S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.716

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 08A99

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРВАЛАХ В РЕШЕТКЕ УЛЬТРАКЛОНОВ РАНГА 2

С.А. БАДМАЕВ, А.Е. ДУГАРОВ, И.В. ФОМИНА, И.К. ШАРАНХАЕВ

Abstract. In article the intervals in the lattice of ultraclones of rank 2 are considered. The well-known classes of all monotone M, all self-dual S and all linear L Boolean functions are ultraclones of rank 2. We proved that each of the intervals $\Im(M, H_2)$, $\Im(S, H_2)$, $\Im(L, H_2)$, where H_2 is complete ultraclone of rank 2, contains exactly 4 elements.

Keywords: hyperfunction, Boolean function, monotone function, self-dual function, linear function, superposition, closed set, clone, ultraclone, lattice, interval of lattice.

1. Введение

В теории функций k-значной логики одно из основных направлений исследований связано с подмножествами функций, замкнутыми относительно суперпозиции. Традиционной задачей здесь является описание решетки замкнутых классов или клонов функций. Первые результаты в этом направлении были получены американским математиком Э. Постом [1], который полностью описал решетку замкнутых классов булевых функций. Результаты, полученные в двузначной логике, способствовали дальнейшему развитию исследований теории функций k-значной логики. При этом выделяются два направления: первое связано с увеличением мощности основного множества, второе – с рассмотрением функций, которые определены не на всех наборах. Не всюду определенные функции удобно рассматривать как отображения из декартовой степени

Badmaev, S.A., Dugarov, A.E., Fomina, I.V., Sharankhaev, I.K. On some intervals in the lattice of ultraclones of rank 2.

Работа поддержана грантом Бурятского государственного университета им. Доржи Банзарова.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

k-элементного множества A во множество всех его подмножеств, причем одноэлементные подмножества отождествляются с элементами A, а остальные подмножества понимаются как неопределенности. Очевидно, что суперпозиция в обычном смысле для работы с этими функциями не подходит. Существует несколько способов расширения суперпозиции, каждый из которых позволяет находить значения суперпозиции на наборах с неопределенностями. В зависимости от вида и числа неопределенностей, а также измененной суперпозиции их называют частичными, недоопределенными, доопределяемыми, гиперфункциями, мультифункциями. Такие функции возникают при изучении многозначных логик, решении функциональных уравнений, моделировании схем с неисправностями. Естественно, что и для них также ставится задача описания решетки замкнутых классов. В связи с тем, что полное решение этой задачи вызывает определенные трудности, исследуются отдельные фрагменты решетки, различные интервалы. Отметим, что некоторые интервалы в решетке ультраклонов ранга 2 описаны в работах [2, 3].

2. Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0, 1\}$ и $F = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$O_{2,n} = \{f | f : E^n \to E\}$, $O_2 = \bigcup\limits_n O_{2,n}$;

$H_{2,n} = \{f | f : E^n \to F\}$, $H_2 = \bigcup\limits_n H_{2,n}$.

Функции из O_2 называют булевыми функциями, а из H_2 – гиперфункциями на E. Очевидно, что $O_2 \subset H_2$.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)),$$

где $f, f_1, \ldots, f_n \in H_2$, определяла гиперфункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ определим значения гиперфункции f на наборах из множества F следующим образом: если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее гиперфункцию будем называть просто функцией, если это не вызывает недоразумений.

Для любого натурального n и любого i, где $1 \leq i \leq n$, обозначим через $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ функцию, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. Функции e_i^n называются проекциями или селекторными функциями.

Замыканием множества функций K называется множество всех функций, полученных с помощью суперпозиции из функций множества K. Замыкание множества K обозначается через $[K]$. Множество функций K называется замкнутым (замкнутым классом), если $K = [K]$.

Ультраклоном ранга 2 (клоном) называется замкнутое множество функций (булевых функций), содержащее все проекции. Множество всех функций H_2

называется полным ультраклоном ранга 2. Далее для краткости любой ультраклон ранга 2 будем называть просто ультраклоном. Заметим, что любой клон является ультраклоном.

Ультраклон K называется максимальным, если не существует ультраклона K_1 такого, что $K \subset K_1 \subset H_2$.

Интервалом $\Im(Q, R)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех ультраклонов, в котором любой элемент K удовлетворяет условиям $Q \subseteq K$ и $K \subseteq R$. Интервалы для наглядности изображаются в виде диаграмм, где ультраклоны обозначены точками, а точка, представляющая Q_1, расположена выше и соединена отрезком с точкой, представляющей R_1, если $R_1 \subset Q_1$ и не существует ультраклона P такого, что $R_1 \subset P \subset Q_1$.

Через M обозначим клон всех булевых монотонных функций, S – клон всех булевых самодвойственных функций, L – клон всех булевых линейных функций.

Пусть R^s – s-местный предикат, заданный на множестве F. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на множестве F, сохраняет предикат R^s, если для любых наборов

$$(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{s1}), \ldots, (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{sn}),$$

принадлежащих предикату R^s, набор

$$(f(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, f(\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn}))$$

принадлежит R^s.

Для набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ набор $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \{0,1\}^n$, где $\beta_i \leq \alpha_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, называется уточнением.

Для упрощения записи используется кодировка: $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow -$, тогда $F = \{0, 1, -\}$.

Константную функцию, принимающую на всех наборах значение $-$, обозначим через f^-, а через d_3 – трехместную функцию с вектором значений (00010111).

В [4] доказано, что максимальными ультраклонами ранга 2 являются только следующие 11 множеств:

1) O_2 – множество всех булевых функций;

2) T_0^- – множество функций, которые сохраняют нуль, т. е. на наборе из всех нулей функции принимают значение 0;

3) T_1^- – множество функций, которые сохраняют единицу, т. е. на наборе из всех единиц функции принимают значение 1;

4) S^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix};$$

5) L^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix};$$

6) M^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix};$$

7) K_1 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 1 & - & - \end{pmatrix};$$

8) K_2 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

9) K_3 – множество функций, сохраняющих предикат R_3, определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 1 & - & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & - & 1 & 1 & 0 & - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \end{pmatrix};$$

10) K_4 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 0 & - & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

11) K_5 – множество, состоящее из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, а также из функций, принимающих два значения, одно из которых есть $-$.

3. Основные результаты

Лемма 1. *Из 11 максимальных ультраклонов ранга 2 только* O_2 *и* M^- *содержат* M.

Доказательство. Методом от противного покажем, что $M \subset M^-$. Пусть найдутся функция $f(x_1, \dots, x_n)$ и наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такие, что $f \in M$, $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}\right\}$ и $\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix} \in R_M$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Если $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}\right\}$, то для набора $\tilde{\beta}$ возьмем уточнение $\tilde{\tau}$, которое обязательно найдется, поскольку $f \in O_2$ и $f(\tilde{\beta}) \in \{0, -\}$, такое, что $f(\tilde{\tau}) = 0$, а для набора $\tilde{\alpha}$ выберем уточнение $\tilde{\delta}$ так, чтобы $\begin{pmatrix}\delta_i\\ \tau_i\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Нетрудно заметить, что булева функция f на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}$ принимает значение 1. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in M$. Если $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}$, то для набора $\tilde{\alpha}$ выберем уточнение $\tilde{\delta}$ такое, что $f(\tilde{\delta}) = 1$, а для набора $\tilde{\beta}$ возьмем уточнение $\tilde{\tau}$ так, чтобы $\begin{pmatrix}\delta_i\\ \tau_i\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in M$.

Очевидно, что $M \subset O_2$. Далее справедливость леммы следует из того, что константа 1 не принадлежит T_0^-, константа 0 не принадлежит T_1^-, конъюнкция не принадлежит S^-, L^-, K_1, K_3, K_5, дизъюнкция не принадлежит K_2, K_4. $\square$

Следствие 1. *Верно, что* $O_2 \cap M^- = M$.

Доказательство. Заметим, что M в точности совпадает с множеством булевых функций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (см., например, [5]). Тогда, очевидно, что для любой $f \in M^-$ и любых двоичных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}) \in \{0, 1\}$ выполняется $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$. Отсюда следует, что $O_2 \cap M^- \subseteq M$. В обратную сторону включение верно в силу леммы 1. $\square$

Лемма 2. *Для любой* $f \in M^- \setminus M$ *справедливо* $M^- = [M \cup \{f\}]$.

Доказательство. Включение $[M \cup \{f\}] \subseteq M^-$ очевидно. Покажем, что любая гиперфункция $g(x_1, \ldots, x_n) \in M^-$ может быть выражена с помощью суперпозиции монотонных булевых функций и $f \in M^- \setminus M$. В силу следствия 1 достаточно рассмотреть случай, когда $g(x_1, \ldots, x_n) \in M^- \setminus M$.

Обозначим через $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_s$ наборы, на которых значение гиперфункции g равно 0, через $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_l$ – наборы, на которых значение гиперфункции равно 1, а через $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_t$ – наборы, на которых значение гиперфункции равно $-$. Заметим, что для любых наборов $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$, $\tilde{\gamma}_k$, где $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, $k \in \{1, \ldots, t\}$, либо $\tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_j$, $\tilde{\gamma}_k \leq \tilde{\beta}_j$, либо эти наборы не находятся в отношении предшествования. Иначе получим, что $g\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_j \\ \tilde{\alpha}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $g\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_j \\ \tilde{\gamma}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}$, что противоречит $g \in M^-$.

С помощью гиперфункции f и констант 0, 1 получим константную гиперфункцию f^-. Далее выберем монотонную функцию $\phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ такую, что $\phi(\tilde{\alpha}_i, 0) = 0$, $\phi(\tilde{\beta}_j, 0) = 1$, $\phi(\tilde{\gamma}_k, 0) = 0$, $\phi(\tilde{\alpha}_i, 1) = 0$, $\phi(\tilde{\beta}_j, 1) = 1$, $\phi(\tilde{\gamma}_k, 1) = 1$, где $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, $k \in \{1, \ldots, t\}$.

Покажем, что $\phi(x_1, \ldots, x_m, f^-(x_m)) = g(x_1, \ldots, x_m)$. Действительно,

$$\phi(\tilde{\alpha}_i, -) = \phi(\tilde{\alpha}_i, 0) \cap \phi(\tilde{\alpha}_i, 1) = 0 = g(\tilde{\alpha}_i),$$

$$\phi(\tilde{\beta}_j, -) = \phi(\tilde{\beta}_j, 0) \cap \phi(\tilde{\beta}_j, 1) = 1 = g(\tilde{\beta}_j),$$

$$\phi(\tilde{\gamma}_k, -) = \phi(\tilde{\gamma}_k, 0) \cup \phi(\tilde{\gamma}_k, 1) = - = g(\tilde{\gamma}_k),$$

где $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, $k \in \{1, \ldots, t\}$.

Следовательно, $M^- \subseteq [M \cup \{f\}]$. $\square$

Следствие 2. *Верно, что* $M^- = [\{0, 1, \vee, \wedge, f^-\}]$.

Доказательство. Следует из $M = [\{0, 1, \vee, \wedge\}]$ (см., например, [5]). $\square$

Лемма 3. *Из 11 максимальных ультраклонов ранга 2 только* O_2 *и* S^- *содержат* S.

Доказательство. Методом от противного покажем, что $S \subset S^-$. Пусть найдутся функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такие, что $f \in S$, $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \bar{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix} \right\}$ и $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \bar{\alpha}_i \end{pmatrix} \in R_M$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Если $f\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \bar{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$, где $c \in \{0, 1\}$, то для набора $\tilde{\alpha}$ возьмем уточнение $\tilde{\delta}$, такое, что $f(\tilde{\delta}) = c$, а для набора $\bar{\tilde{\alpha}}$ выберем уточнение $\tilde{\tau}$ так, чтобы $\begin{pmatrix} \delta_i \\ \tau_i \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Нетрудно заметить, что булева функция f на любом уточнении набора $\bar{\tilde{\alpha}}$ принимает значение c. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ c\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in M$. Если $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ c\end{pmatrix}$, где $c \in \{0,1\}$, то для набора $\tilde{\alpha}$ возьмем уточнение $\tilde{\delta}$, которое обязательно найдется, поскольку $f \in O_2$ и $f(\tilde{\beta}) = -$, такое, что $f(\tilde{\delta}) = c$, а для набора $\bar{\tilde{\alpha}}$ выберем уточнение $\tilde{\tau}$ так, чтобы $\begin{pmatrix}\delta_i\\ \tau_i\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Нетрудно заметить, что булева функция f на любом уточнении набора $\bar{\tilde{\alpha}}$ принимает значение c. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ c\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in M$. Случай $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ -\end{pmatrix}$, где $c \in \{0,1\}$, аналогичен предыдущему.

Очевидно, что $S \subset O_2$. Далее справедливость леммы следует из того, что T_0^-, T_1^-, M^-, K_1, K_2, K_3, K_4 не содержат отрицание, классы L^-, K_5 – функцию d_3. □

Следствие 3. *Верно, что* $O_2 \cap S^- = S$.

Доказательство. Заметим, что класс S в точности совпадает с множеством булевых функций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (см., например, [5]). Тогда, очевидно, что для любой $f \in S^-$ и любого двоичного набора $\tilde{\alpha}$ такого, что $f(\tilde{\alpha}) \in \{0,1\}$ выполняется $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$. Отсюда следует, что $O_2 \cap S^- \subseteq S$. В обратную сторону включение верно в силу леммы 3. □

Лемма 4. *Для любой* $f \in S^- \setminus S$ *справедливо* $S^- = [S \cup \{f\}]$.

Доказательство. Включение $[S \cup \{f\}] \subseteq S^-$ очевидно. Покажем, что любая гиперфункция $g(x_1,\ldots,x_n) \in S^-$ может быть выражена с помощью суперпозиции самодвойственных булевых функций и гиперфункции $f \in S^- \setminus S$. В силу следствия 3 достаточно рассмотреть случай, когда $g(x_1,\ldots,x_n) \in S^- \setminus S$.

Обозначим через $\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_s$ наборы, на которых значение гиперфункции g равно 0, через $\tilde{\beta}_1,\ldots,\tilde{\beta}_l$ – наборы, на которых значение гиперфункции g равно 1, а через $\tilde{\gamma}_1,\ldots,\tilde{\gamma}_t$ – наборы, на которых значение гиперфункции g равно $-$. Тогда значение гиперфункции g на наборах $\bar{\tilde{\alpha}}_1,\ldots,\bar{\tilde{\alpha}}_s$ равно 1, на наборах $\bar{\tilde{\beta}}_1,\ldots,\bar{\tilde{\beta}}_l$ равно 0, на наборах $\bar{\tilde{\gamma}}_1,\ldots,\bar{\tilde{\gamma}}_t$ равно $-$.

С помощью гиперфункции f и отрицания получим константную гиперфункцию f^-. Далее выберем самодвойственную функцию $\phi(x_1,\ldots,x_m,y)$ такую, что $\phi(\tilde{\alpha}_i,0) = 0$, $\phi(\tilde{\beta}_j,0) = 1$, $\phi(\tilde{\gamma}_k,0) = 0$, $\phi(\bar{\tilde{\alpha}}_i,0) = 1$, $\phi(\bar{\tilde{\beta}}_j,0) = 0$, $\phi(\bar{\tilde{\gamma}}_k,0) = 0$, $\phi(\tilde{\alpha}_i,1) = 0$, $\phi(\tilde{\beta}_j,1) = 1$, $\phi(\tilde{\gamma}_k,1) = 1$, $\phi(\bar{\tilde{\alpha}}_i,1) = 1$, $\phi(\bar{\tilde{\beta}}_j,1) = 0$, $\phi(\bar{\tilde{\gamma}}_k,1) = 1$, где $i \in \{1,\ldots,s\}$, $j \in \{1,\ldots,l\}$, $k \in \{1,\ldots,t\}$.

Покажем, что $\phi(x_1,\ldots,x_m,f^-(x_m)) = g(x_1,\ldots,x_m)$. Действительно,

$\phi(\tilde{\alpha}_i,-) = \phi(\tilde{\alpha}_i,0) \cap \phi(\tilde{\alpha}_i,1) = 0 = g(\tilde{\alpha}_i)$,
$\phi(\tilde{\beta}_j,-) = \phi(\tilde{\beta}_j,0) \cap \phi(\tilde{\beta}_j,1) = 1 = g(\tilde{\beta}_j)$,
$\phi(\tilde{\gamma}_k,-) = \phi(\tilde{\gamma}_k,0) \cup \phi(\tilde{\gamma}_k,1) = - = g(\tilde{\gamma}_k)$,
$\phi(\bar{\tilde{\alpha}}_i,-) = \phi(\bar{\tilde{\alpha}}_i,0) \cap \phi(\bar{\tilde{\alpha}}_i,1) = 1 = g(\bar{\tilde{\alpha}}_i)$,
$\phi(\bar{\tilde{\beta}}_j,-) = \phi(\bar{\tilde{\beta}}_j,0) \cap \phi(\bar{\tilde{\beta}}_j,1) = 0 = g(\bar{\tilde{\beta}}_j)$,
$\phi(\bar{\tilde{\gamma}}_k,-) = \phi(\bar{\tilde{\gamma}}_k,0) \cup \phi(\bar{\tilde{\gamma}}_k,1) = - = g(\bar{\tilde{\gamma}}_k)$,

где $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$, $k \in \{1, \ldots, t\}$.
Следовательно, $S^- \subseteq [S \cup \{f\}]$. □

Следствие 4. *Верно, что* $S^- = [\{d_3, \bar{x}, f^-\}]$.

Доказательство. Следует из $S = [\{d_3, \bar{x}\}]$ (см., например, [5]). □

Лемма 5. *Из 11 максимальных ультраклонов ранга 2 только* O_2 *и* L^- *содержат* L.

Доказательство. Заметим, что L в точности совпадает с множеством булевых функций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$ (см., например, [5]). Методом от противного покажем, что $L \subset L^-$. Пусть найдутся функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $f \in L$, $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\ -\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -\end{pmatrix}\right\}$ и $\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix} \in R_M$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Если $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ c\end{pmatrix}$, где $c \in \{0, 1\}$, то для набора $\tilde{\alpha}$ возьмем уточнения $\tilde{\delta}^1$ и $\tilde{\delta}^2$, которые обязательно найдутся, поскольку $f \in O_2$ и $f(\tilde{\beta}) = -$, такие, что $f(\tilde{\delta}^1) = \bar{c}$, $f(\tilde{\delta}^2) = c$, а для набора $\tilde{\beta}$ выберем уточнения $\tilde{\tau}^1$ и $\tilde{\tau}^2$ так, чтобы $\begin{pmatrix}\delta_i^1\\ \delta_i^2\\ \tau_i^1\\ \tau_i^2\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Нетрудно заметить, что булева функция f на любом уточнении набора $\tilde{\beta}$ принимает значение c. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\delta}^1\\ \tilde{\delta}^2\\ \tilde{\tau}^1\\ \tilde{\tau}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{c}\\ c\\ c\\ c\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in L$.

Случай $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ -\end{pmatrix}$, где $c \in \{0, 1\}$, аналогичен предыдущему.

Очевидно, что $L \subset O_2$. Далее справедливость леммы следует из того, что S^- не содержит константу 0, T_0^-, T_1^-, M^-, K_1, K_2, K_3, K_4 – отрицание, K_5 – эквивалентность. □

Лемма 6. *Верно, что* $O_2 \cap L^- = L$.

Доказательство. Включение $L \subseteq O_2 \cap L^-$ верно в силу леммы 5. Докажем включение $O_2 \cap L^- \subseteq L$. От противного. Пусть найдется булева функция $f \in L^-$ такая, что $f \notin L$, т. е. $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\\ \tilde{\alpha}^4\end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix}\alpha_i^1\\ \alpha_i^2\\ \alpha_i^3\\ \alpha_i^4\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Тогда суперпозицией f с проекциями, константами 0, 1, отрицанием, сложением, эквивалентностью, которые по лемме 5 лежат в L^-, получим одну из функций (0001), (0010), (0100), (1000), (0111), (1011), (1101), (1110), причем, перестановкой переменных в f мы можем получить именно конъюнкцию или дизъюнкцию. Из конъюнкции и дизъюнкции с помощью $f^- \in L^-$ легко получить функции, не принадлежащие L^-: $e_1^2 \wedge f^- = (00--)$, $e_1^2 \vee f^- = (--11)$. Последнее противоречит тому, что L^- является замкнутым множеством. $\square$

Лемма 7. *Верно, что* $L^- \setminus L = \{f^-\}$.

Доказательство. С учетом леммы 6 достаточно рассмотреть случай, когда для $f \in L^- \setminus L$ также выполняется $f \in H_2 \setminus O_2$. Предположим, что f отлична от f^-, т. е. существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = c \in \{0, 1\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ -\end{pmatrix} \notin R_L$ и $\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, где $\tilde{\beta}$ – набор, на котором значение функции f равно $-$. Противоречие. $\square$

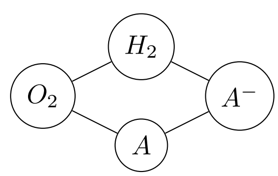
Следствие 5. *Верно, что* $L^- = [\{1, \oplus, f^-\}]$.

Доказательство. Следует из $L = [\{1, \oplus\}]$ (см., например, [5]). $\square$

Теорема 1. *Интервал* $\Im(A, H_2)$ *содержит ровно* 4 *ультраклона, где*

$$A \in \{M, S, L\},$$

а именно,



Доказательство. 1) Если $A = M$, то справедливость утверждения следует из лемм 1, 2 и из того, что M является максимальным клоном в O_2, а O_2 и M^- являются максимальными ультраклонами ранга 2.

2) Если $A = S$, то справедливость утверждения следует из лемм 3, 4 и из того, что S является максимальным клоном в O_2, а O_2 и S^- являются максимальными ультраклонами ранга 2.

3) Если $A = L$, то справедливость утверждения следует из лемм 5, 7 и из того, что L является максимальным клоном в O_2, а O_2 и L^- являются максимальными ультраклонами ранга 2. $\square$

References

[1] E.L. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Proposition*, Amer. J. Math., **43**:4 (1921),163–185.

[2] S.Yu. Haltanova, V.I. Panteleyev, *About some intervals in the lattic of clones of partial ultrafunctions*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **4** (2010), 80–87.

[3] S.Yu. Haltanova, *On Two Isomorphic Intervals in the Lattice of Ultraclones on Two-Elements Set*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **7** (2014), 133–140.

[4] V.I. Panteleyev, *Completeness Criterion for Predefined Boolean Functions (in Russian)*, Vestnik Samar. Gos. Univ. Est.-Naush. Ser., **2**:68 (2009), 60–79.
[5] S.S. Marchenkov, *Closed Classes of Boolean Functions*, M: Fizmatlit, 2000, 128 p.

Sergei Alexandrovich Badmaev, Alexandr Evgenevich Dugarov, Irina Vladimirovna Fomina, Ivan Konstantinovich Sharankhaev
Dorzhi Banzarov Buryat State University,
24a, Smolina str.,
670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail address: badmaevsa@mail.ru, dugarov_aleksandr@mail.ru, fomina-irina0104@yandex.ru, goran5@mail.ru