S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 539.3:517.95
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC ??X??

ПЛАСТИНА КИРХГОФА–ЛЯВА С ПЛОСКИМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Н. А. НИКОЛАЕВА

Abstract. An equilibrium problem for a plate under the action of external forces is studied. It is assumed that the plate has a flat rigid inclusion. We suppose that there is throung crack along a fixed part of the inclusions boundary. To exclude a mutual penetration between crack faces, inequality type of boundary conditions are imposed. The problem is formulated as a variational inequality. The differential formulation of the problem is obtained provided that the solution is smooth. An equivalence of two settings is established: variational and differential.

Keywords: variational inequality, crack, non-penetration condition, Kirchhoff–Love plate.

1. Введение

В настоящее время в связи с широким применением композиционных материалов, построение и изучение модельных задач для тел, имеющих неоднородности в виде включений и трещин, представляет собой актуальную тему для исследования. Как известно, при математическом моделировании важное значение имеет выбор краевых условий на берегах трещин. В классической модели для описания трещин используются линейные краевые условия Неймана [1]. Такие модели с точки зрения механики имеют недостаток – противоположные берега трещины могут проникать друг в друга. В настоящей работе при моделировании трещин используются нелинейные краевые условия вида равенств и неравенств. Данные условия в отличие от линейных краевых условий позволяют только расхождение или касание берегов трещины. Нелинейные условия

Nikolaeva, N. A., Kirchhoff-Love plate with flat rigid inclusion.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и Республики Саха (Якутия) (проект 18-41-140003).

Поступила , опубликована .

непроникания также могут быть использованы в случае отслоения включений. На протяжении последних лет выполнен большой объем исследований, относящихся к анализу задач равновесия упругих тел с включениями различной размерности и жесткости при наличии отслоения, при этом использовались нелинейные краевые условия непроникания [2–21]. Широкий круг задач данного направления можно разделять по типу включений. Включения называются объемными, если размерность тела совпадает с размерностью включения [2–3]. Мы говорим, что включение тонкое, если его размерность строго меньше размерности тела, в котором оно содержится. Когда для точек включения задана структура поля перемещений, имеется в виду жесткое включение. Наличие жестких включений в деформируемом теле приводит к необходимости формулировать дополнительные краевые условия нелокального типа, обеспечивающие условия равновесия для включения. Математические модели тонких жестких включений в упругих телах исследовались в работах [4–9]. Модель пластины Кирхгофа – Лява содержащая тонкое жесткое включение исследована в работах [10–15]. Что касается задачи о равновесии пластины Кирхгофа-Лява с плоским жестким включением, которое определяется цилиндрической поверхностью, то мы можем обратиться к работе [10]. В отличие от тонких жестких включений, плоское жесткое включение моделируется таким образом, что исходные вертикальные волокна в состоянии равновесия получают одни и те же значения углов поворота вдоль всего включения.

В настоящей работе рассматривается полная модель пластины Кирхгофа-Лява, в которой неизвестными функциями являются вертикальные и горизонтальные перемещения точек срединной поверхности пластины. Исследуется задача равновесия упругой пластины, содержащее плоское жесткое включение, которое в исходном состоянии перпендикулярно срединной плоскости. Вариационная формулировка данной задачи предложена и исследована в недавней работе [10], где доказана однозначная разрешимость задачи для пластины с плоским жестким включением. Важно отметить, что на границе включения находится трещина; на берегах трещины заданы краевые условия вида неравенств. В данной работе для задачи, рассмотренной в работе [10], найдена дифференциальная постановка в виде уравнений равновесия вместе с полной системой краевых условий, выполняющихся на границе жесткого включения и трещины. Доказано, что полученная дифференциальная постановка эквивалентна вариационной.

2. Постановка задачи. Дифференциальная формулировка.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ, единичную внешнюю нормаль к которой обозначим через $n = (n_1, n_2)$. Пусть $\overline{\gamma} \subset \Omega$ – гладкая кривая без самопересечений. Предположим, что существует продолжение кривой γ, пересекающее границу Γ и разбивающее область Ω на две подобласти D_1, D_2, с липшицевыми границами ∂D_i, причем $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0, \quad i = 1, 2$. Нормаль к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Направлением нормалей ν определяются положительные и отрицательные берега данной кривой. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$.

Декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ выберем так, чтобы множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset R^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. Предположим, что плоское жесткое включение описывается цилиндрической поверхностью $x =$

$(x_1, x_2) \in \gamma,\ -1 \leqslant z \leqslant 1$, где $|z|$ – расстояние до срединной плоскости. Будем считать, что имеется отслоение на положительном берегу γ^+. Это означает, что на поверхности плоского включения расположена трещина.

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ – тензор модулей упругости, который обладает свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},\ a_{ijkl} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(R^2),\ i,j,k,l = 1,2,$$
$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0|\xi|^2, \quad \forall\ \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = const > 0.$$

Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Аналогичным условиям удовлетворяет и тензор $D = \{d_{ijkl}\}$.

Введем пространство функций, заданных на γ:

$$R(\gamma) = \{\zeta(x) = (\rho, l)|\ \rho(x) = b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2);$$
$$l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,\ x \in \gamma\},$$

где $b,\ c_1,\ c_2, a_0, a_1, a_2 = const; x = (x_1, x_2)$.

Дифференциальная постановка задачи о равновесии упругой пластины, содержащей плоское жесткое включение γ, состоит в следующем. Требуется найти функции $W = (w_1, w_2), w, \sigma = \{\sigma_{ij}\}, m = \{m_{ij}\}, i,j = 1,2,\ \rho^0, l^0 \in R(\gamma)$ такие, что

$$-\mathrm{div}\ \sigma = F, \qquad \sigma = A\varepsilon(W) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{1}$$

$$-\nabla\nabla m = f, \qquad m = -D\nabla\nabla w \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{2}$$

$$W = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3}$$

$$[W_\nu] \geqslant \left|\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right|, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2^0, \quad W^- = \rho^0, \quad w^- = l^0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{4}$$

$$\sigma_\tau^+ = 0, \quad t_\nu^+ = 0, \quad -\sigma_\nu^+ \geqslant |m_\nu^+|, \quad \sigma_\nu^+[W_\nu] + m_\nu^+\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{5}$$

(6)
$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu]\cdot\rho = 0, \quad \int\limits_\gamma [t^\nu]l - \int\limits_\gamma [m_\nu](a_1\nu_1 + a_2\nu_2) = 0, \quad \forall\,(\rho, l) \in R(\gamma),\ a_1,\ a_2 = const.$$

Здесь $[v] = v^+ - v^-$ – скачок функции v на γ, где $v^\pm$ соответствуют значениям функции v на положительном и отрицательном берегах кривой γ по отношению к нормали ν; $F = (f_1, f_2)$; $f_1, f_2, f \in L^2(\Omega)$ - заданные внешние силы. При этом используются следующие обозначения: $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$ – тензоры усилий и моментов, $\varepsilon(W) = \{\varepsilon_{ij}(W)\}$ – тензор малых деформаций, $i,j = 1,2$; W, w – горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной поверхности пластины соответственно; $m_\nu(w) = m_\nu$ – изгибающий момент, $t_\nu(m) = t_\nu$ – перерезывающая сила;

$$\mathrm{div}\sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j}), \quad \nabla\nabla m = m_{ij,ij}, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2), \quad W_\nu = W\cdot\nu,$$

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j), \quad \nabla\nabla w = \{w_{,ij}\}_{i,j=1}^2, \ \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right),$$

$$m_\nu = -m_{ij}\nu_j\nu_i, \quad t_\nu = -m_{ij,k}\tau_k\tau_j\nu_i - m_{ij,j}\nu_j, \quad (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)\ i,j,k,l = 1,2.$$

В дифференциальной постановке первые соотношения в (1) и (2) представляют собой уравнения равновесия, а вторые соотношения в (1) и (2) – уравнения состояния. Краевое условие (3) описывает жесткое защемление пластины на внешней границе Γ. Первое неравенство из (4) обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины. Второе и третье равенства (4) означают, что углы поворота нормальных волокон пластины принимают в состоянии равновесия одно и то же значение в пределах всего плоского жесткого включения. Последние два условия (4) указывают на характер перемещений на γ. Набор нелинейных условий (5) описывает отслоение жесткого включения, при этом первое равенство соответствует нулевому трению, а второе – равенству нулю перерезывающей силы на γ^+. Краевые условия (6) соответствуют принципу возможных перемещений.

3. Вариационная формулировка.

Вариационная формулировка задачи (1)–(6) рассмотрена в [10]. Приведем данную формулировку, для этого введем множество допустимых перемещений K:

$$K = \{(W,w) \in H_\Gamma(\Omega_\gamma) \mid [W]\nu \geqslant \left|\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right|,\ W^- = \rho,\ w^- = l,$$

$$\frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1,\ \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2 \text{ на } \gamma;\ (\rho, l) \in R(\gamma);\quad a_1,\ a_2 = const\},$$

где

$$H_\Gamma(\Omega_\gamma) = H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) \times H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) \times H^2_\Gamma(\Omega_\gamma),$$

$$H^1_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{W \in H^1(\Omega_\gamma) \mid W = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

$$H^2_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{w \in H^2(\Omega_\gamma) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Рассмотрим функционал энергии пластины

$$\Pi(W,w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(W)\varepsilon(W) - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} m(w)\nabla\nabla w - \int\limits_{\Omega_\gamma} FW - \int\limits_{\Omega_\gamma} fw.$$

Здесь и далее для краткости свертки тензоров $\sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W),\ m_{ij}(w)w_{,ij}$ обозначаются через $\sigma(W)\varepsilon(W),\ m(w)\nabla\nabla w$ соответственно. Тогда задачу о равновесии пластины сформулируем как задачу минимизации функционала энергии:

$$\inf_{(W,w)\in K} \Pi(W,w). \tag{7}$$

Задача (7) имеет решение и решение этой задачи удовлетворяет следующему вариационному неравенству (доказательство см. в [10])

$$(W,w) \in K,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(W)\varepsilon(\overline{W}-W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} m(w)(\nabla\nabla\overline{w} - \nabla\nabla w) \geqslant \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\overline{W}-W) + \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\overline{w}-w)\ \ \forall\, (\overline{W},\overline{w}) \in K, \tag{8}$$

более того решение является единственным.

4. Эквивалентность.

Теорема 1. *Вариационное неравенство* (8) *эквивалентно дифференциальной постановке краевой задачи о равновесии упругой пластины* (1)–(6) *в предположении достаточной гладкости решения.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено (8). Для начала, отметим, что соотношения (3) и (4) вытекают из определения множества K. Для дальнейшего полезными будут следующие формулы Грина [2]:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(U)\varepsilon(V) = -\int\limits_{\Omega_\gamma} \mathrm{div}\sigma \cdot V - \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu \cdot V], \tag{9}$$

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} m(u) \cdot \nabla\nabla v = -\int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla\nabla m \cdot v - \int\limits_{\gamma} \left[m_\nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] + \int\limits_{\gamma} [t_\nu v], \tag{10}$$

справедливые для достаточно гладких функций $\sigma = \{\sigma_{ij}\}, m = \{m_{ij}\}, V = (v_1, v_2), v$, таких что $V = 0$ на Γ в случае первой формулы и $v = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ на Γ в случае второй формулы.

Покажем, что уравнения равновесия (1), (2) выполнены в обобщенном смысле. Возьмем произвольную бесконечно дифференцируемую и имеющую компактный носитель в Ω_γ функцию $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Подставим $(\overline{W}, \overline{w}) = (W \pm \theta, w)$ в (8) в качестве пробных элементов. Получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(W)\varepsilon(\theta) = \int\limits_{\Omega_\gamma} F\theta.$$

Отсюда в силу произвольности θ будем иметь уравнения равновесия

$$-\mathrm{div}\, \sigma(W) = F \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma.$$

Далее, подставляя тестовые функции $(\overline{W}, \overline{w}) = (W, w \pm \varphi),\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ в (8), найдем

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} m(w)\nabla\nabla\varphi = \int\limits_{\Omega_\gamma} f\varphi.$$

Из последнего равенства следует справедливость $-\nabla\nabla m = f$ в Ω_γ в смысле обобщенных функций.

Далее, разбивая область Ω на подобласти Ω_1, Ω_2 с гладкими границами $\partial\Omega_i, i = 1, 2$, как указано на рис. 1, из (8) с помощью формул Грина (9) и (10), а также учитывая уравнения равновесия (1) и (2), будем иметь

$$(W, w) \in K,$$

$$-\int\limits_{\gamma} [\sigma\nu \cdot (\overline{W} - W)] - \int\limits_{\gamma} \left[m_\nu \cdot \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right] + \int\limits_{\gamma} [t_\nu \cdot (\overline{w} - w)] \geqslant 0 \ \ \forall\, (\overline{W}, \overline{w}) \in K. \tag{11}$$

Выберем в (11) тестовые функции вида $(\overline{W}, \overline{w}) = (W + \widetilde{W}, w) \in K$, причем $\widetilde{W} \in K-$ достаточно гладкая функция, такая что $\widetilde{W}^- = 0$ на γ. Получим

$$-\int\limits_{\gamma} \sigma^+\nu \cdot \widetilde{W}^+ = -\int\limits_{\gamma} (\sigma_\nu^+ \widetilde{W}_\nu^+ + \sigma_\tau^+ \widetilde{W}_\tau^+) \geqslant 0.$$

Поскольку на функцию $\widetilde{W}_\tau^+$ отсутствуют ограничения, из последнего неравенства имеем первое условие (5).

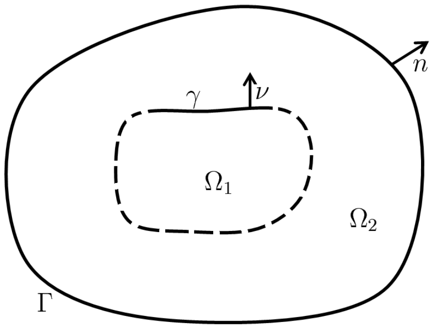

Рис. 1.

Теперь докажем справедливость первого равенства (6). Подставляя в (11) тестовые функции $(\overline{W}, \overline{w}) = (W \pm \widetilde{W}, w) \in K$, где $\widetilde{W} \in K$– достаточно гладкая функция, $\widetilde{W}^- = \rho$, $[\widetilde{W}_\nu] = 0$ на γ, $\rho \in R(\gamma)$, напишем следующую цепочку преобразований:

$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu \cdot \widetilde{W}] = -\int\limits_\gamma \sigma^+\nu \cdot \widetilde{W}^+ + \int\limits_\gamma \sigma^-\nu \cdot \widetilde{W}^- \pm \int\limits_\gamma \sigma^+\nu \cdot \widetilde{W}^- =$$

$$= -\int\limits_\gamma [\sigma\nu] \cdot \widetilde{W}^- - \int\limits_\gamma (\sigma_\nu^+ \cdot [\widetilde{W}_\nu] + \sigma_\tau^+ [\widetilde{W}_\tau^+]) = 0.$$

Отсюда в силу первого условия (5) следует первое условие (6).

Докажем, что выполняется равенство $t_\nu^+ = 0$ на γ. Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\widetilde{w} \in K$, такую что $\widetilde{w}^- = 0$, $\dfrac{\partial \widetilde{w}^\pm}{\partial \nu} = 0$ на γ. После подстановки в (11) пробных функций вида $(\overline{W}, \overline{w}) = (W, w + \widetilde{w})$ получим

$$\int\limits_\gamma t_\nu^+ \widetilde{w}^+ \geqslant 0.$$

В силу произвольности $\widetilde{w}^+$ из последнего неравенства будем иметь второе условие (5).

Возьмем теперь произвольную гладкую функцию $\widetilde{w} \in K$, которая удовлетворяет условиям

$$\widetilde{w}^- = l,\ \frac{\partial \widetilde{w}^-}{\partial x_1} = a_1,\ \frac{\partial \widetilde{w}^-}{\partial x_2} = a_2,\ \ \left[\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu}\right] = 0 \text{ на } \gamma,\ l \in R(\gamma),\ a_1, a_2 = const.$$

Подставим $(\overline{W}, \overline{w}) = (W, w \pm \widetilde{w})$ в (11):

$$-\int\limits_\gamma \left[m_\nu \cdot \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \nu}\right] + \int\limits_\gamma [t_\nu \cdot \widetilde{w}] = 0.$$

С помощью условия $t_\nu^+ = 0$ на γ преобразуем это равенство:

$$-\int\limits_\gamma m_\nu^+ \cdot \frac{\partial \widetilde{w}^+}{\partial \nu} + \int\limits_\gamma m_\nu^- \cdot \frac{\partial \widetilde{w}^-}{\partial \nu} + \int\limits_\gamma t_\nu^+ \cdot \widetilde{w}^+ - \int\limits_\gamma t_\nu^- \cdot \widetilde{w}^- \pm \int\limits_\gamma m_\nu^+ \cdot \frac{\partial \widetilde{w}^-}{\partial \nu} + \int\limits_\gamma t_\nu^+ \cdot \widetilde{w}^- = 0.$$

Из последнего равенства получим

$$-\int_\gamma [m_\nu]\cdot\frac{\partial\widetilde{w}^-}{\partial\nu}+\int_\gamma [t_\nu]\cdot\widetilde{w}^-=0. \tag{12}$$

Поскольку

$$\widetilde{w}^-=l,\quad \frac{\partial\widetilde{w}^-}{\partial\nu}=\left(\frac{\partial\widetilde{w}^-}{\partial x_1},\frac{\partial\widetilde{w}^-}{\partial x_2}\right)\cdot(\nu_1,\nu_2)=a_1\nu_1+a_2\nu_2,$$

из равенства (12) получим второе условие (6).

Остается показать справедливость последних двух соотношений (5). Подставим $(\overline{W},\overline{w})=(W+\widetilde{W},w+\widetilde{w})\in K$ в (11) в качестве тестовых функций, где $(\widetilde{W},\widetilde{w})\in K$ является достаточно гладкой функцией и удовлетворяет условию

$$[\widetilde{W}_\nu]=\left|\left[\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\nu}\right]\right|\quad\text{на}\quad\gamma.$$

Применяя полученные выше краевые условия (5) и (6), запишем

$$-\int_\gamma\left(\sigma_\nu^+[\widetilde{W}_\nu]+m_\nu^+\left[\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\nu}\right]\right)\geqslant 0. \tag{13}$$

Если выполнено условие $\left[\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\nu}\right]\geqslant 0$, из (13) следует, что $-\sigma_\nu^+\geqslant m_\nu^+$ на γ. А для случая $\left[\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\nu}\right]\leqslant 0$ справедливо неравенство $\sigma_\nu^+\leqslant m_\nu^+$ на γ. Таким образом, из (13) имеем неравенство

$$-\sigma_\nu^+\geqslant|m_\nu^+|\quad\text{на}\ \ \gamma.$$

И наконец, осуществим вывод последнего равенства дифференциальной постановки. Подставляя функции $(\overline{W},\overline{w})=(0,0),(\overline{W},\overline{w})=2(W,w)$ в неравенство (11), а также применяя краевые условия (5) и (6), получим

$$-\int_\gamma\sigma_\nu^+[W_\nu]-\int_\gamma m_\nu^+\left[\frac{\partial w}{\partial\nu}\right]=0. \tag{14}$$

В силу третьего неравенства (5) и условия непроникания (4), можно сделать вывод, что

$$\sigma_\nu^+[W_\nu]+m_\nu^+\left[\frac{\partial w}{\partial\nu}\right]\geqslant 0\quad\text{на}\ \ \gamma.$$

Поскольку интеграл от этой функции в (14) по кривой ненулевой длины равен нулю, получаем справедливость последнего равенства (5). Таким образом, теорема в одну сторону полностью доказана.

Достаточность. Покажем, что любое гладкое решение краевой задачи (1)–(6) является решением вариационного неравенства (8). Для этого нам необходимо из уравнений (1), (2) с учетом всех краевых условий получить (8). Пусть (W,w) – гладкое решение, принадлежащее множеству K. Умножим уравнения равновесия (1) и (2) на функцию $(\overline{W}, \overline{w}) - (W, w)$, где $(\overline{W}, \overline{w}) \in K$, и проинтегрируем по области Ω_γ. Получим:

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} \mathrm{div}\sigma \cdot (\overline{W} - W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla\nabla m \cdot (\overline{w} - w) = \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\overline{W} - W) + \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\overline{w} - w).$$

Преобразуем полученное равенство по формулам (9), (10):

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(W)\varepsilon(\overline{W} - W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} m(w)(\nabla\nabla\overline{w} - \nabla\nabla w) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\overline{W} - W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\overline{w} - w) =$$

$$= -\int\limits_{\gamma} [\sigma\nu \cdot (\overline{W} - W)] - \int\limits_{\gamma} \left[m_\nu \cdot \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu}\right)\right] + \int\limits_{\gamma} [t_\nu \cdot (\overline{w} - w)].$$

Для завершения доказательства нам достаточно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Покажем это. Преобразуем правую часть последнего равенства следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(W)\varepsilon(\overline{W} - W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} m(w)(\nabla\nabla\overline{w} - \nabla\nabla w) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\overline{W} - W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\overline{w} - w) =$$

$$= -\int\limits_{\gamma} \sigma^+\nu \cdot (\overline{W}^+ - W^+) + \int\limits_{\gamma} \sigma^-\nu \cdot (\overline{W}^- - W^-) \pm \int\limits_{\gamma} \sigma^+\nu \cdot (\overline{W}^- - W^-) -$$

$$-\int\limits_{\gamma} m_\nu^+ \cdot \left(\frac{\partial \overline{w}^+}{\partial \nu} - \frac{\partial w^+}{\partial \nu}\right) + \int\limits_{\gamma} m_\nu^- \cdot \left(\frac{\partial \overline{w}^-}{\partial \nu} - \frac{\partial w^-}{\partial \nu}\right) \pm \int\limits_{\gamma} m_\nu^+ \cdot \left(\frac{\partial \overline{w}^-}{\partial \nu} - \frac{\partial w^-}{\partial \nu}\right) +$$

$$+\int\limits_{\gamma} t_\nu^+ \cdot (\overline{w}^+ - w^+) - \int\limits_{\gamma} t_\nu^- \cdot (\overline{w}^- - w^-) + \int\limits_{\gamma} t_\nu^+ \cdot (\overline{w}^- - w^-).$$

Отсюда в силу краевых условий (4), первого, второго и четвертого равенства (5), а также разложений $\sigma^+\nu \cdot [W] = \sigma_\nu^+ \cdot [W_\nu] + \sigma_\tau^+ \cdot [W_\tau]$, $\sigma^+\nu \cdot [\overline{W}] = \sigma_\nu^+ \cdot [\overline{W}_\nu] + \sigma_\tau^+ \cdot [\overline{W}_\tau]$ следует

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(W)\varepsilon(\overline{W} - W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} m(w)(\nabla\nabla\overline{w} - \nabla\nabla w) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\overline{W} - W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\overline{w} - w) =$$

$$= -\int\limits_{\gamma} \sigma_\nu^+ \cdot [\overline{W}_\nu] - \int\limits_{\gamma} m_\nu^+ \cdot \left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu}\right] - \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu] \cdot \rho + \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu] \cdot \rho^0 - \int\limits_{\gamma} [m_\nu] \cdot (a_1\nu_1 + a_2\nu_2) +$$

$$+\int\limits_{\gamma} [m_\nu] \cdot (a_1^0\nu_1 + a_2^0\nu_2) + \int\limits_{\gamma} [t_\nu] \cdot l - \int\limits_{\gamma} [t_\nu] \cdot l^0. \tag{15}$$

Сумма первых двух слагаемых правой части (15) неотрицательна в силу третьего неравенства (5) и условия

$$[\overline{W}_\nu] \geqslant \left|\left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu}\right]\right| \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Сумма оставшихся слагаемых равны нулю в силу (6). Таким образом, из (15) следует (8). Теорема полностью доказана. □

Предложение 1. *В дополнение к* (1)–(6) *можно выписать еще одну дифференциальную формулировку задачи* (8). *В области* Ω_γ *требуется найти функции* $W = (w_1, w_2), w, \sigma = \{\sigma_{ij}\}, m = \{m_{ij}\}, i, j = 1, 2,\ \rho^0,\ l^0 \in R(\gamma)$ *такие, что*

$$-div\sigma = F, \qquad \sigma = A\varepsilon(W) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{16}$$

$$-\nabla\nabla m = f, \qquad m = -D\nabla\nabla w \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{17}$$

$$W = w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{18}$$

$$[W]\nu \geqslant \left|\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right|, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2^0, \quad W^- = \rho^0, \quad w^- = l^0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{19}$$

$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu \cdot W] + \int\limits_\gamma [t^\nu w] - \int\limits_\gamma [m_\nu w_\nu] = 0, \tag{20}$$

$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu \cdot U] + \int\limits_\gamma [t^\nu u] - \int\limits_\gamma [m_\nu u_\nu] \geqslant 0, \qquad \forall\ (U, u) \in K, \tag{21}$$

Задача (16)–(21) *эквивалентна* (8). *Следовательно, формулировки* (8), (1)–(6) *и* (16)–(21) *эквивалентны. Доказательство эквивалентности приведенной задачи* (16)–(21) *и вариационного неравенства* (8) *на классе достаточно гладких решений схоже с рассуждением доказательства теоремы, сформулированной выше; детали доказательства мы опускаем. Постановка* (16)–(21) *приводится как дополнительная возможная постановка задачи* (8).

References

[1] N. F. Morozov, *Mathematical Problems of the Theory of Cracks*, Nauka, Moscow, 1984.

[2] A. M. Khludnev, *Elasticity Problems in Nonsmooth Domains*, Fizmatlit, M., 2010.

[3] N. V. Neustroeva, *Rigid Switching on in the Contact Problem for Elastic Plates*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **4**:4 (2010), 526–538.

[4] T. S. Popova, *Problems on thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **12**:2 (2018), 313–324.

[5] A. M. Khludnev, G. Leugering, *On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks*, Math. Meth. Appl. Sci., **33**:16 (2010), 1955–1967.

[6] A. M. Khludnev, *Contact problems for elastic bodies with rigid inclusions*, Quart. Appl. Math., **70** (2012), 269–284.

[7] T. S. Popova, *The equilibrium problem for a viscoelastic body with a thin rigid inclusion*, Mat. Zamet. SVFU, **21**:1 (2014), 47–55.

[8] E. M. Rudoy, *Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body*, Z. Angew. Math. Phys., **66**:4 (2015), 1923–1937.

[9] N. A. Nikolaeva, *About integration of the crack with thin inclusions in elastik bodies*, J. Appl. Ind. Math., **22**:4 (2019), 68-80.

[10] N. P. Lazarev, G. M. Semenova, N.A. Romanova, *On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff-Love plate with a crack*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, **14**:1 (2021), 28–41.

[11] A. M. Khludnev, *Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates*, Europ. J. Mech. A/Solids, **32** (2012), 69–75.

[12] V. V. Shcherbakov, *Existence of an optimal shape for thin rigid inclusions in the Kirchhoff–Love plate*, J. Appl. Industr. Math., **8**:1 (2012), 97–105.

[13] N. Lazarev, *Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff-Love plate*, Bound Value Probl, (2015) doi: 10.1186/s13661-015-0437-y.

[14] I. V. Frankina, *A contact problem for an elastic plate with a thin rigid inclusion*, J. Appl. Industr. Math., **10**:3 (2016), 333–340.

[15] A. M. Khludnev, *On bending an elastic plate with a delaminated thin rigid inclusion*, J. Appl. Industr. Math., **5**:4 (2011), 582–594.

[16] N. P. Lazarev, T. S. Popova, *Variational Equilibrium Problem for a Plate with a Vertical Crack with a Geometrically Nonlinear Nonpenetration Condition*, J. Math. Sci. **188**:4 (2013), 398–409.

[17] N. P. Lazarev, V. V. Everstov, N. A. Romanova, *Fictitious domain method for equilibrium problems of the Kirchhoff–Love plates with nonpenetration conditions for known configurations of plate edges*, Journal of Siberian Federal University – Mathematics and Physics, **12**:6 (2019), 674–686.

[18] N. A. Nikolaeva, *Method of fictitious areas in a task about balance of a plate of Kirchhoff–Lyava*, J. Math. Sci. **221**:6 (2017), 872–882.

[19] E. V. Pyatkina, *A problem of glueing of two Kirchho–Love plate*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **16** (2019), 1351–1374.

[20] A. I. Furtsev, E. M. Rudoy, *Variational approach to modelling soft and sti interfaces in the Kirchho–Love theory of plates*, I. J. Sol. Str., **202** (2020), 562–572.

[21] V. A. Kovtunenko, G. Leugering, *A shape-topological control problem for nonlinear crack - defect interaction: the anti-plane variational model*, SIAM J.Control Optim., **54** (2016), 1329–1351.

Nikolaeva Natalia Afanasevna
North-Eastern Federal University,
ul. Kulakovskogo, 48,
677000, Yakutsk, Russia
E-mail address: niknataf@mail.ru