S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 845–866 (2021) УДК 517.51, 517.54
DOI 10.33048/semi.2021.18.064 MSC 30C65, 46E35

О СВОЙСТВАХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ p-ЕМКОСТИ В R^2

А.С. РОМАНОВ

Abstract. We consider various properties of extremal functions for p-capacity in domains of the Euclidean space R^2.

Keywords: Sobolev spaces, capacity, extremal functions.

В настоящее время нелинейная ёмкость является активно используемым инструментом изучения различных свойств соболевских функций и различных классов отображений. В работе исследуются некоторые специальные вопросы, касающиеся p-ёмкости, связанной с пространствами Соболева $L^1_p(G), G \subset R^2$. Рассмотрение двумерной ситуации и пространств Соболева с первыми производными связано с тем, что не все результаты, обсуждаемые в данной работе, допускают обобщение на случай пространств Соболева $L^k_p(R^n)$ при $n > 2$ и $k > 1$.

Исторически наиболее развитой является теория конформной ёмкости (2-ёмкости) активно используемой при изучении квазиконформных отображений. С одной стороны, при $p \neq 2$ многие свойства p-ёмкости вполне аналогичны свойствам конформной ёмкости, с другой стороны, некоторые свойства при $p < 2, p = 2$ и $p > 2$ оказываются существенно различными. К сожалению, некоторые давно известные факты теории ёмкости относятся скорее к математическому фольклору и порой сложно найти адекватную ссылку - проще привести простое доказательство. Поэтому вначале работы, не вдаваясь в детали и не претендуя на авторство, мы пытаемся последовательно изложить базовые понятия теории ёмкости, связанной с пространствами Соболева. Этим

Romanov, A.S., Properties of extremal functions for p-capacity in R^2 .

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0007).

Поступила 30 мая 2021 г., опубликована 3 августа 2021.

же объясняется наличие в тексте кратких доказательств некотрых известных результатов.

Как правило, экстремальные функции, являющиеся решением вариационных задач, обладают дополнительными свойствами по сравнению с общими требованиями к классу допустимых функций. В первую очередь нас будут интересовать свойства экстремальных функций для вариационной p-ёмкости пары континуумов, принадлежащих замыканию области $G \subset R^2$.

1. О понятии ёмкости, связанной с пространствами Соболева

Для обозначения точек плоскости R^2 мы иногда будем использовать сокращенное обозначение одним символом $z, w, a, b \dots$, полагая $z = (x, y), w = (\cdot, \cdot), a = (a_1, a_2)$ и т.д. Символом H^α будем обозначать α-меру Хаусдорфа, символом m_2 меру Лебега в R^2. Иногда в интегралах нам будет удобнеее вместо dm_2 писать $dxdy$.

В работе используются стандартные определения и обозначения пространств Соболева $W_p^1(G)$ с нормой

$$\|u\big|W_p^1(G)\| = \left(\int\limits_G (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dxdy\right)^{1/p}$$

и пространств Соболева $L_p^1(G)$ с полунормой

$$\|u\big|L_p^1(G)\| = \left(\int\limits_G |\nabla u|^p dxdy\right)^{1/p}.$$

Символом $\mathcal{L}_p^\alpha(R^2)$ обозначим пространство потенциалов Бесселя – функций, представимых в виде $u = G_\alpha * h$, где G_α – ядро Бесселя порядка α, а функция $h \in L_p(R^2)$. Норма в пространстве $\mathcal{L}_p^\alpha(R^2)$ определяется равенством

$$\|u\big|\mathcal{L}_p^\alpha(R^2)\| = \|h\big|L_p(R^2)\|.$$

С пространствами Соболева связаны различные типы ёмкости. Нас в первую очередь будет интересовать так называемая "вариационная емкость", обычно рассматриваемая в областях $G \subset R^2$, но начинать удобнее с $(1,p)$-ёмкости, связанной с пространствами Соболева $W_p^1(R^2)$. Основы теории ёмкости можно найти, к примеру, в работах [1, 2, 3, 4, 5].

Понятие $(1,p)$-ёмкости в R^2 можно определить разными эквивалентными способами. Проще всего воспользоваться совпадением при $1 < p < \infty$ пространств Соболева $W_p^1(R^2)$ и пространств потенциалов Бесселя $\mathcal{L}_p^1(R^2)$. Эти функциональные пространства совпадают как множества функций: если функция $u \in \mathcal{L}_p^1(R^2)$, то $u \in W_p^1(R^2)$; если функция $v \in W_p^1(R^2)$, то существует такая функция $v^* \in \mathcal{L}_p^1(R^2)$, что $v^* = v$ почти всюдую. При этом нормы этих пространств эквивалентны [1, 6]. Не вдаваясь в детали, напомним необходимую нам информацию, касающуюся $(1,p)$-ёмкости.

Для множества $E \subset R^2$ класс допустимых функций определим условием

$$\tilde{D}(E) = \{u \in \mathcal{L}_p^1(R^2)\big|u = G_1 * h,\ h \geq 0,\ u(z) \geq 1 \text{ при } z \in E\},$$

а ёмкость множества E равенством

$$\tilde{C}_{(1,p)}(E) = \inf_{u\in\tilde{D}(E)} \|u\big|\mathcal{L}^1_p(R^2)\|^p.$$

Если для множества E допустимых функций не существует, то будем считать, что $\tilde{C}_{(1,p)}(E) = \infty$.

Для функции множеств $\tilde{C}_{(1,p)}(E)$ выполняются следующие условия [1, 2]:

1. Если $E \subset E_1$, то $\tilde{C}_{(1,p)}(E) \leq \tilde{C}_{(1,p)}(E_1)$.

2. Для всякой возрастающей последовательности множеств E_n, n=1,2, ...

$$\tilde{C}_{(1,p)}\left(\bigcup_n E_n\right) = \sup_n \tilde{C}_{(1,p)}(E_n).$$

3. Для всякой убывающей последовательности компактных множеств K_n, n=1,2, ...

$$\tilde{C}_{(1,p)}\left(\bigcap_n K_n\right) = \inf_n \tilde{C}_{(1,p)}(K_n).$$

Таким образом $(1,p)$-ёмкость является частным случаем обобщенной ёмкости [7]. Следовательно, всякое аналитическое множество $E \subset R^2$ измеримо относительно $(1,p)$-ёмкости, т.е.

$$\tilde{C}_{(1,p)}(E) = \sup_{K\subset E} \tilde{C}_{(1,p)}(K),$$

где K – компактное множество. Класс аналитических множеств является довольно широким, в частности, он содержит все борелевские множества.

Для $(1,p)$-ёмкости выполняется свойство счётной полуаддитивности:

$$\text{если} \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ \text{ то } \ \tilde{C}_{(1,p)}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_{(1,p)}(A_n).$$

Замечание. Хотя $(1,p)$-ёмкость и является внешней мерой, следует отметить, что понятие измеримости множества относительно обобщенной ёмкости отличается от понятия измеримости, используемого в теории меры.

При изучении различных свойств функций и отображений особую роль играют множества нулевой $(1,p)$-ёмкости. Достаточно точную метрическую характеристику таких множеств можно получить в терминах меры Хаусдорфа [1, 2, 5]:

i) если $1 < p < 2$ и $H^{2-p}(E) = 0$, то $\tilde{C}_{(1,p)}(E) = 0$;

ii) если $\tilde{C}_{(1,p)}(E) = 0$, то $H^{\alpha}(E) = 0$ при $\alpha > 2 - p$.

Следовательно при всех $1 < p < \infty$ множество нулевой $(1,p)$-ёмкости имеет нулевую линейную меру Хаусдорфа, при этом $(1,p)$-ёмкость произвольного континуума положительна. Отметим, что $(1,p)$-ёмкость точки равна нулю при $p \leq 2$ и положительна при $p > 2$.

Далее термин $(1,p)$- *квазивсюду* означает: всюду, за исключением быть может множества нулевой $(1,p)$-ёмкости. Функцию u называют $(1,p)$-квазинепрерывной, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество V, что $\tilde{C}_{(1,p)}(V) < \varepsilon$ и на дополнении к множеству V функция u непрерывна. Всякая квазинепрерывная функция однозначно определена квазивсюду. При $p > 2$ понятия непрерывности и $(1,p)$-квазинепрерывности совпадают, поскольку всякое непустое множество имеет положительную $(1,p)$-ёмкость.

При $p > 2$ функции из пространств $\mathcal{L}_p^1(R^2)$ непрерывны, а при $p \le 2$ являются $(1,p)$-квазинепрерывными.

В определении класса допустимых функций $\tilde{D}(E)$ условие «$u(z) \ge 1$ при $z \in E$» можно заменить на «$u(z) \ge 1$ $(1,p)$-квазивсюду на E».

Эквивалентную $(1,p)$-ёмкости функцию множеств можно определить, используя пространства Соболева вместо пространств потенциалов Бесселя.

Для произвольного компакта $K \subset R^2$ рассмотрим множество допустимых функций

$$D^*(K) = \{u \in C_0^\infty(R^2) \mid u|_K \ge 1\},$$

и при $1 \le p < \infty$ соответствующую $(1,p)$-ёмкость определим равенством

$$C_p(K) = \inf_{u \in D^*(K)} \|u|W_p^1(R^2)\|^p.$$

Определенная изначально для компактных множеств, C_p-ёмкость стандартным образом распространяется на более широкий класс множеств, содержащий σ-алгебру борелевских множеств.

В силу эквивалентности норм пространств $W_p^1(R^2)$ и $\mathcal{L}_p^1(R^2)$, для всякого $(1,p)$-измеримого множества $E \subset R^2$ выполняется двухсторонняя оценка

$$\lambda^{-1}\,\tilde{C}_{(1,p)}(E) \le C_p(E) \le \lambda\,\tilde{C}_{(1,p)}(E),$$

где $0 < \lambda < \infty$. В частности, классы множеств ёмкости нуль для этих типов ёмкостей совпадают.

Известно, что для вычисления ёмкости можно использовать различные множества допустимых функций.

Можно обойтись без использования функций класса $C_0^\infty(R^2)$ и определить ёмкость, непосредственно используя функции и норму пространства Соболева $W_p^1(R^2)$. На первый взгляд вполне естественным классом допустимых функций для множества $E \subset R^2$ представляется совокупность всех функций $u \in W_p^1(R^2)$, с условием $u \ge 1$ на множестве E. Однако при использовании такого определения возникает проблема, связанная с тем, что элементом пространства Соболева является класс эквивалентных функций, отличающихся между собой на множестве меры нуль. Таким образом соболевская функция, вообще говоря, изначально может быть произвольным образом определена на множестве нулевой меры. Поэтому для всякого множества E, имеющего нулевую меру Лебега, функция, равная единице на E и нулю в $R^2 \setminus E$, принадлежит пространству $W_p^1(R^2)$ и имеет норму равную нулю, следовательно и ёмкость множества E должна быть равной нулю. Однако это противоречит утверждению о хаусдорфовой размерности множеств нулевой $(1,p)$-ёмкости.

Решение этой проблемы заключается в том, что класс эквиалентности всякой соболевской функции содержит "уточненную" функцию, однозначно определенную всюду вне множества нулевой $(1,p)$-ёмкости.

Для всякой локально суммируемой функции u уточненная функция $\tilde{u}$ может быть определена как предел средних значений

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{m_2(B(x,r))} \displaystyle\int\limits_{B(x,r)} u\,dm_2, & \text{если предел существует,} \\ \text{не определена,} & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Уточненная функция $\tilde{u}$ совпадает с исходной функцией u почти всюду.

Если же функция u принадлежит пространству Соболева $W_p^1(R^2)$, то имеет место более сильный результат: уточненная функция $\tilde{u}$ однозначно определена квазивсюду и квазивсюду совпадает с эквивалентной u функцией $u^* \in \mathcal{L}_p^1(R^2)$ и, следовательно, является квазинепрерывной [5, 8].

Для функций из пространства Соболева выполняется ёмкостной аналог теоремы Егорова:

всякая последовательность непрерывных функций $u_n \in W_p^1(R^2)$, сходящаяся по норме, содержит подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, сходящуюся квазивсюду к квазинепрерывной функции, при этом для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество E, что $C_p(E) < \varepsilon$ и на множестве $R^2 \setminus E$ подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ сходится равномерно.

Замечание. Далее говоря о функции u из пространства Соболева, мы всегда будем предполагать, что имеем дело с уточненной функцией, которая определена квазивсюду и является квазинепрерывной.

С учётом замечания, для произвольного множества $E \subset R^2$ можно определить новый класс допустимых функций

$$D(E) = \{u \in W_p^1(R^2) \mid \ u \geq 1 \ (1,p)\text{-квазивсюду на } E\},$$

при этом

$$C_p(E) = \inf_{u \in D(E)} \|u | W_p^1(R^2)\|^p.$$

Как и раньше, при $D(E) = \emptyset$ полагаем $C_p(E) = \infty$.

Из понятий, связанных с $(1,p)$-ёмкостью, для нас основной интерес будут представлять множества $(1,p)$-ёмкости нуль, свойство $(1,p)$-квазинепрерывности и термин $(1,p)$-квазивсюду.

2. Вариационная ёмкость

Нас будут интересовать различные свойства функций из пространств Соболева, определенных в областях $G \subset R^n$. Локально функция из пространств Соболева $L_p^1(G)$ является сужением функции из пространства $W_p^1(R^2)$, поэтому использование в данном случае понятий уточненной функции, $(1,p)$-квазинепрерывной функции и термина $(1,p)$-квазивсюду корректно. Далее в случае, когда не будет возникать разночтения, мы иногда будем опускать $(1,p)$ и писать просто квазивсюду и квазинепрерывная функция.

Нам понадобится еще одна разновидность ёмкости, которую обычно называют вариационной p-ёмкостью. Систематическое изложение различных вопросов, касающихся вариационной ёмкости, можно найти в [2]. В этом разделе мы сформулируем необходимые нам результаты.

Рассмотрим область $G \subset R^2$ и два множества $K_0, K_1 \subset \overline{G}$.

Для пары множеств (K_0, K_1) класс допустимых функций $D(K_0, K_1, G)$ определим следующими условиями: $u \in L_p^1(G)$, $u \leq 0$ в некоторой окрестности множества K_0 и $u \geq 1$ в некоторой окрестности множества K_1. Имеются в виду окрестности в G, т.е. открытые в G множества, замыкания которых содержат множества K_i.

При $1 < p < \infty$ соответствующую p-ёмкость пары (K_0, K_1) определим равенством

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \inf_{u \in D(K_0, K_1, G)} \iint\limits_G |\nabla u|^p \, dx \, dy.$$

Если для пары множеств (K_0, K_1) допустимых функций не существует, то полагаем $\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \infty$.

Имеется довольно большая свобода в выборе класса допустимых функций для вычисления p-ёмкости. Следующие результаты доказаны в [2].

1. Если K_0, K_1 – компактные множества, то p-ёмкость пары (K_0, K_1) равна точной нижней границе значений величины $\|u|L^1_p(G)\|^p$ на множестве функций $u \in C^\infty_0(G) \cap L^1_p(G)$, таких, что $u \le 0$ в некоторой окрестности множества K_0 и $u \ge 1$ в некоторой окрестности множества K_1.

2. Если K_0, K_1 – компактные множества, то p-ёмкость пары (K_0, K_1) равна точной нижней границе значений величины $\|u|L^1_p(G)\|^p$ на множестве непрерывных функций класса $L^1_p(G)$, таких, что $u(x) \le 0$ при $x \in K_0$ и $u(x) \ge 1$ при $x \in K_1$.

Мы сохраним общее обозначение $D(K_0, K_1, G)$ для классов допустимых функций, при необходимости указывая какой класс используется в данной конкретной ситуации.

Для пространств Соболева с первыми обобщенными производными выполняется специфическое свойство:

$$\text{если } f, g \in L^1_p(G), \text{то} \quad \max(f, g) \in L^1_p(G), \ \min(f, g) \in L^1_p(G),$$

при этом

$$\|\max(f, g)|L^1_p(G)\| \le \|f|L^1_p(G)\| + \|g|L^1_p(G)\|,$$
$$\|\min(f, g)|L^1_p(G)\| \le \|f|L^1_p(G)\| + \|g|L^1_p(G)\|.$$

В частности, для всякой постоянной C

$$\|\max(f, C)|L^1_p(G)\| \le \|f|L^1_p(G)\|, \quad \|\min(f, C)|L^1_p(G)\| \le \|f|L^1_p(G)\|.$$

Таким образом, если функция u является допустимой для пары (K_0, K_1), то и функция

$$\tilde{u} = \min(1, \max(u, 0))$$

является допустимой. Поэтому изначально можно считать, что допустимая функция $0 \le u \le 1$, $u = 0$ в некоторой окрестности множества K_0 и $u = 1$ в некоторой окрестности множества K_1.

Если $K_0, K_1 \subset \overline{G}$ и $\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) < \infty$, то как доказано в [2], при $1 < p < \infty$ существует единственная (с точностью до эквивалентности) экстремальная функция $u_0 \in \overline{D(K_0, K_1, G)}$ такая, что

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \iint\limits_G |\nabla u_0|^p \, dxdy.$$

Поскольку класс эквивалентности произвольной функции из пространства Соболева L^1_p содержит квазинепрерывную функцию, то говоря об экстремальной функции, мы будем предполагать, что она является квазинепрерывной.

Следующий результат (предложение 1.1, глава 4 [2]) характеризует значения экстремальной функции на множествах K_i.

Пусть $K_0, K_1 \subset \overline{G}$ и $0 < \operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) < \infty$. Тогда для пары (K_0, K_1) существует квазинепрерывная экстремальная функция u_0, равная нулю $(1, p)$-квазивсюду на $K_0 \cap G$ и равная единице $(1, p)$-квазивсюду на $K_1 \cap G$, при этом $0 \le u_0 \le 1$ в G.

Это позволяет определить ещё один класс допустимых функций.

3. *Если множества $K_0, K_1 \subset G$, то p-ёмкость пары (K_0, K_1) равна точной нижней границе значений величины $\|u|L_p^1(G)\|^p$ на множестве квазинепрерывных функций и класса $L_p^1(G)$, таких, что и равна нулю $(1,p)$-квазивсюду на K_0 и равна единице $(1,p)$-квазивсюду на K_1.*

Найти точное значение p-ёмкости и явный вид экстремальной функции удается в исключительных случаях.

Пример 2.1.

1. Для концентрического кольца $K_{R,r}$, образованного окружностями радиусов r и $R(R > r)$, значение p-ёмкости давно известно (см., к примеру, [2, 3])

$$\mathrm{cap}_p(K_{R,r}) = \begin{cases} 2\pi|\lambda|^{p-1}|R^\lambda - r^\lambda|^{1-p}, & \text{если } p \neq 2, \\ 2\pi\left(\ln(R/r)\right)^{-1}, & \text{если } p = 2, \end{cases}$$

здесь $\lambda = \dfrac{p-2}{p-1}$.

Экстремальная функция в полярных координатах имеет вид

$$u(\rho) = \begin{cases} \dfrac{R^\lambda - \rho^\lambda}{R^\lambda - r^\lambda}, & \text{если } p \neq 2, \\ \\ \dfrac{\ln(\rho/R)}{\ln(r/R)}, & \text{если } p = 2, \end{cases}$$

Если рассмотреть не всё кольцо, а лишь усечённый сектор, определяемый в полярных координатах условием

$$S_{R,r,\omega} = \{z \in K_{R,r} \big| 0 < \varphi < \omega \leq 2\pi\},$$

и обозначить через F_r и F_R дуги соответствующих окружностей, то экстремальная функци не меняется, при этом $\mathrm{cap}_p(F_r, F_R, S_{R,r,\omega}) = \dfrac{\omega}{2\pi}\mathrm{cap}_p(K_{R,r})$.

Обозначим через E_0 и E_ω отрезки радиусов, принадлежащих границе сектора $S_{R,r,\omega}$ и соответствующих $\varphi = 0$ и $\varphi = \omega$. Найдём p-ёмкость пары (E_0, E_ω). Если u – гладкая допустимая функция, то используя неравенство Гёльдера и выражение градиента функции u в полярных координатах, при $r < \rho < R$ получаем

$$1 \leq \int\limits_0^\omega \left|\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|(\rho,\varphi)d\varphi \leq \omega^{1/p'}\left(\int\limits_0^\omega \rho^p|\nabla u|^p(\rho,\varphi)d\varphi\right)^{1/p},$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Следовательно при $p \neq 2$

$$\iint\limits_{S_{R,r,\omega}} |\nabla u|^p(\rho,\varphi)\rho\, d\rho d\varphi \geq \omega^{1-p}\int\limits_r^R \rho^{1-p}d\rho = \frac{1}{\omega^{p-1}|2-p|}\left|R^{2-p} - r^{2-p}\right|.$$

Легко вычислить норму функции $u_0(\rho,\varphi) = \varphi/\omega$

$$\iint\limits_{S_{R,r,\omega}} |\nabla u|^p(\rho,\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \omega^{-p}\iint\limits_{S_{R,r}} \rho^{1-p}d\rho d\varphi = \frac{1}{\omega^{p-1}|2-p|}\left|R^{2-p} - r^{2-p}\right|.$$

Таким образом функция u_0 является экстремальной и

$$\mathrm{cap}_p(E_0, E_\omega, S_{R,r,\omega}) = \frac{1}{\omega^{p-1}|2-p|}\left|R^{2-p} - r^{2-p}\right|.$$

2. Легко вычисляется p-ёмкость пары противоположных сторон прямоугольника. Пусть в прямоугольнике P длина оснований F_0, F_1 равна a, длина боковых сторон E_0, E_1 равна b. Оценка снизу нормы допустимой функции получается просто

$$a = \int_0^a 1dx \leq \int_0^a \left(\int_0^b \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| dy \right) dx \leq (ab)^{1/p'} \left(\iint_P |\nabla u|^p dxdy \right)^{1/p}.$$

Таким образом

$$\iint_P |\nabla u|^p dxdy \geq \frac{a}{b^{p-1}}.$$

Экстремальной в данном случае является линейная функция $u_0(x, y) = y/b$, норма которой равна a/b^{p-1}. Следовательно

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1, P) = \frac{a}{b^{p-1}}.$$

3. Ёмкость пары континуумов всегда больше нуля. Для пары континуумов (K_0, K_1), имеющих общую предельную точку на границе области G, p-ёмкость равна бесконечности при $p \geq 2$, а при $p \leq 2$ вопрос о конечности или бесконечности p-ёмкости зависит от взаимного расположения множеств и от показателя суммируемости p.

i) Если континуумы K_0 и K_1 имеют общую предельную точку $a \in \partial G$, то существует такое $r > 0$, что при всех $\rho \leq r$ окружность S_ρ с центром в точке a и радуса ρ пересекает оба континуума K_0 и K_1. Используя полярные координаты с полюсом в точке a и неравенство Гёльдера, для допустимой функции u получаем оценки

$$1 \leq \int_{S_\rho \cap G} \left| \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right| (\rho, \varphi) d\varphi \leq (2\pi)^{1/p'} \left(\int_{S_\rho \cap G} \rho^p |\nabla u|^p (\rho, \varphi) d\varphi \right)^{1/p}$$

и

$$\iint_G |\nabla u|^p (\rho, \varphi) \rho \, d\rho d\varphi \geq (2\pi)^{1-p} \int_0^r \rho^{1-p} d\rho.$$

Последний интеграл расходится при $p \geq 2$. В силу произвольности выбора допустимой функции p-ёмкость пары континуумов K_0 и K_1 при $p \geq 2$ равна бесконечности.

ii) Для пары континуумов (K_0, K_1), имеющих общую предельную точку на границе области, p-ёмкость может быть конечна при всех $1 < p < 2$.

К примеру, если рассмотреть сектор $S_{R,0,\omega}$ и соответствующие радиусы E_0, E_ω имеющие начало координат общей точкой, то при $1 < p < 2$ из примера 1 получим

$$\operatorname{cap}_p(E_0, E_\omega, S_{R,0,\omega}) = \frac{1}{\omega^{p-1}(2-p)} R^{2-p}.$$

iii) Рассмотрим криволинейный треугольник

$$T_\lambda = \{(x, y) \in R^2 \big| 0 < x < a, \ 0 < y < x^\lambda, \ \lambda > 1\}.$$

Обозначим через $F_{0,a}$ отрезок $[0,a]$, а через $F_{1,a}$ дугу кривой $y = x^\lambda, x \in [0,a]$. Если функция u является допустимой для пары $(F_{0,a}, F_{1,a})$, то

$$1 \leq \int\limits_0^{x^\lambda} \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| dydx \leq x^{\lambda/p'} \left(\int\limits_0^{x^\lambda} |\nabla u|^p dy\right)^{1/p}.$$

Следовательно

$$\iint\limits_{T_\lambda} |\nabla u|^p dxdy \geq \int\limits_0^a \frac{dx}{x^{\lambda(p-1)}}.$$

При $p \geq 1 + 1/\lambda$ последний интеграл расходится, поэтому p-ёмкость пары $(F_{0,a}, F_{1,a})$ не может быть конечной.

При $p < 1 + 1/\lambda$

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{x^{\lambda(p-1)}} = \frac{1}{1+\lambda(1-p)} a^{1+\lambda(1-p)}.$$

Функция $u(x,y) = y/x^\lambda$ является допустимой для пары $(F_{0,a}, F_{1,a})$, при этом $|\nabla u|(x,y) \leq (1+\lambda^2)^{1/2} x^{-\lambda}$ в области T_λ. Поэтому

$$\iint\limits_{T_\lambda} |\nabla u|^p dxdy \leq \frac{(1+\lambda^2)^{p/2}}{1+\lambda(1-p)} a^{1+\lambda(1-p)}.$$

Следовательно

$$\operatorname{cap}_p(F_{0,a}, F_{1,a}, T_\lambda) = O\left(a^{1+\lambda(1-p)}\right) \quad \text{при} \quad a \to 0.$$

При получении различных оценок оказывается полезной взаимосвязь между p-ёмкостью и p-модулями семейств кривых.

Напомним нужную нам информацию о p-модулях семейств кривых [9].

Пусть Γ - семейство локально спрямляемых кривых $\gamma \subset G$. Класс допустимых борелевских метрик определим условием

$$N(\Gamma) = \{\rho \in L_p(G) \mid \int\limits_\gamma \rho\, d\, l \geq 1 \text{ для всех } \gamma \in \Gamma\},$$

а p–модуль семейства Γ определим равенством

$$\operatorname{mod}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in N(\Gamma)} \iint\limits_G \rho^p\, d\, x\, d\, y.$$

При $1 < p < \infty$ существует единственная экстремальная метрика, для которой

$$\|\rho \mid L_p(G)\|^p = \operatorname{mod}_p(\Gamma).$$

Вполне очевидно свойство монотонности: если семейство кривых $\Gamma_1 \subset \Gamma$, то

$$\operatorname{mod}_p(\Gamma_1) \leq \operatorname{mod}_p(\Gamma).$$

В случае, когда Γ является семейством спрямляемых кривых в области G, соединяющих множества $K_0, K_1 \subset \overline{G}$, для p-модуля будем использовать обозначение $\operatorname{mod}_p(K_0, K_1, G)$. В работе [10] доказано, что

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \operatorname{mod}_p(K_0, K_1, G).$$

Если u - экстремальная функция для $\mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G)$, а ρ_0 - экстремальная метрика для $\mathrm{mod}_p(K_0, K_1, G)$, то $\rho_0 = |\nabla u|$.

Лемма 2.2. Пусть G - ограниченная область, множества $K_0, K_1 \subset \overline{G}$ и длина всякой кривой, соединяющей K_0 и K_1 не меньше чем $d > 0$, тогда

$$\mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G) \leq \frac{m_2(G)}{d^p}.$$

При учёте взаимосвязи p-ёмкости и p-модуля, оценка вполне очевидна, поскольку метрика $\rho = 1/d$ является допустимой для семейства кривых, соединяющих множества K_0 и K_1.

3. О свойствах экстремальных функций

Рассмотрим область $G \subset R^2$, непересекающиеся множества $K_0, K_1 \subset \overline{G}$ и пусть множества $K_0 \cap G$ и $K_1 \cap G$ являются замкнутыми относительно G, а множество $G^* = G \setminus (K_0 \cup K_1)$ является связным.

Если функция u является экстремальной для пары (K_0, K_1), а функция $\varphi \in C_0^\infty(G^*)$ и равна нулю на множестве $G \setminus G^*$, то функция $u + \varphi$ будет допустимой для пары (K_0, K_1) и

$$\iint\limits_G |\nabla u|^p dxdy \leq \iint\limits_G |\nabla(u+\varphi)|^p dxdy,$$

т.е. функция u является экстремалью p-интеграла Дирихле. Следовательно экстремальная функция u является p-гармонической в области G^*, т.е. является решением p-уравнения Лапласа, понимаемого в слабом смысле

$$\iint\limits_{G^*} |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx\, dy = 0$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G^*)$.

Свойства p-гармонических функций на плоскости изучались многими авторами. Согласно работе [11] при $1 < p < \infty$ p-гармоническая в области G функция u является гладкой в G,

$$u \in C^{k,\alpha}_{loc}(G) \cap W^{k+2}_{q,loc}(G),$$

где целое $k \geq 1$, показатель $\alpha \in (0, 1]$ и

$$k + \alpha \geq \frac{1}{6}\left(7 + \frac{1}{p-1} + \sqrt{1 + \frac{14}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}}\right), \quad 1 \leq q < \frac{2}{2-\alpha}.$$

Заметим, что при всех $1 < p < \infty$ экстремальная функция u принадлежит классу $C^{1,\alpha}_{loc}(G)$, где $\alpha > 1/3$, а при $1 < p < 2$ функция $u \in C^{2,\beta}_{loc}(G)$, где $\beta > 0$.

В работе [12] доказано, что множество критических точек отличной от постоянной p-гармонической функции

$$Z = \{(x, y) \in G \mid \ \nabla u(x, y) = 0\}$$

является дискретным, т.е. его точки являются изолированными в области G, при этом $u \in C^\infty(G \setminus Z)$.

Символом U_t будем обозначать множество уровня функции u, т.е.

$$U_t = \{(x, y) \in G \mid \ u(x, y) = t\}.$$

Если функция u является экстремальной для p-ёмкости пары (K_0, K_1), то множества уровней U_t при почти всех $t \in (0,1)$ не пересекают множество критических точек и являются объединением локально спрямляемых гладких кривых [13]. Экстремальная функция u непрерывна и принимает все промежуточные значения на всякой непрерывной кривой $\gamma \subset G$, соединяющей множества K_0 и K_1.

Рассмотрим область $G \subset R^2$, два непересекающихся замкнутых множества $K_0, K_1 \subset \overline{G}$, подобласть $D \subset G \setminus (K_0 \cup K_1)$ и множество $\Gamma = \partial D \cap G$. Символом $M(D)$ обозначим множество функций, принадлежащих пространству $L_p^1(D)$ и равных нулю в некоторой окрестности множества Γ, а символом $\overset{\circ}{L}{}^1_p(D)$ замыкание множества $M(D)$.

Лемма 3.1. *1. Экстремальная для p-ёмкости пары* (K_0, K_1) *функция* u *является локально экстремальной в том смысле, что для всякой подобласти* $D \subset G \setminus (K_0 \cup K_1)$ *и всякой отличной от постоянной функции* $h \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(D)$

$$\|u|L_p^1(D)\| < \|u + h|L_p^1(D)\|.$$

2. Рассмотрим подобласть $D \subset G$, *множество* $K \subset \overline{G}, K \cap \overline{D} = \emptyset$ *и пусть* $\gamma = \partial D \cap G$, *тогда*

$$\operatorname{cap}_p(K, \overline{D}, G) = \operatorname{cap}_p(K, \gamma, G).$$

Доказательство. 1. Предположим противное, т.е. пусть существует такая функция $h \neq const$, что

$$\|u + h|L_p^1(D)\| \leq \|u|L_p^1(D)\|.$$

Рассмотрим последовательность функций $\{h_n \in M(D)\}$, сходящуюся к функции h в $L_p^1(D)$. Всякую функцию h_n можно продолжить нулем до функции $\tilde{h}_n \in L_p^1(G)$. Последовательность $\{\tilde{h}_n\}$ сходится в $L_p^1(G)$ и содержит подпоследовательность, сходящуюся квазивсюду к функции $\tilde{h}$, которая принадлежит пространству $L_p^1(G)$, совпадает с функцией h квазивсюду в D и равна нулю квазивсюду в $G \setminus D$. Функция $v = u + \tilde{h}$ является допустимой для пары (K_0, K_1) и

$$\|v|L_p^1(G)\|^p = \|u + h|L_p^1(D)\|^p + \|u|L_p^1(G \setminus D)\|^p \leq \|u|L_p^1(G)\|^p.$$

В силу единственности экстремальной функции $v = u$, т.е. $h = 0$.

2. Если функция u, равная единице в окрестности γ, является допустимой для пары (K, γ) в области $G \setminus \overline{D}$, то её продолжение единицей на множество $\overline{D}$ имеет норму равную равную норме функции u и является допустимой для пары $(K, \overline{D})$. Поэтому

$$\operatorname{cap}_p(K, \overline{D}, G) \leq \operatorname{cap}_p(K, \gamma, G).$$

С другой стороны, в силу монотонности ёмкость пары $(K, \overline{D})$ не меньше чем ёмкость пары (K, γ), следовательно

$$\operatorname{cap}_p(K, \overline{D}, G) = \operatorname{cap}_p(K, \gamma, G). \quad \blacksquare$$

Замечание. Утверждение пункта 2 леммы 3.1 не противоречит дискретности множества критических точек экстремальной функции u, т.к. γ разбивает область G на непересекающиеся связные открытые множества G_n и сужения функции u на множества G_n следует рассматривать как отдельные функции u_n. Если множество $K_n = K \cap \partial G_n$ имеет положительную p-ёмкость и $\gamma_n = \gamma \cap \partial G_n$, то функция u_n является экстремальной для $\mathrm{cap}_p(K_n, \gamma_n, G_n)$ и имеет в G_n дискретное множество критических точек. Если p-ёмкость множества K_n равна нулю, то $u_n \equiv const$ в G_n.

Лемма 3.2. *Рассмотрим такую простую кривую $\gamma \subset G$, являющуюся образом непрерывного инъективного отображения промежутка или окружности, что множество $G \setminus \gamma = G_0 \cup G_1$, где непересекающиеся множества G_i открыты и связны. Пусть множество $K_0 \subset \overline{G}_0$, а множество $K_1 \subset \overline{G}_1$. Если $A = \mathrm{cap}_p(K_0, \gamma, G)$, $B = \mathrm{cap}_p(\gamma, K_1, G)$ и $C = \mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G) < \infty$, то:*

1. при всех $t \in (0,1)$

$$t^p\, A + (1-t)^p\, B \geq C;$$

2. если при некотором t

$$t^p\, A + (1-t)^p\, B = C,$$

то кривая γ является линией уровня U_t функции u, являющейся экстремальной для p-ёмкости пары (K_0, K_1);

3. выполняется неравенство

$$\frac{1}{A^{1/(p-1)}} + \frac{1}{B^{1/(p-1)}} \leq \frac{1}{C^{1/(p-1)}}.$$

Доказательство. Если хотя бы одно из значений A и B равно бесконечности, то неравенства пунктов 1 и 3 очевидны, а равенство пункта 2 выполняться не может. Поэтому будем считать, что $A < \infty$ и $B < \infty$.

1. Пусть функция v_0 является экстремальной для пары (K_0, γ) в области G, а функция v_1 является экстремальной в G для пары (γ, K_1). Согласно лемме 3.1 и предложению 1.1, глава 4 [2] функция v_0 равна единице квазивсюду на множестве $\gamma \cup G_1$, а функция v_1 равна нулю квазивсюду на множестве $\gamma \cup G_0$.

Функция

$$w(z) = \begin{cases} tv_0(z), & \text{если } z \in G_0 \cup K_0, \\ t, & \text{если } z \in \gamma, \\ t + (1-t)v_1(z), & \text{если } z \in G_1 \cup K_1 \end{cases}$$

при склейке на кривой γ будет абсолютно непрерывной на почти всех (квазивсех) прямых параллельных координатным осям, будет принадлежать пространству Соболева $L^1_p(G)$ и является допустимой для пары (K_0, K_1). Поэтому

$$\mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G) \leq \|w|L^1_p(G)\|^p = t^p\|v_0|L^1_p(G)\|^p + (1-t)^p\|v_1|L^1_p(G)\|^p =$$

$$t^p\,\mathrm{cap}_p(K_0, \gamma, G) + (1-t)^p\,\mathrm{cap}_p(\gamma, K_1, G).$$

2. Если при некотором t выполняется равенство из формулировки пункта 2, то

$$\mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G) = \|w|L^1_p(G)\|^p$$

и силу единственности экстремальной функции $w = u$.

3. Функция $h(t) = t^p A + (1-t)^p B$ имеет минимум в точке

$$t_0 = \frac{B^{1/(p-1)}}{A^{1/(p-1)} + B^{1/(p-1)}}, \qquad h(t_0) = \frac{AB}{\left(A^{1/(p-1)} + B^{1/(p-1)}\right)^{p-1}}.$$

Используя неравенство пункта 1, получаем

$$\frac{1}{A^{1/(p-1)}} + \frac{1}{B^{1/(p-1)}} \le \frac{1}{C^{1/(p-1)}}. \ \blacksquare$$

Неравенство пункта 3 ранее было получено в [3] иным способом.

Замечание. Сохраним обозначения леммы 3.2 и положим $\Delta = A - B$. Используя пункт 3, получаем

$$\operatorname{cap}_p(\gamma, K_1, G) = B \ge \frac{C(C+\Delta)}{\left((C+\Delta)^{1/(p-1)} - C^{1/(p-1)}\right)^{p-1}} \sim \frac{(p-1)^{p-1} C^p}{\Delta^{p-1}} \text{ при } \Delta \to 0.$$

Одно из важных характеристических свойств экстремальных функций содержится в следующем утверждении, доказанном в работе [14].

Лемма 3.3. *Рассмотрим ограниченную область $G \subset R^2$ и два непересекающихся компакта $K_0, K_1 \subset \overline{G}$. Если функция u является экстремальной для пары (K_0, K_1), то при почти всех $t \in (0,1)$*

$$\int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1}\, d\, l \equiv const = C_p, \tag{3.1}$$

где $C_p = \operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \|u\big|L_p^1(G)\|^p$.

Следствие 3.4. *Если функция u является экстремальной для p-ёмкости пары (K_0, K_1), то при всех $t \in (0,1)$*

$$\operatorname{cap}_p(K_0, U_t, G) = \frac{\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G)}{t^{p-1}}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.1 функция

$$u_t(z) = \begin{cases} u(z)/t & \text{если } u(z) < t, \\ 1, & \text{если } u(z) \ge 1 \end{cases}$$

будет экстремальной для пары (K_0, U_t)

Использую формулу интегрирования по линиям уровня [3, 15]

$$\iint\limits_G f(x,y)|\nabla u(x,y)|\, dx\, dy = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{U_t} f(x,y)\, dl \right) dt$$

и лемму 3.3, получаем

$$\operatorname{cap}_p(K_0, U_t) = \iint\limits_G |\nabla u_t|^p\, dx\, dy = t^{-p} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{U_\tau} |\nabla u|^{p-1}\, dl \right) d\tau =$$

$$t^{1-p}\|u\big|L_p^1(G)\|^p. \ \blacksquare$$

Пусть Λ - множество неубывающих функций $\lambda \in C^\infty(R^1)$, удовлетворяющих условиям: $\lambda(t) = 0$ при $t \le 0$, $\lambda(t) = 1$ при $t \ge 1$, $\operatorname{supp} \lambda' \subset (0,1)$.

Согласно лемме 2 пункта 2.2.2 [3] при $p \in (1,\infty)$ для всякой неотрицательной функции $h \in L_p([0,1])$ выполняется равенство

$$\inf_{\lambda\in\Lambda} \int_0^1 (\lambda')^p \, h \, d\,t = \left(\int_0^1 h^{\frac{1}{1-p}} \, d\,t \right)^{1-p} . \tag{3.2}$$

Если функция u является допустимой для пары (K_0, K_1), а функция $\lambda \in \Lambda$, то функция $\lambda(u)$ также является допустимой, при этом на множестве уровня U_t функция $\lambda(u)$ принимает постоянное значение $\lambda(t)$.

Использую формулу интегрирования по линиям уровня, получаем

$$\iint_G |\nabla\lambda(u)|^p \, dx\, dy = \iint_G (\lambda'(u)|\nabla u|)^p \, dx\, dy = \int_0^1 (\lambda')^p(t) \left(\int_{U_t} |\nabla u|^{p-1} \, dl \right) dt.$$

Множество функций Λ является выпуклым, поэтому для фиксированной допустимой функции u множество всех функций вида $\lambda(u)$ $(\lambda \in \Lambda)$ является выпуклым. Следовательно существует единственная допустимая функция v, принимающая постоянные значения на множествах уровня функции u и имеющая минимальную норму.

Использование равенства (3.2) и дословное повторение доказательства леммы 3.1 в работе [14], позволяет доказать, что при почти всех $t \in (0,1)$

$$\int_{V_t} |\nabla v|^{p-1} \, dl = const = \|v\big|L^1_p(G)\|^p \le \|u\big|L^1_p(G)\|^p, \tag{3.3}$$

где V_t – линия уровня функции v, отвечающая значению t.

Таким образом при вычислении p-ёмкости можно ограничиться допустимыми функциями, обладающими свойством (3.3). Для таких функций можно уточнить оценку ёмкостного интеграла в лемме 3 пункта 4.1.3 [3].

Пусть v - допустимая для пары (K_0, K_1) функция, для которой выполняется равенство (3.3), а V_t - её линия уровня. Функция

$$v_t(z) = \begin{cases} v(z)/t, & \text{если } v(z) < t, \\ 1, & \text{если } v(z) \ge 1 \end{cases}$$

является допустимой для пары (K_0, V_t), при этом

$$\operatorname{cap}_p(K_0, V_t) \le \iint_G |\nabla v_t|^p \, dx\, dy = t^{-p} \int_0^t \left(\int_{V_\tau} |\nabla v|^{p-1} \, dl \right) d\tau = t^{1-p} \|v\big|L^1_p(G)\|^p.$$

Следовательно

$$\int_0^1 \operatorname{cap}_p(K_0, V_t) \, d(t^p) \le p \, \|v\big|L^1_p(G)\|^p.$$

Замечание. Полученная в [3] в более общей ситуации постоянная равна $p\,(p/(p-1))^{p-1}$, что вполне ожидаемо больше чем p.

Наиболее простая ситуация возникает, когда для пары (K_0, K_1) существует допустимая функция, модуль градиента которой принимает на линии уровня постоянное значение.

Пример 3.5. Рассмотрим область $D_{R,a,\varphi}$, ограниченную отрезком I_0, соединяющим точки $(-a,0)$ и $(a,0)$, отрезком I_R, соединяющим точки $(-a,R)$ и (a,R), лучом l_0, выходящим из точки $(-a,0)$ под углом $\pi/2+\varphi$ к положительной полуоси OX, лучом l_1, выходящим из точки $(a,0)$ под углом $\pi/2-\varphi$ к положительной полуоси OX и дугами окружностей: $S_{R,0}$ - дугой окружности радиуса R с центром в точке $(-a,0)$, содиняющей точку $(-a,R)$ и луч l_0 и $S_{R,1}$ - дугой окружности радиуса R с центром в точке $(a,0)$, содиняющей точку (a,R) и луч l_1.

Оценим p-ёмкость пары граничных континуумов $F_0=I_0$ и $F_1=I_R\cup S_{R,0}\cup S_{R,1}$. При $0\le\rho\le R$ рассмотрим множества $V_\rho=I_\rho\cup S_{\rho,0}\cup S_{\rho,1}$ и определим функцию v условием $v(x,y)=1-\rho/R$, если точка $(x,y)\in V_\rho$. Функция v является допустимой для пары множеств (F_0,F_1), а модуль её градиента принимает постоянное значение $1/R$ на линии уровня V_ρ. Такими же свойствами будут обладать и функции $\lambda(u)$.

Если функция u с такими же множествами уровня минимизирует норму, то она удовлетворяет равенству (3.3), использую которое, получаем

$$\int\limits_{U_\rho}|\nabla u|^{p-1}\,dl=|\nabla u|^{p-1}(\rho)\,(2a+2\varphi\rho)=\|u\big|L^1_p(D_{R,a,\varphi})\|^p.$$

Значение нормы находится из условия $u(0,R)-u(0,0)=1:$

$$1=\int\limits_0^R|\nabla u|(\rho)\,d\rho=\|u\big|L^1_p(D_{R,a,\varphi})\|^{p/(p-1)}\int\limits_0^R(2a+2\varphi\rho)^{1/(1-p)}\,d\rho.$$

Вычисляя интеграл и делая простые преобразования, при $p\ne2$ получаем

$$\operatorname{cap}_p(F_0,F_1)\le\|u\big|L^1_p(D_{R,a,\varphi})\|^p=$$

$$\left|\frac{p-2}{p-1}\right|^{p-1}\left|\frac{(2a+2\varphi R)^{(p-2)/(p-1)}-(2a)^{(p-2)/(p-1)}}{2\varphi}\right|^{1-p}.$$

Полученная оценка является асимптотически точной в том смысле, что

i) при $\varphi\to0$

$$\|u\big|L^1_p(D_{R,a,\varphi})\|^p\to\frac{2a}{R^{p-1}},$$

т.е. величина $\|u\big|L^1_p(D_{R,a,\varphi})\|^p$ стремится к p-ёмкости пары сторон в прямоугольнике с основаниями длины $2a$ и высотой длины R;

ii) при $p>2$ и $a\to0$

$$\|u\big|L^1_p(D_{R,a,\varphi})\|^p\to2\varphi\left|\frac{p-2}{p-1}\right|^{p-1}R^{2-p},$$

т.е. величина $\|u\big|L^1_p(D_{R,a,\varphi})\|^p$ стремится к p-ёмкости пары, образованной вершиной сектора раствора 2φ и дугой окружности радиуса R (см. пример2.1, пункт 1).

Пример 3.6. Немного модифицируем предыдущий пример. Рассмотрим выпуклый многоугольник Π с периметром длины L. Фиксируем произвольное $R>0$ и для $\rho\le R$ замкнутую кривую S_ρ определим условием

$$S_\rho=\{x\in R^2\setminus\Pi\big|dist(x,\Pi)=\rho\}.$$

Кривая S_ρ имеет длину равную $L+2\pi\rho$. Оценим p-ёмкость пары множеств $\partial\Pi$ и S_R.

Можно определить допустимую функцию, для которой кривые S_ρ являются множествами уровня, полагая $v(x,y)=1-\rho/R$, если точка $(x,y)\in S_\rho$. Следовательно, как и в примере 3.5, существует функция u с такими же множествами уровня, минимизирующая норму и удовлетворяющая равенству (3.3).

Повторяя вычисления предыдущего примера, при $p\neq 2$ получаем

$$\mathrm{cap}_p(\partial\Pi, S_R)\le (2\pi)^{p-1}\left|\frac{p-2}{p-1}\right|^{p-1}\left|(L+2\pi R)^{(p-2)/(p-1)}-(L)^{(p-2)/(p-1)}\right|^{1-p}.$$

Из этой оценки при $p<2$ и $R\to\infty$ следует занимательный факт

$$\mathrm{cap}_p(\Pi)\le (2\pi)^{p-1}\left|\frac{p-2}{p-1}\right|^{p-1}L^{2-p}=2\pi\left|\frac{p-2}{p-1}\right|^{p-1}r^{2-p}=\mathrm{cap}_p(B(0,r)).$$

Здесь $r=L/(2\pi)$, $\mathrm{cap}_p(\Pi)=\mathrm{cap}_p(F_0,F_1)$, где $F_1=\Pi$, а F_0 - бесконечно удаленная точка в смысле одноточечной компактификации плоскости.

Таким образом p-ёмкость многоугольника с периметром длины L не превосходит p-ёмкости круга, длина окружности которого равна L.

4. О свойствах экстремалей в четырехстороннике

Нас будут интересовать свойства экстремальных функций для p-ёмкости пары граничных дуг $F_0,F_1\subset\partial G$.

Рассмотрим на плоскости R^2 ограниченную односвязную область G с жордановой границей Γ и четыре различные последовательные граничные точки $a_1,a_2,a_3,a_4\in\Gamma$. Для определенности будем считать, что нумерация точек согласована с положительной ориентацией границы.

Область G с отмеченными четыремя граничными точками будем называть четырехсторонником и обозначать $G_\star$, а замкнутые граничные дуги $F_0=\Gamma_{a_4a_1}$, $F_1=\Gamma_{a_2a_3}$, $E_0=\Gamma_{a_1a_2}$, $E_1=\Gamma_{a_3a_4}$ будем называть его "сторонами".

Если $0<\mathrm{cap}_p(F_0,F_1,G)<\infty$, то будем называть четырехсторонник $G_\star$ невырожденным. Из оценок p-ёмкости следует, что равенство нулю или бесконечности возможно в случае вырождения одной из ”сторон” в точку.

Далее мы будем предполагать, что $1<p<\infty$. В случаях, когда это не будет вызывать разночтений, мы иногда будем опускать в формулах символ области и писать, к примеру, $\mathrm{cap}_p(F_0,F_1)$ вместо $\mathrm{cap}_p(F_0,F_1,G)$.

В невырожденном четырехсторонние ёмкости пар ”противоположных сторон” (F_0,F_1) и (E_0,E_1) связаны соотношениями

$$\begin{gathered}[\mathrm{cap}_p(F_0,F_1)]^{1/p}\cdot[\mathrm{cap}_{p'}(E_0,E_1)]^{1/p'}=1,\\ \mathrm{cap}_p(F_0,F_1)=[\mathrm{cap}_{p'}(E_0,E_1)]^{1-p},\\ \mathrm{cap}_{p'}(E_0,E_1)=[\mathrm{cap}_p(F_0,F_1)]^{1-p'},\end{gathered}\tag{4.1}$$

как обычно, значения p и p' связаны равенством $1/p+1/p'=1$.

Равенство (4.1) можно получить как следствие взаимосвязи p-ёмкости и p'-модуля разделяющих поверхностей в R^n, первоначально установленной в работе [16]. Альтернативное аналитическое доказательство равенства (4.1) в R^2 содержится в работах [14, 17].

Чтобы получить оценку сверху p-ёмкости пары ”сторон” достаточно найти подходящую допустимую функцию, обычно это проще чем получить оценку снизу. Равенство (4.1) позволяет использовать оценку сверху p-ёмкости одной пары "сторон" для получении оценки снизу p'-ёмкости другой пары "сторон".

Пример 4.1. Рассмотрим область $D_{R,a,\varphi}$ из примера 3.5 и пусть $E_0 = l_0 \cap \partial D_{R,a,\varphi}$, $E_1 = l_1 \cap \partial D_{R,a,\varphi}$. Используя оценку p-ёмкости пары (F_0, F_1) из примера 3.5, равенство (4.1) и равенства $(p-2)/(p-1) = 2-p'$, $p'(p-1)/p = 1$, при $p' \neq 2$ получаем

$$\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1) = [\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)]^{p'/p} \geq \frac{\left|(2a+2R\varphi)^{2-p'} - (2a)^{2-p'}\right|}{2\varphi\,|2-p'|}.$$

Лемма 4.2. Пусть $G_\star$ – невырожденный четырехсторонник. Если длина любой кривой, разделяющей "стороны" F_0 и F_1, не меньше чем d, то

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1) \geq \frac{d^p}{m_2(G)^{p-1}}.$$

Доказательство является непосредственным следствием равенства (4.1) и леммы 2.2

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1) = \frac{1}{[\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{p-1}} \geq \frac{d^p}{m_2(G)^{p-1}}.$$

Лемма 4.3. Рассмотрим четырехсторонник G_*. Пусть функция u является допустимой для пары "сторон" (F_0, F_1), а функция v является допустимой для пары "сторон" (E_0, E_1). Если

$$\|u \mid L_p^1(G)\| \cdot \|v \mid L_{p'}^1(G)\| = 1, \tag{4.2}$$

то функция u является экстремалью для p-ёмкости пары "сторон" F_0, F_1, а функция v является экстремалью для p'-ёмкости пары "сторон" E_0, E_1.

Доказательство. Согласно условию

$$\|u \mid L_p^1(G)\|^p \geq \operatorname{cap}_p(F_0, F_1) \quad \text{и} \quad \|v \mid L_{p'}^1(G)\|^{p'} \geq \operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1).$$

Из равенств (4.1) и (4.2) получаем

$$\|u \mid L_p^1(G)\| \cdot \|v \mid L_{p'}^1(G)\| = [\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} \cdot [\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1,$$

поэтому

$$\|u \mid L_p^1(G)\|^p = \operatorname{cap}_p(F_0, F_1) \quad \text{и} \quad \|v \mid L_{p'}^1(G)\|^{p'} = \operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1).$$

Остается только вспомнить об единственности экстремальной функции. ■

Лемма 4.4. Рассмотрим четырехсторонник $G_\star$, функцию u - экстремальную для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1) и функцию v - экстремальную для p'-ёмкости пары "сторон" (E_0, E_1). Пусть $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, $\Delta = t_2 - t_1$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq 1$, $\delta = \tau_2 - \tau_1$. Обозначим через G_Δ - часть области G, расположенную между линиями уровня U_{t_1} и U_{t_2}, а через $G_{\Delta,\delta}$ четырехсторонник, ограниченный линиями уровня U_{t_1}, U_{t_2} и V_{τ_1}, V_{τ_2}. Пусть $E_{0,\Delta}, E_{1,\Delta}$ - граничные дуги, образующие вместе с U_{t_1}, U_{t_2} границу области G_Δ, а $F_{(0,\Delta,\delta)}, F_{(1,\Delta,\delta)}, E_{(0,\Delta,\delta)}, E_{(1,\Delta,\delta)}$ - соответствующие "стороны" четырехсторонника $G_{\Delta,\delta}$.

Тогда

1. $\displaystyle\iint\limits_{G_\Delta} |\nabla u|^p \, dxdy = \Delta \cdot \operatorname{cap}_p(F_0, F_1, G);$

2. $\mathrm{cap}_p(U_{t_1}, U_{t_2}, G_\Delta) = \dfrac{\mathrm{cap}_p(F_0, F_1, G)}{\Delta^{p-1}}$;

3. $\mathrm{cap}_{p'}(E_{0,\Delta}, E_{1,\Delta}, G_\Delta) = \Delta \cdot \mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1, G)$;

4. $\mathrm{cap}_{p'}(E_{(0,\Delta,\delta)}, E_{(1,\Delta,\delta)}, G_{\Delta,\delta}) = \dfrac{\Delta}{\delta^{p'-1}} \cdot \mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1, G)$;

5. $\mathrm{cap}_p(F_{(0,\Delta,\delta)}, F_{(1,\Delta,\delta)}, G_{\Delta,\delta}) = \dfrac{\delta}{\Delta^{p-1}} \cdot \mathrm{cap}_p(F_0, F_1, G)$.

Доказательство. 1. Воспользуемся формулой интегрирования по множествам уровня [3, 15] и равенством (1)

$$\iint\limits_{G_\Delta} |\nabla u|^p \, dxdy = \int\limits_{\Delta} \left(\int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1} \, d\,l \right) dt = \Delta \cdot \mathrm{cap}_p(F_0, F_1).$$

2. Функция

$$h(z) = \begin{cases} 0, & u(z) \le t_1 \\ (u(z) - t_1)/\Delta, & t_1 < u(z) < t_2 \\ 1, & u(z) \ge t_2 \end{cases}$$

является экстремальной для пары (U_{t_1}, U_{t_2}), поэтому равенство является очевидным следствием пункта 1.

3. Используя пункт 2 и равенство (4.1) для четырехсторонника G_Δ, получаем

$$\mathrm{cap}_{p'}(E_{0,\Delta}, E_{1,\Delta}, G_\Delta) = \mathrm{cap}_p(U_{t_1}, U_{t_2})^{1/(1-p)} = \frac{\Delta}{\mathrm{cap}_p(F_0, F_1)^{1/(p-1)}} =$$

$$\Delta \cdot \mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1).$$

4. Равенство является непосредственным следствием пунктов 2 и 3.

5. Используя пункт 4 и равенство (4.1) для четырехсторонника $G_{\Delta,\delta}$, получаем

$$\mathrm{cap}_p(F_{(0,\Delta,\delta)}, F_{(1,\Delta,\delta)}, G_{\Delta,\delta}) = \left[\mathrm{cap}_{p'}(E_{(0,\Delta,\delta)}, E_{(1,\Delta,\delta)}, G_{\Delta,\delta})\right]^{1-p} =$$

$$\left[\frac{\Delta}{\delta^{p'-1}} \cdot \mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1, G)\right]^{1-p} = \frac{\delta}{\Delta^{p-1}} \cdot \mathrm{cap}_p(F_0, F_1, G). \quad \blacksquare$$

В доказательстве следующего утверждения используется принцир сравнения [12]:

если u и v - такие p-гармонические функции в области $G \subset R^2$, что $u \ge v$, то либо $u \equiv v$ либо $u > v$.

Лемма 4.5. Рассмотрим четырехсторонник $G_\star$. Пусть функция u является экстремальной для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1), множество $L \subset F_1$ и функция w является экстремальной для p-ёмкости пары (F_0, L). Тогда либо

i) $w \equiv u$ и $\mathrm{cap}_p(F_0, L) = \mathrm{cap}_p(F_0, F_1)$

либо

ii) $u(x) > w(x)$ при $x \in G$ и $\mathrm{cap}_p(F_0, L) < \mathrm{cap}_p(F_0, F_1)$.

Доказательство. Функция $H(x) = \max[u(x), w(x)]$ является допустимой для пары (F_0, F_1), а функция $h(x) = \min[u(x), w(x)]$ является допустимой для пары (F_0, L). Следовательно

$$\|H \mid L^1_p(D)\|^p \ge \mathrm{cap}_p(F_0, F_1) = \|u \mid L^1_p(D)\|^p \quad \text{и} \quad \|h \mid L^1_p(D)\|^p \ge$$

$$\operatorname{cap}_p(F_0, L) = \|w \mid L^1_p(D)\|^p.$$

При этом

$$\|H \mid L^1_p(D)\|^p + \|h \mid L^1_p(D)\|^p =$$

$$\|u \mid L^1_p(D)\|^p + \|w \mid L^1_p(D)\|^p,$$

следовательно

$$\|H \mid L^1_p(D)\| = \|u \mid L^1_p(D)\| \quad \text{и} \quad \|h \mid L^1_p(D)\| = \|w \mid L^1_p(D)\|.$$

В силу единственности экстремали $H(x) = u(x)$, $h(x) = w(x)$ и

$$u(x) = \max[u(x), w(x)] \geq \min[u(x), w(x)] = w(x).$$

Из этой оценки соласно принципу сравнения [12] следует:
либо $u \equiv w$ и очевидно $\operatorname{cap}_p(F_0, L) = \operatorname{cap}_p(F_0, F_1)$
либо $u > w$. Остается показать, что в этом случае $\operatorname{cap}_p(F_0, L) < \operatorname{cap}_p(F_0, F_1)$. В силу монотонности ёмкости $\operatorname{cap}_p(F_0, L) \leq \operatorname{cap}_p(F_0, F_1)$. Предположим, что $\operatorname{cap}_p(F_0, L) = \operatorname{cap}_p(F_0, F_1) = C_p$. При $t \in (0, 1)$ линии уровня U_t и W_t не пересекаются и при этом разделяют множества F_0 и L. Обозначим символом D часть области G, расположенную между этими линиями уровня, и рассмотрим допустимую для пары (F_0, L) функцию

$$h(z) = \begin{cases} u(z), & u(z) \leq t \\ t, & z \in D \\ w(z), & w(z) \geq t. \end{cases}$$

Учитывая пункт 1 леммы 4.4, вычислим норму функции h

$$\|h\big|L^1_p(G)\|^p = \iint\limits_{u \leq t} |\nabla h|^p \, dxdy + \iint\limits_{D} |\nabla h|^p \, dxdy + \iint\limits_{w \geq t} |\nabla h|^p \, dxdy =$$

$$t \cdot C_p + 0 + (1 - t) \cdot C_p = \|w\big|L^1_p(G)\|^p.$$

В силу единственности экстремальной функции $h = w$, а следовательно и $u = w$. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Лемма 4.6. Если функция u является экстремальной для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1) четырехсторонника $G_\star$, то $0 < u(x) < 1$ при всех $x \in G$.

Доказательство. Предположим противное, что существует $x_0 \in G$ и $u(x_0) = 1$. В этом случае x_0 является точкой экстремума и $\nabla u(x_0) = 0$, т.е. точка $x_0 \in Z$. Поскольку множество критических точек является дискретным, то существует проколотый замкнутый шар $\hat{B}_0 = \overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\}$, который не содержит других точек экстремума, и следовательно $u(z) < 1$ при $z \in \hat{B}_0$. Однако это противоречит свойству монотонности экстремальной функции (пункт 1.1, глава 4, [2]), согласно которому, с учетом непрерывности функции u, получаем

$$1 = \sup_{z \in B(x_0, r)} u(z) = \sup_{z \in \partial B(x_0, r)} u(z) < 1. \quad ■$$

Рассмотрим невырожденный четырехсторонник $G_\star$ и экстремальную для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1) функцию u. Введем следующие обозначения

$$G^+_{u,t} = \{x \in G \big| t < u(x) < 1\}; \quad G^-_{u,t} = \{x \in G \big| 0 < u(x) < t\}.$$

Следствие 4.7. Если функция u является экстремальной для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1) четырехсторонника $G_\star$, то

$$m_2(G^+_{u,t}) \to 0 \text{ при } t \to 1, \qquad m_2(G^-_{u,t}) \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

Доказательство. Легко заметить, что $\bigcap\limits_t G^+_{u,t} = \emptyset$. В противном случае существовала бы точка $x_0 \in G$, которая принадлежит всем множествам $G^+_{u,t}$, но согласно лемме 4.6 $u(x_0) = \lambda < 1$, т.е. $x_0 \notin G^+_{u,t}$ при $t > \lambda$.

Поэтому

$$\lim_{t\to 1} m_2(G^+_{u,t}) = m_2\left(\bigcap_t G^+_{u,t}\right) = 0.$$

Утверждение для множеств $G^-_{u,t}$ доказывается аналогичным образом. ■

Лемма 4.8. Рассмотрим невырожденный четырехсторонник $G_\star$. Если невырожденая дуга γ является подмножеством "стороны" F_1, то выполняется строгое неравенство

$$\mathrm{cap}_p(F_0, F_1 \setminus \gamma) < \mathrm{cap}_p(F_0, F_1).$$

Доказательство. Соединим конечные точки дуги γ кривой L, не имеющей самопересечений и лежащей в дополнении к области G. Простая замкнутая кривая $\gamma \cup L$ ограничивает открытое множество U. Пусть множество $K = \overline{F_1 \cup U}$ и $G^* = G \cup U \cup \gamma$.

Поскольку множество F_1 отделяет множество U от области G, то

$$\mathrm{cap}_p(F_0, K, G^*) = \mathrm{cap}_p(F_0, F_1, G).$$

Множество $K^* = L \cup (F_1 \setminus \gamma) \subset K$, поэтому

$$\mathrm{cap}_p(F_0, K^*, G^*) \le \mathrm{cap}_p(F_0, K, G^*) = \mathrm{cap}_p(F_0, F_1, G).$$

Пусть функция u является экстремальной для пары (F_0, F_1) в G, тогда её продолжение единицей на множество $U \cup \gamma$ - функция $\tilde u$ является экстремальной для пары (F_0, K) в G^*. Если функция w является экстремальной для пары (F_0, K^*) в G^*, то согласно лемме 4.6 функция $w < 1$ на множестве $U \cup \gamma$, т.е. отличается от функции $\tilde u$ на множестве положительной меры. Поскольку экстремальная функция единственна, то функция $\tilde u$ не является экстремальной для пары (F_0, K^*), т.е.

$$\mathrm{cap}_p(F_0, K^*, G^*) = \|w|L^1_p(G^*)\|^p < \|\tilde u|L^1_p(G^*)\|^p = \mathrm{cap}_p(F_0, F_1, G).$$

Функция $\tilde w = w|_G$ является допустимой для пары $(F_0, F_1 \setminus \gamma)$ в G, следовательно

$$\mathrm{cap}_p(F_0, F_1 \setminus \gamma) < \mathrm{cap}_p(F_0, F_1). \quad ■$$

Лемма 4.9. Рассмотрим локально связный невырожденный четырехсторонник $G_\star$. Пусть $p \ge 2$ и функция u является эктремальной для p-ёмкости пары "сторон" (F_0, F_1). Тогда для всякой точки $a \in \partial G$ существует однозначно определенное граничное значение

$$u(a) = \lim_{\substack{z\to a\\ z\in G}} u(z).$$

Доказательство. Предположим противное, пусть

$$\liminf_{\substack{z\to a\\ z\in G}} u(z)=\alpha,\quad \limsup_{\substack{z\to a\\ z\in G}} u(z)=\beta$$

и $\beta-\alpha=\delta>0$. Рассмотрим последовательность кругов $\{B(a,r_n)\}$, у которых радиусы $r_n\to 0$ при $n\to\infty$. Существуют последовательности $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$, сходящиеся к точке a и такие, что $z'_n, z''_n\in B(a,r_n)$ и $u(z'_n)<\alpha+\delta/8$ и $u(z''_n)>\beta-\delta/8$. Поскольку область G локально связная, то точки z'_n и z''_n можно соединить кривой $\gamma_n\subset G\cap B(a,r_n)$. В силу непрерывности функции u на кривой γ_n есть точка t_n, в которой $u(t_n)=\alpha+\delta/4$, и точка τ_n, в которой $u(\tau_n)=\beta-\delta/4$. Пусть $\tilde\alpha=\alpha+\delta/4$ и $\tilde\beta=\beta-\delta/4$. Точки t_n и τ_n сходятся к точке a и лежат на соответствующих линиях уровня $U_{\tilde\alpha}$ и $U_{\tilde\beta}$. Точка a является предельной для $U_{\tilde\alpha}$ и $U_{\tilde\beta}$, поэтому всякая окружность S_ρ с центром в точке a и достаточно малого радиуса $\rho<r_0$ пересекает обе эти линии уровня.

Для оценки колебания функции u на окружности S_ρ воспользуемся полярными координатами с полюсом в точке a

$$\frac{\delta}{2}=\tilde\beta-\tilde\alpha\le osc_{S_\rho}u\le\int\limits_{S_\rho\cap G}\left|\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|d\varphi\le\rho\int\limits_{S_\rho\cap G}|\nabla u|\,d\varphi.$$

Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\frac{\delta}{2}\le\rho\left(\int\limits_{S_\rho\cap G}|\nabla u|^p\,d\varphi\right)^{1/p}(2\pi)^{1/p'}$$

или

$$\delta^p\,\rho^{1-p}\le C\int\limits_{S_\rho\cap G}|\nabla u|^p\,\rho\,d\varphi.$$

Интегрируя последнее неравенство по ρ в пределах от ε до r_0, получаем

$$\|\nabla u\mid L_p(G)\|^p\ge C_1\,\delta^p\int\limits_{\varepsilon}^{r_0}\rho^{1-p}\,d\rho=C_1\,\delta^p\begin{cases}\dfrac{\varepsilon^{2-p}-r_0^{2-p}}{p-2}, & \text{при } p>2,\\[2ex] \ln\dfrac{r_0}{\varepsilon}, & \text{при } p=2.\end{cases}$$

При $\delta\ne 0$ правая часть неравенства стремится к бесконечности при $\varepsilon\to 0$, что противоречит конечности нормы экстремальной функции. ■

Таким образом при $p\ge 2$ экстремальная функция допускает продолжение по непрерывности на границу локально связной области G и, следовательно, является равномерно непрерывной в $\overline{G}$.

References

[1] Yu.G. Reshetnyak, *The concept of capacity in the theory of functions with generalized derivatives*, Sib. Math. J., **10**:5, (1970), 818–842. Zbl 0199.20701

[2] V.M. Gold'shtein, Yu.G. Reshetnyak, *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht etc., 1990. Zbl 0687.30001

[3] V.G. Maz'ya, *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1985. Zbl 0692.46023

[4] V.G. Maz'ya, V.P. Havin, *Non-linear potential theory*, Russ. Math. Surv., **27**:1, (1972), 71–148. Zbl 0269.31004
[5] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992. Zbl 0804.28001
[6] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970. Zbl 0207.13501
[7] M. Brelo *Elements of the classical theory of potential*, Mir, Moscow, 1964. Zbl 0116.07503
[8] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989. Zbl 0692.46022
[9] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math., **98**:3-4 (1957), 171–219. Zbl 0079.27703
[10] W.P. Ziemer, *Extremal length and p-capacity*, Mich. Math. J., **16**:1 (1969), 43–51. Zbl 0172.38701
[11] T. Iwaniec, J.J. Manfredi, *Regularity of p-harmonic functions on the plane*, Rev. Mat. Iberoam., **5**:1-2 (1989), 1–19. Zbl 0805.31003
[12] J.J. Manfredi, *p-harmonic functions in the plane*, Proc. AMS, **103**:2 (1988), 473–479. Zbl 0658.35041
[13] B. Bojarski, P. Hajlasz, P. Strzelecki, *Sard's theorem for mappings in Hölder and Sobolev spaces*, Manuscr. Math., **118**:3 (2005), 383–397. Zbl 1098.46024
[14] A.S. Romanov *Mappings related to extremal functions for p-capacity*, Sib. Électron. Mat. Izv., **16** (2019), 1295–1311. Zbl 1431.30024
[15] W.P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity*, Trans. Am. Math. Soc., **126**:3 (1967), 460–473. Zbl 0177.34002
[16] V.A. Shlyk, *Capacity of a condenser and modulus of a family of separating surfaces*, J. Sov. Math., **59**:6 (1992), 1240–1248. Zbl 0783.31006
[17] A.S. Romanov *Capacity relations in a flat quadrilateral*, Sib. Math. J., **49**:4 (2008), 709–717. Zbl 1164.30368

Romanov Alexandr Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: asrom@math.nsc.ru