

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №2, стр. 1299–1306 (2021)
DOI 10.33048/semi.2021.18.099УДК 512.552.4, 512.554.1
MSC 16R10, 17A30ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ КРОССОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ
АЛГЕБР

И.М. ИСАЕВ

ABSTRACT. We constructed the example of the join Cross varieties of algebras over a finite field which is not finitely based, but its proper subvarieties is finitely based.

Keywords: linear algebra, Cross variety, nonfinitely based variety of algebras.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Φ — конечное поле из q элементов. Многообразие \mathfrak{M} линейных Φ -алгебр называется конечно базируемым, если в классе всех линейных Φ -алгебр оно выделяется конечным набором тождеств (этот набор называется базисом тождеств многообразия \mathfrak{M}). Многообразие \mathfrak{M} называется кроссовым, если оно локально конечно, имеет конечный базис тождеств и конечное число критических алгебр. Хорошо известно, что всякая конечная группа [1] (Оутс и Пауэлл), конечное ассоциативное кольцо [2], [3], [5] (Львов, Крузе) порождают кроссово многообразие. Аналогичный результат является верным и в других классах колец, близких к ассоциативным [4], [8]. В то же время существуют примеры конечных колец и конечных линейных алгебр, не имеющих конечно базиса тождеств [6], [7], [9], [10], [11], [12]. Конечная алгебра, указанная в работе [9], не имеет конечно базиса тождеств, но порождает многообразие, имеющее конечное число подмногообразий. В частности, существует конечная линейная Φ -алгебра, порождающая почти кроссово многообразие. В этой работе мы строим пример двух конечных линейных Φ -алгебр, каждая из которых порождает кроссово многообразие, но объединение этих многообразий

не имеет конечного базиса тождеств (т.е. не является кроссовым). Это многообразия порождено 7-мерной Φ -алгеброй, причем подмногообразия этого многообразия образуют дистрибутивную решетку. Отметим, что согласно теореме Бейкера [13] всякая конечная алгебра в конгруэнц-дистрибутивном многообразии имеет конечный базис тождеств. Решетка подмногообразий произвольного конгруэнц-дистрибутивного многообразия дистрибутивна. Настоящий пример показывает, что в конгруэнц-перестановочном многообразии дистрибутивности решетки подмногообразий недостаточно для конечной базисуемости тождеств конечной алгебры. Отметим, что полученный результат является некоторым аналогом результата автора [14] об объединении шпехтовых многообразий алгебр.

2. МНОГООБРАЗИЕ ПОЛИНА И ПРИМЕР НЕ КОНЕЧНО БАЗИРУЕМОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ КРОССОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Пусть \mathfrak{F} — многообразие Φ -алгебр, удовлетворяющих тождеству

$$x(yz) = 0. \quad (1)$$

Тождества Φ -алгебр, удовлетворяющих тождеству (1) впервые рассмотрел в своей работе С. В. Полин [6]. Поэтому многообразия Φ -алгебр, удовлетворяющих тождеству (1), мы будем называть многообразием Полина. Рассмотрим свободную алгебру R этого многообразия от счетного числа порождающих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Произвольный одночлен алгебры R имеет вид $x_i R_{x_{i_1}} \dots R_{x_{i_k}}$, где R_x — оператор правого умножения на элемент x . Мы будем записывать этот одночлен следующим образом: $x_i x_{i_1} \dots x_{i_k}$. Как всегда $[x, y] = xy - yx$, и под записью элемента $x_1[x_2, x_3]x_4$ из R понимается следующее: $x_1[x_2, x_3]x_4 = x_1x_2x_3x_4 - x_1x_3x_2x_4$, и везде в аналогичных случаях коммутатор в R раскрывается таким же образом.

Пусть $\Phi(X)$ — свободная ассоциативная алгебра от множества порождающих X . Многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \in \Phi(X)$ будем называть тождеством некоторого пространства линейных преобразований E , если $f(e_1, \dots, e_n) = 0$ для любых $e_1, \dots, e_n \in E$. В данном случае E — подпространство $\text{End}_{\Phi} V$ для некоторого пространства V .

Пусть F — некоторое подмножество в $\Phi(X)$. Через $T(F)$ мы будем обозначать T -идеал алгебры $\Phi(X)$, порожденный множеством F , а через $L(F)$ обозначим идеал в $\Phi(X)$, порожденный множеством многочленов, полученных из F линейными заменами переменных.

Множество $F \subseteq \Phi(X)$ называется базисом тождеств пространства линейных преобразований E , если все тождества пространства E совпадают с идеалом $L(F)$.

В работе [7] рассматриваются алгебры вида $\bar{V} = V \oplus E$, где V — векторное пространство, $E \subseteq \text{End}_F V$ и умножение элементов \bar{V} определяются правилом $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = v_1e_2$ для $v_1, v_2 \in V$ и $e_1, e_2 \in E$ (под v_1e_2 понимается действие преобразования e_2 на вектор v_1). В этой работе доказано, что $\bar{V} \in \mathfrak{F}$ и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ лежит в идеале тождеств ассоциативного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \dots, R_{x_n})$ лежит в идеале тождеств алгебры \bar{V} [7]. В частности, верна следующая теорема

Теорема 1. Пусть $\bar{V} = V \oplus E$, $F = \{f_1(x_1, \dots, x_{n_1}), f_2(x_1, \dots, x_{n_2}), \dots\}$ – базис тождеств пространства E . Тогда множество

$$zF = \{zf_1(x_1, \dots, x_{n_1}), zf_2(x_1, \dots, x_{n_2}), \dots\}$$

является базисом тождеств алгебры \bar{V} в многообразии \mathfrak{F} в том и только в том случае, когда $L(F) = T(F)$.

Не конечно базлируемая алгебра B , определенная в работе [9], лежит в многообразии \mathfrak{F} и порождается тремя элементами a, b, c . Как векторное пространство над Φ , B имеет базис $a, b, c, ab, ac, abc, acb, abcb$, и ненулевые произведения элементов базиса задаются следующей таблицей:

	b	c
a	ab	ac
ab	ab	abc
ac	acb	ac
abc	abcb	abc
acb	acb	abc+acb-abcb
abcb	abcb	abc

Заметим, что алгебра B подпрямо разложима, а именно, идеалы $\langle ab - abcb \rangle_\Phi$, $\langle abc - abcb \rangle_\Phi$ в ней имеют нулевое пересечение. Изучая строение подпрямых компонент и разлагая их далее в подпрямые произведения, получаем в конце концов, что все подпрямо неразложимые факторы алгебры B вложимы в одну из алгебр $A_1 = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{21} \rangle_\Phi$ и $A_2 = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12} \rangle_\Phi$, ненулевые произведения базисных элементов которых задаются правилом: $v_i e_{ij} = v_j$. При этом существуют факторы, изоморфные A_1, A_2 . Следовательно, многообразие $\mathfrak{M} = \text{Var } B$ совпадает с многообразием, порожденным алгебрами $A_1 \oplus A_2$. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \text{Var } A_1$, $\mathfrak{M}_2 = \text{Var } A_2$ – многообразия, порожденные алгебрами A_1 и A_2 , соответственно.

Теорема 2. Не конечно базлируемое многообразие \mathfrak{M} является объединением двух кроссовых многообразий \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 .

Доказательство. Так как многообразие \mathfrak{M} содержит конечное число критических алгебр [9], то нам достаточно проверить конечную базлируемость многообразий \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 . Очевидно, что тождества

$$zx_1[x_2, x_3] = 0, \tag{2}$$

$$zx_1(x_2 - x_2^q) = 0, \tag{3}$$

выполняются в \mathfrak{M}_1 , а

$$z[x_1, x_2]x_3 = 0, \tag{4}$$

$$z(x_1 - x_1^q)x_2 = 0, \tag{5}$$

выполняются в \mathfrak{M}_2 . Пусть $E_1 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_\Phi$, $E_2 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_\Phi$. Стандартно проверяется (см. например, [15]), что многочлены

$$f_1 = x_1[x_2, x_3], g_1 = x_1(x_2 - x_2^q)$$

образуют базис тождеств пространства E_1 , а многочлены

$$f_2 = [x_1, x_2]x_3, g_2 = (x_1 - x_1^q)x_2$$

образуют базис тождеств пространства E_2 . Докажем, что $L(f_1, g_1) = T(f_1, g_1)$. Включение $L(f_1, g_1) \subseteq T(f_1, g_1)$ очевидно. Обратное включение получаем из следующих соотношений:

$$x_1[x_2x_4, x_3] = x_1x_2[x_4, x_3] + x_1[x_2x_3]x_4 \in L(f_1, g_1),$$

$$x_1(x_2x_3 - (x_2x_3)^q) = x_1x_2(x_3 - x_3^q) + x_1(x_2 - x_2^q)x_3^q + x_1(x_2^qx_3^q - (x_2x_3)^q) \in L(f_1, g_1).$$

Согласно теореме 1, равенства (2), (3) образуют базис тождеств многообразия \mathfrak{M}_1 внутри \mathfrak{F} . Аналогично, равенства (4), (5) образуют базис тождеств многообразия \mathfrak{M}_2 внутри \mathfrak{F} . \square

3. ПРИМЕР ПОЧТИ КРОССОВА МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР

Для построения почти кроссова многообразия нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. Пусть S – критическая алгебра многообразия \mathfrak{M} . Тогда либо $S \in \mathfrak{M}_1$, либо $S \in \mathfrak{M}_2$.

Доказательство. Заметим вначале следующее полезное утверждение, вытекающее из леммы Шура. Пусть N – неприводимый A -модуль, где A – ассоциативно-коммутативная алгебра, удовлетворяющая тождеству $x - x^q = 0$. Тогда либо $A/AnnN \simeq \Phi$, либо $A = AnnN$. В обоих случаях N является однопороченным A -модулем.

В многообразии \mathfrak{M} выполняются следующие тождества, указанные в [9]:

$$zx_1[x_2, x_3]x_4 = 0, \quad (6)$$

$$zx_1(x_2 - x_2^q)x_3 = 0, \quad (7)$$

$$z(x_1 - x_1^q)[x_2, x_3] = 0, \quad (8)$$

$$z[x_1, x_2](x_3 - x_3^q) = 0, \quad (9)$$

$$z(x_1 - x_1^q)(x_2 - x_2^q) = 0, \quad (10)$$

$$z[x_1, x_2]y_1 \dots y_k[x_3, x_4] = 0, k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Через $f(S)$ мы будем обозначать идеал алгебры S , порожденный всевозможными элементами вида $f(s_1, \dots, s_n)$, где $s_1, \dots, s_n \in S$.

Пусть $h_1 = zx_1[x_2, x_3]$, $h_2 = zx_1(x_2 - x_2^q)$, $h_3 = z[x_1, x_2]$, $h_4 = z(x_1 - x_1^q)$; S – критическая алгебра из \mathfrak{M} , $J_i = h_i(S)$, ($i = \overline{1, 4}$). Тогда, в соответствии с (6)–(11), $J_1S = J_2S = 0$. Если $J_1 = J_2 = 0$, то из доказательства теоремы 2 следует, что алгебра S лежит в многообразии \mathfrak{M}_1 . В противном случае, сердцевина M алгебры S удовлетворяет соотношению $MS = 0$. Покажем, что в этом случае $S \in \mathfrak{M}_2$. Если $J_3 = J_4 = 0$, то $J_1 = J_2 = 0$. Допустим, что идеал J_3 ненулевой. На идеале J_3/M алгебры S/M естественным образом определим структуру правого $R(S)$ -модуля, где $R(S)$ – алгебра правых умножений (с единицей) алгебры S . Пусть N – минимальный подмодуль модуля J_3/M . Тогда ввиду замечания в начале леммы и тождеств (6)–(11), имеем $N = n\Phi + M$, причем либо $nS \subseteq M$, либо существует $s \in S$, что $ns = n + m$, $m \in M$. В первом случае имеем $ns_1 \in M$ для любого $s_1 \in S$. Применяя (6)–(11), получаем $ns_1 = ns_1^q = 0$ ($ns_1^q \stackrel{df}{=} nR_{s_1}^q$). Ввиду критичности алгебры S , $n \in M$, $J_3 = M$, $J_3S = 0$. Во втором случае $(n + m)s = n + m$. Так как M – сердцевина алгебры S , то существует такой оператор $T \in R(S)$, что $(n + m)T = m_1 \in M$, $m_1 \neq 0$. С другой стороны, $n + m \in J_3$ и, следовательно, $m_1 = (n + m)T = (n + m)sT = (n + m)Ts = m_1s = 0$. Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен. Значит, $J_3S = J_4S = 0$, и алгебра S лежит в многообразии \mathfrak{M}_2 . Лемма доказана.

□

Поскольку, многообразие задаваемое тождествами (6)-(11) локально конечно [9], то попутно мы показали, что тождества (6)-(11) образуют базис тождеств алгебры B по модулю тождества (1).

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, S -критическая алгебра в многообразии \mathfrak{M}_2 . Тогда либо $S \in \mathfrak{M}_0$, либо $\text{Var } S = \mathfrak{M}_2$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{M}_2 \setminus \mathfrak{M}_0$. Покажем, что $\text{Var } S = \mathfrak{M}_2$. Один из идеалов J_3, J_4 , определенных в предыдущей лемме, ненулевой. Следовательно, сердцевина M алгебры S удовлетворяет равенству $MS = 0$, причем $J_3, J_4 \subseteq M$. Пусть N – минимальный подмодуль $R(S)$ -модуля S/M . Тогда, как и ранее, $N = n\Phi + M$, причем либо $nS \subseteq M$, либо существует такой элемент s из S , что $ns = n + m$. Допустим для любого такого модуля выполняется первое соотношение. Покажем, что в этом случае $S^3 = 0$ и $S \in \mathfrak{M}_0$. Если S^2 не лежит в M , то найдутся такие $s_1, s_2 \in S, T \in R(S)$, что $s_1 s_2 T$ является порождающим некоторого минимального модуля N . Ввиду подпрямой неразложимости алгебры S существует $r \in S$, что $s_1 s_2 T r = m \in M, m \neq 0$. Имеем

$$0 \neq m = s_1 s_2 T r = s_1 (s_2 T)^q r = s_1 s_2 T (R_{s_2} T)^{q-1} r = 0,$$

так как $NS \subseteq M$. Полученное противоречие показывает, что $S^3 = 0$ и, следовательно, этот случай невозможен.

Рассмотрим второй случай. Так как $S = \Phi s + \text{Ann}_S N$, то существуют такие ненулевые элементы $r \in S, m \in M, n \in N$, что $ns = n, nr = m$. Пусть A – подалгебра алгебры S , порожденная элементами n, s, r, m . Покажем, что алгебра $\tilde{A} = \langle \tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{r}, \tilde{s} \mid \tilde{n}\tilde{s} = \tilde{n}, \tilde{n}\tilde{r} = \tilde{m} \rangle_\Phi$ (остальные произведения базисных элементов равны нулю) лежит в многообразии $\text{Var } A$. Отметим, что алгебра \tilde{A} изоморфна алгебре A_2 . Изоморфизм задается отображением базисных элементов: $\tilde{n} \rightarrow v_1, \tilde{m} \rightarrow v_2, \tilde{s} \rightarrow e_{11}, \tilde{r} \rightarrow e_{12}$. Пусть многочлен

$$f = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^l x_i f_i(x_1, \dots, x_l)$$

является тождеством алгебры A . Подставляя в f элементы $x_i = m, x_j = 0$ ($j = \overline{1, l}, j \neq i$) получаем $\lambda_i = 0$. Значит, $f = \sum_{i=1}^l x_i f_i(x_1, \dots, x_l)$. Сделаем подстановку $x_i := x_{l+1} x_{l+2} + x_i$. Имеем

$$f(x_1, \dots, x_{l+1} x_{l+2} + x_i, \dots, x_l) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_l) + x_{l+1} x_{l+2} f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_l).$$

Следовательно, многочлен $x_{l+1} x_{l+2} f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_l)$ является тождеством алгебры A . Ясно, что последний многочлен, является также тождеством алгебры \tilde{A} . Значит, многочлен $z f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_l)$ тождество алгебры \tilde{A} . Так как $f = \sum_{i=1}^l x_i f_i(x_1, \dots, x_l)$, то и многочлен f является тождеством алгебры \tilde{A} . Значит, $\text{Var } S \supseteq \text{Var } A \supseteq \text{Var } \tilde{A} = \mathfrak{M}_2$, и лемма доказана.

□

Лемма 3. Решетка подмногообразий многообразия \mathfrak{M}_0 дистрибутивна.

Доказательство. В многообразии \mathfrak{M}_0 выполняются тождества (1)–(5). Имеем

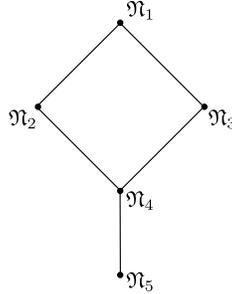
$$zx_1 x_2 = zx_1^q x_2 = zx_2 x_1^q = zx_2 x_1.$$

Следовательно, в многообразии \mathfrak{M}_0 выполняется тождество

$$z[x_1, x_2] = 0. \tag{12}$$

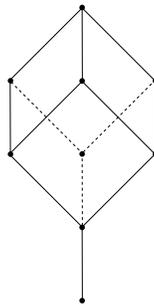
Пусть S – критическая алгебра в \mathfrak{M}_0 , M – сердцевина алгебры S . Ввиду (12) имеем $M = m\Phi$. Если $MS = 0$, то как и в лемме 2 $S^3 = 0$. Если же $MS = M$, то существует $s \in S$, что $ms = m$. В этом случае $S = \Phi s + Ann_S M$. Пусть $v = wr$, где $w \in S, r \in Ann_S M$, и оператор $T \in R(S)$ такой, что $vT = m \in M$. Тогда $m = vT = wrT = w(rT)^q = m(rT)^{q-1} = 0$ и из подпрямой неразложимости алгебры S получаем, что $v = 0, Ann_S M = 0$. Покажем теперь, что $S^2 = M$. Если $S^2 \neq M$ и N – минимальный $R(S)$ -подмодуль модуля S^2/M , то, как и ранее, $N = n\Phi + M$. Пусть $ns = \alpha n + \beta m$. Если $\alpha = 1$, то $ns^q = \alpha^q n + \beta(1 + \alpha + \dots + \alpha^{q-1})m = \alpha n = ns$. Значит, в этом случае $\beta = 0$, и идеал, порожденный элементом n пересекается с M по нулю, что невозможно ввиду подпрямой неразложимости S . Если же $\alpha \neq 1$, то идеал, порожденный элементом $n + \frac{\beta}{\alpha - 1}m$ имеет нулевое пересечение с сердцевиной M алгебры S , что также невозможно. Следовательно, наше предположение неверно, и $S^2 = M$. Пусть теперь $t \in Ann_S M$. Если $ts = \beta m$, то $(t - \beta m)s = 0$ и $(t - \beta m)S = S(t - \beta m) = 0$. Значит, $t - \beta m \in M$ и $t \in M$. В результате имеем $S = m\Phi + s\Phi$. Пусть $s^2 = \alpha m$, тогда $(s - \alpha m)^2 = 0$, т. е. алгебра S изоморфна алгебре $\langle v_1, e_{11} \rangle_\Phi$. Изоморфизм задается отображением $m \rightarrow v_1, (s - \alpha m) \rightarrow e_{11}$.

Если $S^3 = 0$, то S –ассоциативная алгебра. Хорошо известно, и легко показать, что решетка ассоциативных Φ -алгебр с тождеством $xyz = 0$ имеет вид



где \mathfrak{N}_1 – многообразие с тождеством $xyz = 0$; \mathfrak{N}_2 и \mathfrak{N}_3 – многообразия коммутативных и антикоммутативных алгебр с этим тождеством (в случае характеристики 2 эти многообразия совпадают); \mathfrak{N}_4 – многообразие ассоциативных Φ -алгебр с нулевым умножением, а \mathfrak{N}_5 – тривиальное многообразие.

Наконец, решетка подмногообразий многообразия \mathfrak{M}_0 имеет вид:



□

Лемма 2 утверждает, что интервал $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_2)$ решетки подмногообразий не содержит элементов отличных от $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_2$. В отличие от этого, интервал

$$(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)$$

устроен сложнее. Например, многообразия, порожденные алгебрами

- 1) $A_3 = \langle v_1, v_2 + e_{11}, e_{21} \rangle_{\Phi}$,
- 2) $A_4 = \langle v_1, v_2 + e_{21}, e_{11} \rangle_{\Phi}$,
- 3) $A_5 = \langle v_1, v_2 + e_{31}, v_3 - e_{21}, e_{11} \rangle_{\Phi}$,

лежат в этом интервале и порождают различные многообразия.

Отметим, что алгебра A_3 удовлетворяет тождеству:

$$x_1[x_2, x_3]x_4 = x_4[x_2, x_3]x_1. \tag{13}$$

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{M}_3 = \text{Var } A_3$ S -критическая алгебра в многообразии \mathfrak{M}_3 . Тогда либо $S \in \mathfrak{M}_0$, либо $\text{Var } S \simeq A_3$.

Доказательство. Пусть S – критическая алгебра из $\mathfrak{M}_3 \setminus \mathfrak{M}_0$. Покажем, что $S \simeq A_3$. Пользуясь тождествами (1) – (3) и применяя рассуждение, аналогичное приведенному в лемме 3, получаем, что $MS = M, S^2 = M = m\Phi, S$ содержит подалгебру $m\Phi + s\Phi$, где $m^2 = s^2 = sm = 0, ms = m$. Если существуют элементы $r, t \in \text{Ann}_S M$ такие, что $sr = st = 0, rt = m$, то подстановка в (13) $x_1 = r, x_2 = t, x_3 = x_4 = s$ показывает, что тождество (13) на этих элементах не выполняется. Если же найдется такой элемент $r \in \text{Ann}_S M$, что $rs = m, sr = 0$, то $(r - m)s = s(r - m) = 0$, и алгебра S , ввиду предыдущего случая не критическая (идеал, порожденный элементом $r - m$ имеет нулевое пересечение с сердцевинной M). Так как $S \notin \mathfrak{M}_0$, то найдется $r \in \text{Ann}_S M$, что $sr = m$, причем если $sr' = m$, где $r' \in \text{Ann}_S M$, то $s(r - r') = 0$ и, ввиду неразложимости алгебры S и предыдущих случаев, $r = r'$. Следовательно, $S = \langle m, s, r \rangle_{\Phi}$. Если $rs = \alpha m$, то для $r' = r - \alpha m$ имеем $r's = (r - \alpha m)s = 0$. Если $r'^2 = \beta m$, то $r''^2 = (r' - \beta s)^2 = 0$. Алгебра $S = \langle m, s, r'' \rangle_{\Phi}$ изоморфна A_3 . Изоморфизм задается отображением $m \rightarrow v_1, s \rightarrow (v_2 + e_{11}), r'' \rightarrow e_{21}$.

□

Следствие. Тождество (13) является базисом тождеств алгебры A_3 внутри многообразия \mathfrak{M}_1 .

Теорема 3. Многообразие \mathfrak{M}_6 , порожденное алгеброй $A_6 = A_2 \oplus A_3$, обладает следующими свойствами:

- 1) не имеет конечного базиса тождеств;
- 2) почти кроссово;
- 3) является объединением двух кроссовых многообразий;
- 4) имеет дистрибутивную решетку подмногообразий.

Доказательство. Ввиду замечания, сделанного после леммы 1 и леммы 4, тождества (1), (6)-(11), (13) образуют базис тождеств алгебры A_6 . Для доказательства теоремы, учитывая леммы 1-4, нам остается показать, что алгебра A_6 не имеет конечного базиса тождеств. Пусть $w_n = z[x_1, x_2]y_1 \dots y_n[x_3, x_4]$. Достаточно проверить, что тождество $w_n = 0$ при $n > 2q$ не следует внутри многообразия \mathfrak{P} из тождеств (8) – (10), w_0, w_1, \dots, w_{n-1} по модулю (6), (7), (13). Доказательство последнего утверждения в точности повторяет соответствующее утверждение из [9], необходимо только убедиться, что тождество $w_n = 0$

при $n > 2q$ не следует внутри многообразия \mathfrak{F} из тождеств (6), (7), (13). Рассмотрим алгебру $\langle v_1, v_2, v_3 + e_{11}, e_{12}, e_{31} \rangle_{\Phi}$. Нетрудно убедиться, что в этой алгебре выполняются тождества (6), (7), (13). Подставим элементы $z = x_1 = y_1 = \dots = y_n = x_3 = v_3 + e_{11}, x_2 = e_{31}, x_4 = e_{12}$ в w_n . Получим

$$w_n(z, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, \dots, y_n) = v_2 \neq 0.$$

Тем самым теорема доказана. □

REFERENCES

- [1] S. Oates, M.B. Powell, *Identical relations in finite groups*, J. Algebra, **1**:1 (1964), 11–39. Zbl 0121.27202
- [2] I.V. L'vov, *Varieties of associative rings, I*, Algebra Logik, **12**:3 (1974), 150–167. Zbl 0288.16008
- [3] I.V. L'vov, *Varieties of associative rings, II*, Algebra Logik, **12**:6 (1975), 381–393. Zbl 0293.16017
- [4] I.V. L'vov, *Varieties generated by finite alternative rings*, Algebra Logik, **17**:3 (1979), 195–198. Zbl 0414.17009
- [5] R.L. Kruse, *Identities satisfied by a finite rings*, J. Algebra, **26**:2 (1973), 298–318. Zbl 0276.16014
- [6] S.V. Polin, *About identities of finite algebras*, Sib. Math. J., **17**:6 (1976), 1356–1366. Zbl 0353.17003
- [7] I.V. L'vov, *Finite dimensional algebras with infinite bases of identities*, Sib. Math. J., **19**:1 (1978), 91–99. Zbl 0388.16014
- [8] Yu.A. Medvedev, *Cross varieties of algebras*, Math. USSR, Sb., **43**:3 (1982), 347–376. Zbl 0489.17001
- [9] S.O. MacDonald, M.R. Vaughan-Lee, *Varieties that make one Cross*, J. Aust. Math. Soc., Ser. A, **26**:3 (1978), 368–382. Zbl 0393.17001
- [10] I.M. Isaev, *Finite-dimensional right alternative algebras that do not generate finitely based varieties*, Algebra Logik, **25**:2 (1986), 86–96. Zbl 0618.17010
- [11] I.M. Isaev, *Essentially infinitely based varieties of algebras*, Sib. Math. J., **30**:6 (1989), 892–894. Zbl 0725.17002
- [12] I.M. Isaev, *Finite algebras with no independent basis of identities*, Algebra Univers., **37**:4 (1997), 440–444. Zbl 0903.08014
- [13] K.A. Baker, *Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class*, Adv. Math., **24**:3, (1977), 207–243. Zbl 0356.08006
- [14] I.M. Isaev, *On the join of Spechtian varieties of algebras*, Sib. Électron. Math. Izv., **15** (2018), 1498–1505. Zbl 1433.16025
- [15] Yu.N. Mal'tsev, E.N. Kuz'min, *A basis for the identities of the algebra of second-order matrices over a finite field*, Algebra Logik, **17**:1 (1978), 18–21. Zbl 0395.16014

ISMAIL MUSAEVICH ISAEV
 ALTAI STATE PEDAGOGICAL UNIVERCITY,
 55, MOLODEZNAYA STR.,
 BARNaul, 656031, RUSSIA
 Email address: isaev@uni-altai.ru