] = F^*(v_1 + m_iv_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_2] = F^*v_2 + Fw$,
$[w] = F^*w$;

(6) $[n_iu_1 + u_2] = F^*(n_iu_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_1] = F^*u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[m_iv_1 + v_2] = F^*(m_iv_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
$[w] = F^*w$;

(7) $[n_iu_1+u_2] = F^*(n_iu_1+u_2)+Fv_1+Fv_2+Fw$, *для каждого* $n_i \in F, n_i \neq 0, 1$,
$[u_1] = F^*u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[u_2 + k_iv_2] = F^*(u_2 + k_iv_2) + Fv_1 + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$,
$[u_1+u_2+l_iv_1] = F^*(u_1+u_2+l_iv_2)+F(v_1+v_2)+Fw$, *для каждого* $l_i \in F$,
$[v_1 + m_iv_2] = F^*(v_1 + m_iv_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_2] = F^*v_2 + Fw$,
$[w] = F^*w$;

(8) $[u_1] = \{\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \gamma w \,|\, \alpha_i, \beta_i, \gamma \in F, \alpha_1 \neq 0, \alpha_1 \neq \alpha_2\}$,
$[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[u_1 + u_2 + v_1] = \{\alpha_1(u_1+u_2)+\beta_1v_1+\beta_2v_2+\gamma w | \alpha_1, \beta_i, \gamma \in F, \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq \beta_2\}$,
$[u_1 + u_2] = F^*(u_1 + u_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$,
$[v_1] = \{\beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \gamma w \,|\, \beta_i, \gamma \in F, \beta_1 \neq \beta_2\}$,
$[w] = (F(v_1 + v_2) + Fw)\backslash\{0\}$, $i = \overline{1, 2}$;

(9) $[n_iu_1+u_2] = F^*(n_iu_1+u_2)+Fv_1+Fv_2+Fw$, *для каждого* $n_i \in F, n_i \neq 0, 1$,
$[u_1] = F^*u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,

$[u_2 + k_i v_2] = F^*(u_2 + k_i v_2) + Fv_1 + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$,
$[u_1 + u_2 + l_i v_1] = F^*(u_1 + u_2 + l_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $l_i \in F$,
$[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_1] = F^* v_1 + Fw$,
$[w] = F^* w$.

Для каждого из случаев, геометрическое изображение графа $\Gamma(S/\sim)$*, за исключением вершин* $[0]$ *и* $[1]$*, имеет вид:*

(1)

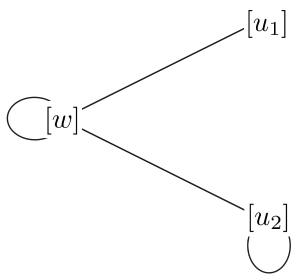


рис. 5

(2)

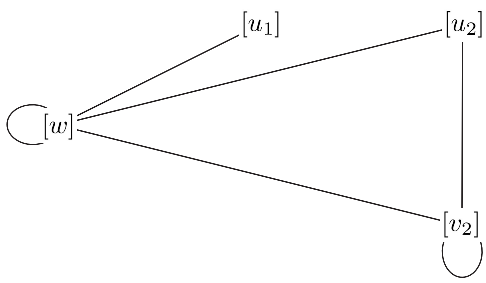
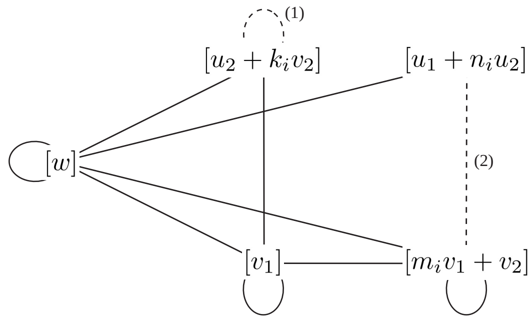


рис. 6

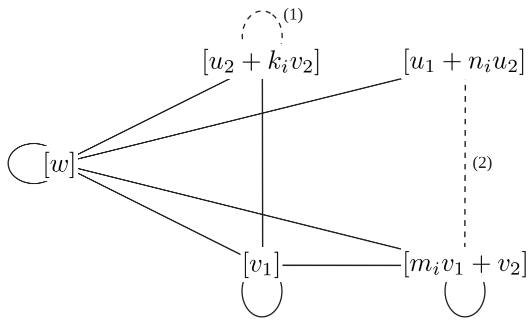
(3)



(1) *если* $k_i = k_j$;
(2) *если* $m_i = n_j$.

рис. 7

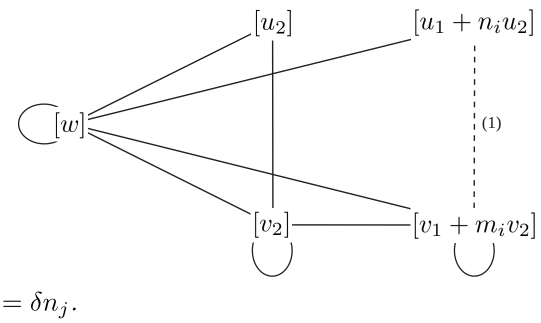
(4)



(1) *если* $k_i + k_j + 1 = 0$;
(2) *если* $m_i = n_j$.

рис. 8

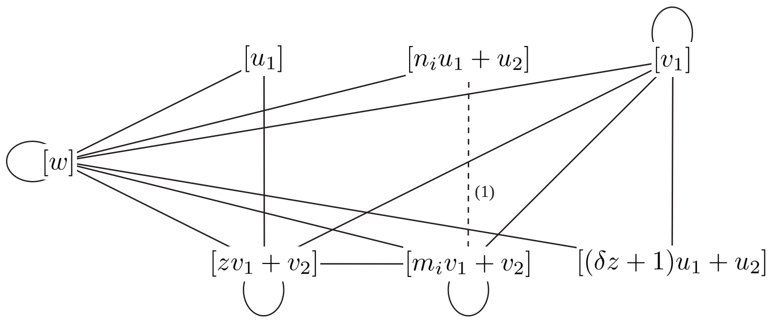
(5)



(1) *если* $m_i = \delta n_j$.

рис. 9

(6)

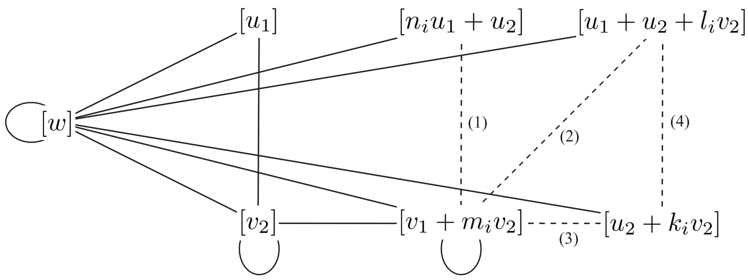


$m_i \neq z$, $n_i \neq \delta z + 1$.

(1) *если* $m_in_j + zn_j + (\delta z + 1)m_i + 1 = 0$.

рис. 10

(7)



$n_i \neq 0, 1$.

(1) *если* $m_i = n_j + 1$;

(2) *если* $m_i = 0$;

(3) *если* $m_i = 1$;

(4) *если* $l_i = k_j$.

рис. 11

(8)

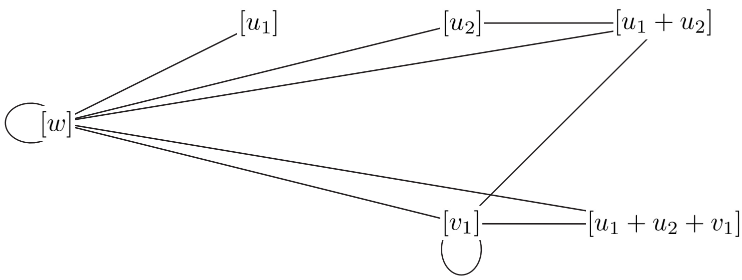
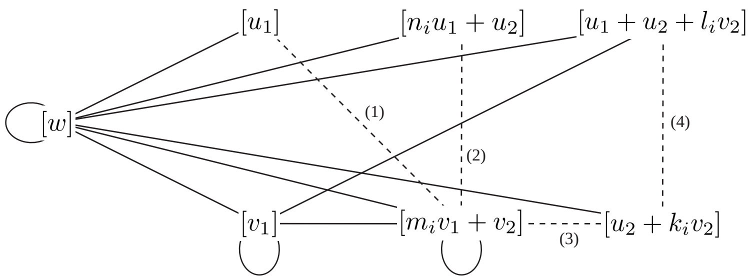


рис. 12

(9)



$n_i \neq 0, 1.$

(1) *если* $m_i = z$;

(2) *если* $1 + m_i + m_i n_j + n_j z = 0$, $m_i \neq 1, z$;

(3) *если* $m_i = 1$;

(4) *если* $l_i = (1+z)k_j$.

рис. 13

Если $p \neq 2$, *то, в дополнение к* $[0] = \{0\}$ *и* $[1] = R^*$, $R/\sim$ *определяется одним из нижеуказанных множеств:*

(1) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[u_2] = (Fu_2 + Fv_1) \setminus \{0\} + Fv_2 + Fw$,
$[w] = (Fv_2 + Fw) \setminus \{0\}$;

(2) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[v_1] = F^*v_1 + Fv_2 + Fw$, $[w] = (Fv_2 + Fw) \setminus \{0\}$;

(3) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_2 + k_i v_1] = F^*(u_2 + k_i v_1) + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$,
$[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_2] = F^*v_2 + Fw$, $[w] = F^*w$;

(4) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $n_i \neq \pm 1$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_1 + u_2 + k_i v_2] = F^*(u_1 + u_2 + k_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$,
$[u_1 - u_2 + l_i v_2] = F^*(u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw$, *для каждого* $l_i \in F$,
$[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
$[w] = F^*w$;

(5) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_1] = F^*v_1 + Fw$,
$[w] = F^*w$;

(6) $[u_1] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w | \alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 \neq -\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma \in F\}$,
$[u_1 + u_2] = F^*(u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[u_1 - u_2 + v_1] = \{\alpha_1(u_1 - u_2) + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w | \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq -\beta_2, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma \in F\}$,
$[u_1 - u_2] = F^*(u_1 - u_2) + F(v_1 - v_2) + Fw$,
$[v_1] = \{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w | \beta_1 \neq -\beta_2, \beta_1, \beta_2, \gamma \in F\}$,
$[w] = (F(v_1 - v_2) + Fw) \setminus \{0\}$;

(7) $[u_1 + k_i u_2] = F^*(u_1 + k_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$, $k_i \neq \pm 1$,
$[u_1 + u_2 + n_i v_2] = F^*(u_1 + u_2 + n_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_1 - u_2 + l_i v_2] = F^*(u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw$, *для каждого* $l_i \in F$,
$[u_2] = F^* u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[v_2] = F^* v_2 + Fw$,
$[w] = F^* w$;

(8) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[u_2] = F^* u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$,
$[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$
$[v_2] = F^* v_2 + Fw$,
$[w] = F^* w$;

(9) $[u_1 + m_i u_2] = F^*(u_1 + m_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$,
$[u_2 + n_i v_1] = F^*(u_2 + n_i v_1) + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$,
$[v_1 + k_i v_2] = F^*(v_1 + k_i v_2) + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$,
$[v_2] = F^* v_2 + Fw$,
$[w] = F^* w$.

Для каждого из случаев, геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$, *за исключением вершин* $[0]$ *и* $[1]$, *имеет вид:*

(1)

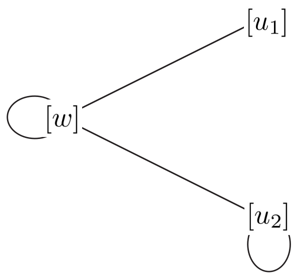


рис. 14

(2)

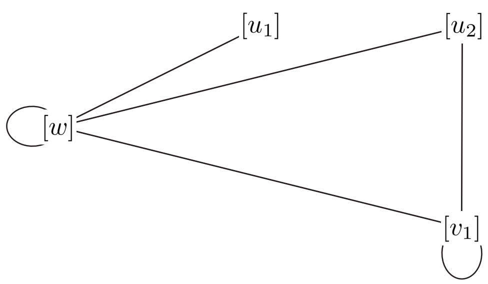
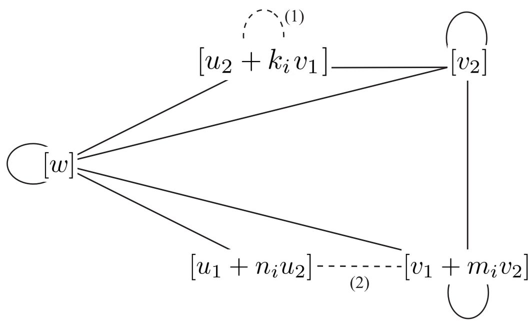


рис. 15

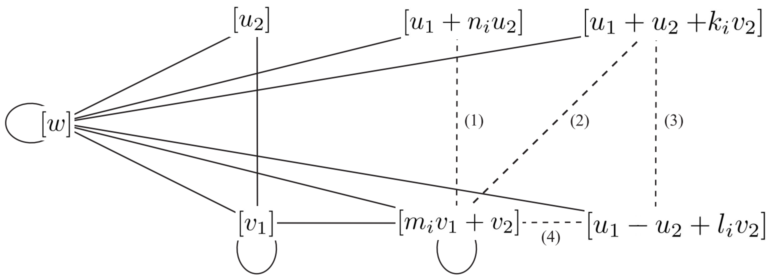
(3)



(1) *если* $k_i + k_j = 0$;
(2) *если* $m_i + n_j + 1 = 0$.

рис. 16

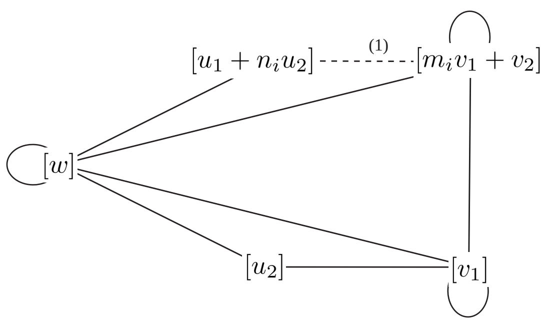
(4)



(1) *если* $n_i + m_j = 0$;
(2) *если* $m_i = -1$;
(3) *если* $k_i = l_j$;
(4) *если* $m_i = 1$.

рис. 17

(5)



(1) *если* $m_i + \delta n_j = 0$.

рис. 18

(6)

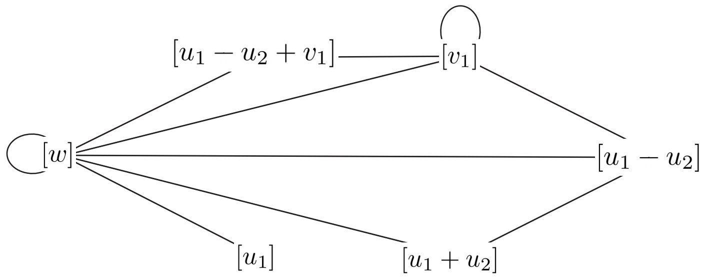
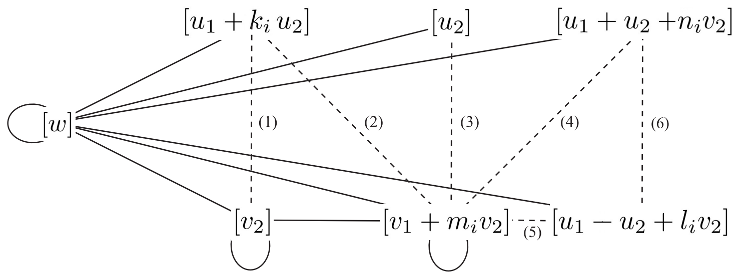


рис. 19

(7)

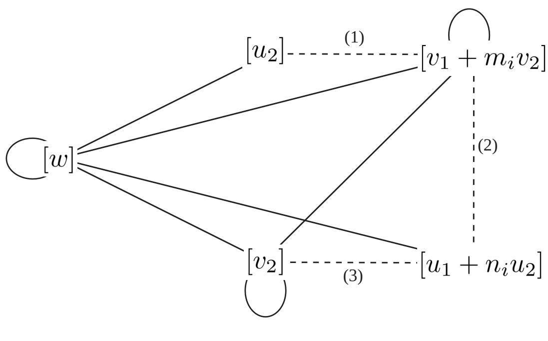


$k_i \neq \pm 1$

(1) *если* $k_i = -\zeta$;
(2) *если* $k_i m_j + k_i \zeta + m_j \zeta + 1 = 0$;
(3) *если* $m_i = -\zeta$;
(4) *если* $m_i = -1$;
(5) *если* $m_i = 1$.
(6) *если* $(1 + \zeta) l_i = (1 - \zeta) n_j$.

рис. 20

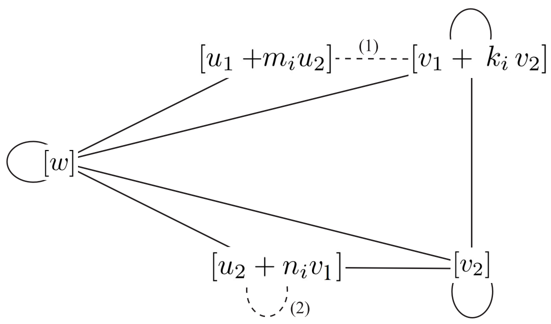
(8)



(1) *если* $m_i = -\frac{\xi}{\delta}$;
(2) *если* $\xi m_i + \xi n_j + \delta m_i n_j + 1 = 0$, $n_j \neq -\frac{\xi}{\delta}$, $m_i \neq -\frac{\xi}{\delta}$;
(3) *если* $n_i = -\frac{\xi}{\delta}$.

рис. 21

(9)



(1) *если* $k_i + m_j = 0$;
(2) *если* $n_i + n_j = 0$.

рис. 22

Доказательство. Результаты для колец характеристики $p = 2$ были доказаны в работе [24] и сформулированы в настоящей теореме для полноты изложения.

Рассмотрим случай $p \neq 2$. Наибольшую сложность представляет нахождение классов эквивалентности, указанных в формулировке теоремы для каждого из случаев. При известных классах и графическом изображении графа все доказательства однотипны и по сути сводятся к вычислительной проверке. Далее, для примера, мы рассмотрим только случай 7 как наиболее сложный из всех.

Случай 7. Пусть
$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 \\ u_2u_1 & u_2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \omega, \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta & 1 \end{pmatrix} \omega,$$
где $\zeta \neq \pm 1$ и $\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta} \notin (F^*)^3$.

Докажем, что
$$R = [1] \bigcup_{k_i \in F \setminus \{\pm 1\}} [u_1 + k_i u_2] \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + u_2 + n_i v_2] \bigcup_{l_i \in F} [u_1 - u_2 + l_i v_2] \cup [u_2]$$
$$\bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$[u_1 + k_i u_2] = F^*(u_1 + k_i u_2) + F v_1 + F v_2 + F w, k_i \neq \pm 1,$$
$$[u_1 + u_2 + n_i v_2] = F^*(u_1 + u_2 + n_i v_2) + F(v_1 + v_2) + F w,$$
$$[u_1 - u_2 + l_i v_2] = F^*(u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + F w,$$
$$[u_2] = F^* u_2 + F v_1 + F v_2 + F w,$$
$$[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + F w,$$
$$[v_2] = F^* v_2 + F w,$$
$$[w] = F^* w.$$

В этом случае
$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_1' + \alpha_2 \alpha_2' = 0, \ \alpha_1 \alpha_2' + \alpha_2 \alpha_1' = 0,$$
$$\alpha_1(\beta_1' + \beta_2' \zeta) + \alpha_2(\beta_1' \zeta + \beta_2') + \beta_1(\alpha_1' + \alpha_2' \zeta) + \beta_2(\alpha_1' \zeta + \alpha_2') = 0.$$

Если $x \in u_1 + k_i u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, то $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = k_i$, для некоторого $k_i \in F$, $k_i \neq \pm 1$, $i \in \{1, \dots, q\}$, и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' + k_i\alpha_2' = 0,\ \alpha_2' + k_i\alpha_1' = 0,$$

$$\beta_1' + \beta_2'\zeta + k_i(\beta_1'\zeta + \beta_2') + \beta_1(\alpha_1' + \alpha_2'\zeta) + \beta_2(\alpha_1'\zeta + \alpha_2') = 0.$$

Так как $\alpha_1' + k_i\alpha_2' = 0$ и $\alpha_2' + k_i\alpha_1' = 0$, то $\alpha_1'(1 - k_i^2) = 0$, а, значит, $\alpha_1' = \alpha_2' = 0$. Следовательно,

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = \alpha_2' = 0, \beta_1'(1 + k_i\zeta) + \beta_2'(k_i + \zeta) = 0.$$

Если $k_i \neq -\zeta$, то

$$\operatorname{Ann}(r) = F\left(v_1 - \frac{1 + k_i\zeta}{k_i + \zeta} v_2\right) + Fw.$$

Если $k_i = -\zeta$, то $\beta_1' = 0$ и

$$\operatorname{Ann}(x) = Fv_2 + Fw.$$

Если $x \in (u_1 + u_2 + n_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_2 = \beta_1 + n_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' = -\alpha_1', \beta_2' = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}\, n_i\alpha_1' - \beta_1'.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ann}(x) = F\left(u_1 - u_2 + \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}\, n_i v_2\right) + F(v_1 - v_2) + Fw.$$

Если $x \in (u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw$, то $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = -\beta_1 + l_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' = \alpha_1', \beta_2' = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}\, l_i\alpha_1' + \beta_1'.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ann}(x) = F\left(u_1 + u_2 + \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}\, l_i v_2\right) + F(v_1 + v_2) + Fw.$$

Если $x \in u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' = \alpha_1' = 0, \beta_2' = -\beta_1'\zeta.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ann}(x) = F(v_1 - \zeta v_2) + Fw.$$

Если $x \in v_1 + m_i v_2 + Fw$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = m_i$, для некоторого $m_i \in F$, $i \in \{1, \dots, q\}$, и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' + \alpha_2' m_i + \alpha_2'\zeta + \alpha_1' m_i\zeta = 0.$$

Если $m_i \neq -\zeta$, то $\alpha_2' = -\frac{1 + m_i\zeta}{m_i + \zeta}\alpha_1'$ и

$$\operatorname{Ann}(x) = F\left(u_1 - \frac{1 + m_i\zeta}{m_i + \zeta}\, u_2\right) + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $m_i = -\zeta$, то $\alpha_1' = 0$ и

$$\operatorname{Ann}(x) = Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $x \in v_2 + F\omega$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' = -\alpha_1'\zeta.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_1 - \zeta u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $x = w$, то $xx' = 0$ для любого $x' \in J$ и, следовательно, $\mathrm{Ann}(w) = J$.

Далее,

$$|R^*| + \left|\bigcup_{k_i \in F\setminus\{\pm 1\}} (F^*(u_1 + k_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw)\right| +$$
$$+ |F^*(u_1 + u_2 + n_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw| +$$
$$+ |F^*(u_1 - u_2 + l_i v_2) + F(v_1 - v_2) + Fw| + |F^* u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw| +$$
$$+ \left|\bigcup_{m_i \in F} (F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw)\right| + |F^* v_2 + Fw| + |F^* w| + |\{0\}| =$$
$$= (q-1)q^5 + (q-1)(q-2)q^3 + (q-1)q^3 + (q-1)q^3 +$$
$$(q-1)q^3 + (q-1)q^2 + (q-1)q + (q-1) + 1 = q^6.$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{k_i \in F\setminus\{\pm 1\}} [u_1 + k_i u_2] \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + u_2 + n_i v_2] \bigcup_{l_i \in F} [u_1 - u_2 + l_i v_2] \cup [u_2]$$
$$\bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $k_i, l_i, m_j, n_i \in F$, $i, j \in \{1, \ldots, q\}$,

$$\mathrm{Ann}[u_1 + k_i u_2] = \left[v_1 - \frac{1 + k_i\zeta}{k_i + \zeta} v_2\right] \cup [w] \cup [0],\ \ k_i \neq -\zeta,$$
$$\mathrm{Ann}[u_1 - \zeta u_2] = [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_1 + u_2 + n_i v_2] = \left[u_1 - u_2 + \frac{1-\zeta}{1+\zeta}\, n_i v_2\right] \cup [v_1 - v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_1 - u_2 + l_i v_2] = \left[u_1 + u_2 + \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\, n_i v_2\right] \cup [v_1 + v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_2] = [v_1 - \zeta v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[v_1 + m_j v_2] = \left[u_1 - \frac{1 + m_j\zeta}{m_j + \zeta}\, u_2\right] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],\ \ m_j \neq \pm 1, -\zeta,$$
$$\mathrm{Ann}[v_1 - \zeta v_2] = [u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[v_1 - v_2] = \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + u_2 + n_i v_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[v_1 + v_2] = \bigcup_{l_i \in F} [u_1 - u_2 + l_i v_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[v_2] = [u_1 - \zeta u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[w] = J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 20.

□

References

[1] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra, **116** (1988), 208–226.

[2] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divizor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434–447.

[3] N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Communication in Algebra, **38** (2010), 2965–2980.

[4] N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^5*, Communication in Algebra, **41** (2013), 765–775.

[5] B.R. McDonald, *Finite rings with identity*, Decker, 1974.

[6] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compositio Math., **21** (1969), 195–229.

[7] C.J. Chikunji, *Unit groups of cube radical zero commutative completely primary finite rings*, Int. J. Math. Sci., **4** (2005), 572–579.

[8] S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi, *When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph*, J.Algebra, **270** (2003), 169–180.

[9] R. Belshoff, J. Chapman, *Planar zero-divisor graphs*, J. Algebra, **316** (2007), 471–480.

[10] A.S. Kuz'mina, Yu.N. Maltsev, *Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs*, Asian-European J. Math., **1(4)** (2008), 565–574.

[11] A.S. Kuzmina, *On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs*, Discretnaya Matematika, **4** (2009), 60–75.

[12] A.S. Kuzmina, *Finite rings with Eulerian zero-divisor graphs*, J. of Algebra and Its Appl., **11(3)** (2012), 551–559.

[13] S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra, **296** (2006), 462–479.

[14] A.S. Kuzmina, *On some properties of ring varieties, where isomorphic zero-divisor graphs of finite rings give isomorphic rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **8** (2011), 179–190.

[15] E.V. Zhuravlev, A.S. Kuz'mina, Yu.N. Mal'tsev, *The description of varieties of rings whose finite rings are uniquely determined by their zero-divisor graphs*, Russian Mathematics, **57** (2013), 10–20.

[16] E. V. Zhuravlev, A. S. Monastyreva, *Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings*, Siberian Mathematical Journal, **61:1** (2020), 76—84

[17] A. Tadayyonfar, A.R. Ashrafi, *The zero divisor graphs of finite rings of cubefree order*, FILOMAT, **29:8** (2010), 1715–1720.

[18] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. Part 1. Nonlocal rings*, J. Algebra, **231** (2000), 677–690.

[19] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. Part 2. Local rings*, J. Algebra, **231** (2000), 691–704.

[20] V.G. Antipkin, V.P. Elizarov, *Rings of order p^3*, Siberian Mathematical Journal, **23** (1982), 457–464.

[21] B. Fine, *Classification of finite rings of order p^2*, Mathematics Magazine, **66** (1993), 248–252.

[22] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), – 15–29 c.

[23] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 625–638.

[24] E.V. Zhuravlev, A.S. Monastyreva, *On zero divisor graphs of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 465–480.

Evgeniy Vladimirovich Zhuravlev
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru

Olga Alexandrovna Filina
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: olya-filina@mail.ru