S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том ??, стр. ?–? (2018) УДК 512.552.4, 512.554.1

DOI 10.17377/semi.2018.15.xxx

MSC 16R10, 17A30

ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ КРОССОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР

И.М. ИСАЕВ

Abstract. We constructed the example of the join Cross varieties of algebras over a finite field which is not finitely based, but its proper subvarieties is finitely based.

Keywords: linear algebra, Cross variety, nonfinitely based variety of algebras.

1. Введение

Пусть Φ — конечное поле из q элементов. Многообразие $\mathfrak{M}$ линейных Φ-алгебр называется конечно базируемым, если в классе всех линейных Φ-алгебр оно выделяется конечным набором тождеств (этот набор называется базисом тождеств многообразия $\mathfrak{M}$). Многообразие $\mathfrak{M}$ называется кроссовым, если оно локально конечно, имеет конечный базис тождеств и конечное число критических алгебр. Хорошо известно, что всякая конечная группа [1] (Оутс и Пауэлл), конечное ассоциативное кольцо [2], [3], [5] (Львов, Крузе) порождают кроссово многообразие. Аналогичный результат является верным и в других классах колец, близких к ассоциативным [4], [8]. В то же время существуют примеры конечных колец и конечных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств [6], [7], [9], [10], [11], [12]. Конечная алгебра, указанная в работе [9], не имеет конечного базиса тождеств, но порождает многообразие, имеющее конечное число подмногообразий. В частности, существует конечная линейная Φ-алгебра, порождающая почти кроссово многообразие. В этой работе мы строим пример двух конечных линейных Φ-алгебр, каждая из которых порождает кроссово многообразие, но объединение этих многообразий

Isaev, I.M., On the join of Cross varieties of algebras.

Поступила ?? июля 2021 г., опубликована ?? декабря 20?? г.

не имеет конечного базиса тождеств (т.е. не является кроссовым). Это многообразие порождено 7-мерной Ф-алгеброй, причем подмногообразия этого многообразия образуют дистрибутивную решетку. Отметим, что согласно теореме Бейкера [13] всякая конечная алгебра в конгруэнц-дистрибутивном многообразии имеет конечный базис тождеств. Решетка подмногообразий произвольного конгруэнц-дистрибутивного многообразия дистрибутивна. Настоящий пример показывает, что в конгруэнц-перестановочном многообразии дистрибутивности решетки подмногообразий недостаточно для конечной базируемости тождеств конечной алгебры. Отметим, что полученный результат является некоторым аналогом результата автора [14] об объединении шпехтовых многообразий алгебр.

2. Многообразие Полина и пример не конечно базируемого объединения кроссовых многообразий

Пусть $\mathfrak{P}$ — многообразие Ф-алгебр, удовлетворяющих тождеству

$$x(yz) = 0. \tag{1}$$

Тождества Ф-алгебр, удовлетворяющих тождеству (1) впервые рассмотрел в своей работе С. В. Полин [6]. Поэтому многообразие Ф-алгебр, удовлетворяющих тождеству (1), мы будем называть многообразием Полина. Рассмотрим свободную алгебру R этого многообразия от счетного числа порождающих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Произвольный одночлен алгебры R имеет вид $x_i R_{x_{i_1}} \dots R_{x_{i_k}}$, где R_x — оператор правого умножения на элемент x. Мы будем записывать этот одночлен следующим образом: $x_i x_{i_1} \dots x_{i_k}$. Как всегда $[x, y] = xy - yx$, и под записью элемента $x_1[x_2, x_3]x_4$ из R понимается следующее: $x_1[x_2, x_3]x_4 = x_1x_2x_3x_4 - x_1x_3x_2x_4$, и везде в аналогичных случаях коммутатор в R раскрывается таким же образом.

Пусть $\Phi(X)$ —свободная ассоциативная алгебра от множества порождающих X . Многочлен $f(x_1, ..., x_n) \in \Phi(X)$ будем называть тождеством некоторого пространства линейных преобразований E, если $f(e_1, ..., e_n) = 0$ для любых $e_1, ..., e_n \in E$. В данном случае E —подпространство $\mathrm{End}_\Phi V$ для некоторого пространства V.

Пусть F —некоторое подмножество в $\Phi(X)$. Через $T(F)$ мы будем обозначать T-идеал алгебры $\Phi(X)$, порожденный множеством F, а через $L(F)$ обозначим идеал в $\Phi(X)$, порожденный множеством многочленов, полученных из F линейными заменами переменных.

Множество $F \subseteq \Phi(X)$ называется базисом тождеств пространства линейных преобразований E, если все тождества пространства E совпадают с идеалом $L(F)$.

В работе [7] рассматриваются алгебры вида $\overline{V} = V \oplus E$, где V — векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$ и умножение элементов $\overline{V}$ определяются правилом $(v_1+e_1)(v_2+e_2) = v_1e_2$ для $v_1, v_2 \in V$ и $e_1, e_2 \in E$ (под v_1e_2 понимается действие преобразования e_2 на вектор v_1). В этой работе доказано, что $\overline{V} \in \mathfrak{P}$ и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ лежит в идеале тождеств ассоциативного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \dots, R_{x_n})$ лежит в идеале тождеств алгебры $\overline{V}$ [7]. В частности, верна следующая теорема

Теорема 1. *Пусть* $\overline{V} = V \oplus E$, $F = \{f_1(x_1, ..., x_{n_1}), f_2(x_1, ..., x_{n_2}), ...\}$ *– базис тождеств пространства* E. *Тогда множество*

$$zF = \{zf_1(x_1, ..., x_{n_1}), zf_2(x_1, ..., x_{n_2}), ...\}$$

является базисом тождеств алгебры $\overline{V}$ *в многообразии* $\mathfrak{P}$ *в том и только в том случае, когда* $L(F) = T(F)$.

Не конечно базируемая алгебра B, определенная в работе [9], лежит в многообразии $\mathfrak{P}$ и порождается тремя элементами a, b, c. Как векторное пространство над Φ, B имеет базис $a, b, c, ab, ac, abc, acb, abcb$, и ненулевые произведения элементов базиса задаются следующей таблицей:

	b	c
a	ab	ac
ab	ab	abc
ac	acb	ac
abc	abcb	abc
acb	acb	abc+acb-abcb
abcb	abcb	abc

Заметим, что алгебра B подпрямо разложима, а именно, идеалы $\langle ab - abcb\rangle_\Phi$, $\langle abc - abcb\rangle_\Phi$ в ней имеют нулевое пересечение. Изучая строение подпрямых компонент и разлагая их далее в подпрямые произведения, получаем в конце концов, что все подпрямо неразложимые факторы алгебры B вложимы в одну из алгебр $A_1 = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{21}\rangle_\Phi$ и $A_2 = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12}\rangle_\Phi$, ненулевые произведения базисных элементов которых задаются правилом: $v_i e_{ij} = v_j$. При этом существуют факторы, изоморфные A_1, A_2. Следовательно, многообразие $\mathfrak{M} = \operatorname{Var} B$ совпадает с многообразием, порожденным алгеброй $A_1 \oplus A_2$. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \operatorname{Var} A_1$, $\mathfrak{M}_2 = \operatorname{Var} A_2$ — многообразия, порожденные алгебрами A_1 и A_2, соответственно.

Теорема 2. *Не конечно базируемое многообразие* $\mathfrak{M}$ *является объединением двух кроссовых многообразий* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$.

Доказательство. Так как многообразие $\mathfrak{M}$ содержит конечное число критических алгебр [9], то нам достаточно проверить конечную базируемость многообразий $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Очевидно, что тождества

$$zx_1[x_2, x_3] = 0, \tag{2}$$

$$zx_1(x_2 - x_2^q) = 0, \tag{3}$$

выполняются в $\mathfrak{M}_1$, а

$$z[x_1, x_2]x_3 = 0, \tag{4}$$

$$z(x_1 - x_1^q)x_2 = 0, \tag{5}$$

выполняются в $\mathfrak{M}_2$. Пусть $E_1 = \langle e_{11}, e_{21}\rangle_\Phi$, $E_2 = \langle e_{11}, e_{12}\rangle_\Phi$. Стандартно проверяется (см. например, [15]), что многочлены

$$f_1 = x_1[x_2, x_3], g_1 = x_1(x_2 - x_2^q)$$

образуют базис тождеств пространства E_1, а многочлены

$$f_2 = [x_1, x_2]x_3, g_2 = (x_1 - x_1^q)x_2$$

образуют базис тождеств пространства E_2. Докажем, что $L(f_1, g_1) = T(f_1, g_1)$. Включение $L(f_1, g_1) \subseteq T(f_1, g_1)$ очевидно. Обратное включение получаем из следующих соотношений:

$$x_1[x_2x_4, x_3] = x_1x_2[x_4, x_3] + x_1[x_2x_3]x_4 \in L(f_1, g_1),$$

$$x_1(x_2x_3 - (x_2x_3)^q) = x_1x_2(x_3 - x_3^q) + x_1(x_2 - x_2^q)x_3^q + x_1(x_2^q x_3^q - (x_2x_3)^q) \in L(f_1, g_1).$$

Согласно теореме 1, равенства (2), (3) образуют базис тождеств многообразия $\mathfrak{M}_1$ внутри $\mathfrak{P}$. Аналогично, равенства (4),(5) образуют базис тождеств многообразия $\mathfrak{M}_2$ внутри $\mathfrak{P}$. $\square$

3. Пример почти кроссова многообразия алгебр

Для построения почти кроссова многообразия нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть S– критическая алгебра многообразия $\mathfrak{M}$. Тогда либо $S \in \mathfrak{M}_1$, либо $S \in \mathfrak{M}_2$.*

Доказательство. Заметим вначале следующее полезное утверждение, вытекающее из леммы Шура. Пусть N– неприводимый A-модуль, где A– ассоциативно-коммутативная алгебра, удовлетворяющая тождеству $x - x^q = 0$. Тогда либо $A/AnnN \simeq \Phi$, либо $A = AnnN$. В обоих случаях N является однопорожденным A-модулем.

В многообразии $\mathfrak{M}$ выполняются следующие тождества, указанные в [9]:

$$zx_1[x_2, x_3]x_4 = 0, \tag{6}$$

$$zx_1(x_2 - x_2^q)x_3 = 0, \tag{7}$$

$$z(x_1 - x_1^q)[x_2, x_3] = 0, \tag{8}$$

$$z[x_1, x_2](x_3 - x_3^q) = 0, \tag{9}$$

$$z(x_1 - x_1^q)(x_2 - x_2^q) = 0, \tag{10}$$

$$z[x_1, x_2]y_1 ... y_k[x_3, x_4] = 0, k = 0, 1, ... \tag{11}$$

Через $f(S)$ мы будем обозначать идеал алгебры S, порожденный всевозможными элементами вида $f(s_1, ..., s_n)$, где $s_1, ..., s_n \in S$.

Пусть $h_1 = zx_1[x_2, x_3], h_2 = zx_1(x_2 - x_2^q), h_3 = z[x_1, x_2], h_4 = z(x_1 - x_1^q)$; S– критическая алгебра из $\mathfrak{M}$, $J_i = h_i(S), (i = \overline{1, 4})$. Тогда, в соответствии с (6)-(11), $J_1S = J_2S = 0$. Если $J_1 = J_2 = 0$, то из доказательства теоремы 2 следует, что алгебра S лежит в многообразии $\mathfrak{M}_1$. В противном случае, сердцевина M алгебры S удовлетворяет соотношению $MS = 0$. Покажем, что в этом случае $S \in \mathfrak{M}_2$. Если $J_3 = J_4 = 0$, то $J_1 = J_2 = 0$. Допустим, что идеал J_3 ненулевой. На идеале J_3/M алгебры S/M естественным образом определим структуру правого $R(S)$-модуля, где $R(S)$– алгебра правых умножений (с единицей) алгебры S. Пусть N– минимальный подмодуль модуля J_3/M. Тогда ввиду замечания в начале леммы и тождеств (6)-(11), имеем $N = n\Phi + M$, причем либо $nS \subseteq M$, либо существует $s \in S$, что $ns = n + m, m \in M$. В первом случае имеем $ns_1 \in M$ для любого $s_1 \in S$. Применяя (6)-(11), получаем $ns_1 = ns_1^q = 0$ $(ns_1^q \overset{df}{=} nR_{s_1}^q)$. Ввиду критичности алгебры $S, n \in M, J_3 = M, J_3S = 0$. Во втором случае $(n + m)s = n + m$. Так как M– сердцевина алгебры S, то существует такой оператор $T \in R(S)$, что $(n + m)T = m_1 \in M, m_1 \neq 0$. С другой стороны, $n + m \in J_3$ и, следовательно, $m_1 = (n + m)T = (n + m)sT = (n + m)Ts = m_1s = 0$. Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен. Значит, $J_3S = J_4S = 0$, и алгебра S лежит в многообразии $\mathfrak{M}_2$. Лемма доказана.

□

Поскольку, многообразие задаваемое тождествами (6)-(11) локально конечно [9], то попутно мы показали, что тождества (6)-(11) образуют базис тождеств алгебры B по модулю тождества (1).

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, S*–критическая алгебра в многообразии* $\mathfrak{M}_2$. *Тогда либо* $S \in \mathfrak{M}_0$, *либо* $\operatorname{Var} S = \mathfrak{M}_2$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{M}_2 \setminus \mathfrak{M}_0$. Покажем, что $VarS = \mathfrak{M}_2$. Один из идеалов J_3, J_4, определенных в предыдущей лемме, ненулевой. Следовательно, сердцевина M алгебры S удовлетворяет равенству $MS = 0$, причем $J_3, J_4 \subseteq M$. Пусть N – минимальный подмодуль $R(S)$-модуля S/M. Тогда, как и ранее, $N = n\Phi + M$, причем либо $nS \subseteq M$, либо существует такой элемент s из S, что $ns = n + m$. Допустим для любого такого модуля выполняется первое соотношение. Покажем, что в этом случае $S^3 = 0$ и $S \in \mathfrak{M}_0$. Если S^2 не лежит в M, то найдутся такие $s_1, s_2 \in S, T \in R(S)$, что $s_1 s_2 T$ является порождающим некоторого минимального модуля N. Ввиду подпрямой неразложимости алгебры S существует $r \in S$, что $s_1 s_2 T r = m \in M, m \neq 0$. Имеем

$$0 \neq m = s_1 s_2 T r = s_1 (s_2 T)^q r = s_1 s_2 T (R_{s_2} T)^{q-1} r = 0,$$

так как $NS \subseteq M$. Полученное противоречие показывает, что $S^3 = 0$ и, следовательно, этот случай невозможен.

Рассмотрим второй случай. Так как $S = \Phi s + Ann_S N$, то существуют такие ненулевые элементы $r \in S, m \in M, n \in N$, что $ns = n, nr = m$. Пусть A– подалгебра алгебры S, порожденная элементами n, s, r, m. Покажем, что алгебра $\tilde{A} = \langle \tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{r}, \tilde{s} | \ \tilde{n}\tilde{s} = \tilde{n}, \tilde{n}\tilde{r} = \tilde{m}, \rangle_\Phi$ (остальные произведения базисных элементов равны нулю) лежит в многообразии $VarA$. Отметим, что алгебра $\tilde{A}$ изоморфна алгебре A_2. Изоморфизм задается отображением базисных элементов: $\tilde{n} \to v_1, \tilde{m} \to v_2, \tilde{s} \to e_{11}, \tilde{r} \to e_{12}$. Пусть многочлен

$$f = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{l} x_i f_i(x_1, ..., x_l)$$

является тождеством алгебры A. Подставляя в f элементы $x_i = m, x_j = 0$ ($j = \overline{1, l}, j \neq i$) получаем $\lambda_i = 0$. Значит, $f = \sum_{i=1}^{l} x_i f_i(x_1, ..., x_l)$. Сделаем подстановку $x_i := x_{l+1} x_{l+2} + x_i$. Имеем

$$f(x_1, ..., x_{l+1}x_{l+2} + x_i, ..., x_l) = f(x_1, ..., x_i, ..., x_l) + x_{l+1}x_{l+2} f_i(x_1, ..., x_i, ..., x_l).$$

Следовательно, многочлен $x_{l+1}x_{l+2} f_i(x_1, ..., x_i, ..., x_l)$ является тождеством алгебры A. Ясно, что последний многочлен, является также тождеством алгебры $\tilde{A}$. Значит, многочлен $z f_i(x_1, ..., x_i, ..., x_l)$ тождество алгебры $\tilde{A}$. Так как $f = \sum_{i=1}^{l} x_i f_i(x_1, ..., x_l)$, то и многочлен f является тождеством алгебры $\tilde{A}$. Значит, $\operatorname{Var} S \supseteq \operatorname{Var} A \supseteq \operatorname{Var} \tilde{A} = \mathfrak{M}_2$, и лемма доказана.

□

Лемма 3. *Решетка подмногообразий многообразия* $\mathfrak{M}_0$ *дистрибутивна.*

Доказательство. В многообразии $\mathfrak{M}_0$ выполняются тождества (1)$-$(5). Имеем

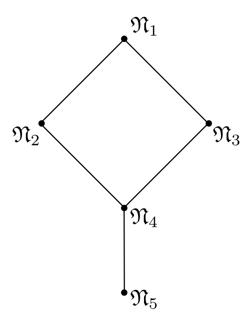
$$z x_1 x_2 = z x_1^q x_2 = z x_2 x_1^q = z x_2 x_1.$$

Следовательно, в многообразии $\mathfrak{M}_0$ выполняется тождество

$$z[x_1, x_2] = 0. \qquad (12)$$

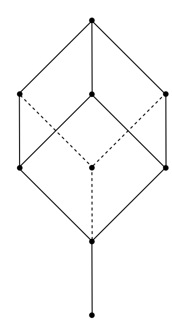
Пусть S– критическая алгебра в $\mathfrak{M}_0$, M– сердцевина алгебры S. Ввиду (12) имеем $M = m\Phi$. Если $MS = 0$, то как и в лемме 2 $S^3 = 0$. Если же $MS = M$, то существует $s \in S$, что $ms = m$. В этом случае $S = \Phi s + Ann_S M$. Пусть $v = wr$, где $w \in S, r \in Ann_S M$, и оператор $T \in R(S)$ такой, что $vT = m \in M$. Тогда $m = vT = wrT = w(rT)^q = m(rT)^{q-1} = 0$ и из подпрямой неразложимости алгебры S получаем, что $v = 0, Ann_S M = 0$. Покажем теперь, что $S^2 = M$. Если $S^2 \neq M$ и N– минимальный $R(S)$-подмодуль модуля S^2/M, то, как и ранее, $N = n\Phi + M$. Пусть $ns = \alpha n + \beta m$. Если $\alpha = 1$, то $ns^q = \alpha^q n + \beta(1 + \alpha + ... + \alpha^{q-1})m = \alpha n = ns$. Значит, в этом случае $\beta = 0$, и идеал, порожденный элементом n пересекается с M по нулю, что невозможно ввиду подпрямой неразложимости S. Если же $\alpha \neq 1$, то идеал, порожденный элементом $n + \dfrac{\beta}{\alpha - 1} m$ имеет нулевое пересечение с сердцевиной M алгебры S, что также невозможно. Следовательно, наше предположение неверно, и $S^2 = M$. Пусть теперь $t \in Ann_S M$. Если $ts = \beta m$, то $(t - \beta m)s = 0$ и $(t - \beta m)S = S(t - \beta m) = 0$. Значит, $t - \beta m \in M$ и $t \in M$. В результате имеем $S = m\Phi + s\Phi$. Пусть $s^2 = \alpha m$, тогда $(s - \alpha m)^2 = 0$, т. е. алгебра S изоморфна алгебре $\langle v_1, e_{11} \rangle_\Phi$. Изоморфизм задается отображением $m \to v_1, (s - \alpha m) \to e_{11}$.

Если $S^3 = 0$, то S–ассоциативная алгебра. Хорошо известно, и легко показать, что решетка ассоциативных Ф-алгебр с тождеством $xyz = 0$ имеет вид



где $\mathfrak{N}_1$– многообразие с тождеством $xyz = 0$; $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3$– многообразия коммутативных и антикоммутативных алгебр с этим тождеством (в случае характеристики 2 эти многообразия совпадают); $\mathfrak{N}_4$– многообразие ассоциативных Ф-алгебр с нулевым умножением, а $\mathfrak{N}_5$– тривиальное многообразие.

Наконец, решетка подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}_0$ имеет вид:



□

Лемма 2 утверждает, что интервал $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_2)$ решетки подмногообразий не содержит элементов отличных от $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_2$. В отличие от этого, интервал $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)$ устроен сложнее. Например, многообразия, порожденные алгебрами 1) $A_3 = \langle v_1, v_2+e_{11}, e_{21}\rangle_\Phi$, 2) $A_4 = \langle v_1, v_2+e_{21}, e_{11}\rangle_\Phi$, 3) $A_5 = \langle v_1, v_2+e_{31}, v_3-e_{21}, e_{11}\rangle_\Phi$, лежат в этом интервале и порождают различные многообразия.

Отметим, что алгебра A_3 удовлетворяет тождеству:

$$x_1[x_2, x_3]x_4 = x_4[x_2, x_3]x_1. \tag{13}$$

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{M}_3 = \operatorname{Var} A_3$ S*–критическая алгебра в многообразии* $\mathfrak{M}_3$. *Тогда либо* $S \in \mathfrak{M}_0$, *либо* $\operatorname{Var} S \simeq A_3$.

Доказательство. Пусть S – критическая алгебра из $\mathfrak{M}_3 \setminus \mathfrak{M}_0$. Покажем, что $S \simeq A_3$. Пользуясь тождествами (1) – (3) и применяя рассуждение, аналогичное приведенному в лемме 3, получаем, что $MS = M, S^2 = M = m\Phi$, S содержит подалгебру $m\Phi + s\Phi$, где $m^2 = s^2 = sm = 0, ms = m$. Если существуют элементы $r, t \in Ann_S M$ такие, что $sr = st = 0, rt = m$, то подстановка в (13) $x_1 = r, x_2 = t, x_3 = x_4 = s$ показывает, что тождество (13) на этих элементах не выполняется. Если же найдется такой элемент $r \in Ann_S M$, что $rs = m, sr = 0$, то $(r-m)s = s(r-m) = 0$, и алгебра S, ввиду предыдущего случая не критическая (идеал, порожденный элементом $r - m$ имеет нулевое пересечение с сердцевиной M). Так как $S \notin \mathfrak{M}_0$, то найдется $r \in Ann_S M$, что $sr = m$, причем если $sr' = m$, где $r' \in Ann_S M$, то $s(r - r') = 0$ и, ввиду неразложимости алгебры S и предыдущих случаев, $r = r'$. Следовательно, $S = \langle m, s, r\rangle_\Phi$. Если $rs = \alpha m$, то для $r' = r - \alpha m$ имеем $r's = (r-\alpha m)s = 0$. Если ${r'}^2 = \beta m$, то ${r''}^2 = (r' - \beta s)^2 = 0$. Алгебра $S = \langle m, s, r''\rangle_\Phi$ изоморфна A_3. Изоморфизм задается отображением $m \to v_1, s \to (v_2 + e_{11}), r'' \to e_{21}$.

□

Следствие. Тождество (13) является базисом тождеств алгебры A_3 внутри многообразия $\mathfrak{M}_1$.

Теорема 3. *Многообразие* $\mathfrak{M}_6$*, порожденное алгеброй* $A_6 = A_2 \oplus A_3$, *обладает следующими свойствами:*

1) не имеет конечного базиса тождеств;

2) почти кроссово;

3) является объединением двух кроссовых многообразий;

4) имеет дистрибутивную решетку подмногообразий.

Доказательство. Ввиду замечания, сделанного после леммы 1 и леммы 4, тождества (1), (6)-(11), (13) образуют базис тождеств алгебры A_6. Для доказательства теоремы, учитывая леммы 1-4, нам остается показать, что алгебра A_6 не имеет конечного базиса тождеств. Пусть $w_n = z[x_1, x_2]y_1 ... y_n[x_3, x_4]$. Достаточно проверить, что тождество $w_n = 0$ при $n > 2q$ не следует внутри многообразия $\mathfrak{P}$ из тождеств $(8) - (10), w_0, w_1, ..., w_{n-1}$ по модулю $(6), (7), (13)$. Доказательство последнего утверждения в точности повторяет соответствующее утверждение из [9], необходимо только убедиться, что тождество $w_n = 0$ при $n > 2q$ не следует внутри многообразия $\mathfrak{P}$ из тождеств (6), (7), (13). Рассмотрим алгебру $\langle v_1, v_2, v_3 + e_{11}, e_{12}, e_{31}\rangle_\Phi$. Нетрудно убедиться, что в этой алгебре выполняются тождества $(6), (7), (13)$. Подставим элементы $z = x_1 = y_1 = ... =$

$y_n = x_3 = v_3 + e_{11}, x_2 = e_{31}, x_4 = e_{12}$ в w_n. Получим $w_n(z, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, ..., y_n) = v_2 \neq 0$. Тем самым теорема доказана.

$\square$

References

[1] S. Oates, M.B. Powell *Identical relations in finite groups*, J.Algebra, **1**:1 (1964), 11–39.

[2] И.В. Львов, *О многообразиях ассоциативных колец, 1*, Алгебра и логика, **12**:3 (1973), 269–297.

[3] И.В. Львов, *О многообразиях ассоциативных колец, 2*, Алгебра и логика, **12**:6 (1973), 667–688.

[4] И.В. Львов, *О многообразиях, порожденных конечными альтернативными кольцами*,Алгебра и логика, **17**:3 (1978), 282–286.

[5] R.L. Kruse, *Identities satisfied by a finite rings* J.Algebra, **26**:2 (1973), 298–318.

[6] S.V. Polin, *Identities of finite algebras*, Sib. Math. J., **17**:6 (1976), 1356–1366.

[7] I.V. L'vov, *Finite-dimensional algebras with infinite bases of identities*, Sib. Math. J., **19**:1 (1978), 91–99.

[8] Ю.А. Медведев, *Кроссовы многообразия алгебр*, Матем. сб., **115**:3 (1980), 391–425.

[9] S.O. Macdonald, M.R. Vaughan-Lee, *Varieties that make one Cross*, J.Austral.Math.Soc., **26**:3 (1978), 368–382.

[10] I.M. Isaev, *Finite-dimensional right alternative algebras that do not generate finitely based varieties*, Algebra i Logika, **25**:2 (1986), 86–96.

[11] I.M. Isaev, *Essentially infinitely based varieties of algebras*, Sib. Math. J., **30**:6 (1989), 892–894.

[12] I.M. Isaev, *Finite algebras with no independent basis of identities*, Alg. Univ., 37, No. 4, (1997), 440-444.

[13] K.A. Baker, *Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class*, Advances in Math., 24, No. 3, (1997), 207-243.

[14] I.M. Isaev, *On the join of spechtian varieties of algebras*, Sib. Electron. math. izv., **15**:124 (2018), 1498–1505. 440-444.

[15] Ю.Н. Мальцев, Е.Н. Кузьмин *Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем*, Алгебра и логика, **17**:1 (1978), 28–32.

Ismail Musaevich Isaev
Altai State Pedagogical Univercity,
Molodeznaya st. 55,
656031, Barnaul, Russia
E-mail address: isaev@uni-altai.ru