S⓮MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 758–781 (2021) УДК 512.542.7, 519.17
DOI 10.33048/semi.2021.18.056 MSC 05B25, 05E18

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЕРШИННО-ТРАНЗИТИВНЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ НАКРЫТИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

Л.Ю. ЦИОВКИНА

Abstract. In this paper, we investigate the problem of classification of abelian antipodal distance-regular graphs Γ of diameter three with the following property $(*)$: there is a vertex-transitive group of automorphisms G of Γ which induces an almost simple primitive permutation group G^{Σ} on the set Σ of antipodal classes of Γ. This problem has been recently solved in the case when the permutation rank $\mathrm{rk}(G^{\Sigma})$ of G^{Σ} equals 2 (which implies classification of all arc-transitive representatives). Here we start to study the next case $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 3$. We elaborate a method of reduction to *minimal* quotients of Γ, which gives us a base for a classification scheme that depends on a type of such quotient. By analysing equitable partitions of Γ which arise as collections of orbits of some subgroups of G, we obtain several strong restrictions on spectra and parameters of Γ as well as a description of its minimal quotients. This allows us to settle the case when the socle of G^{Σ} is a sporadic simple group.

Keywords: distance-regular graph, antipodal cover, abelian cover, vertex-transitive graph, rank 3 group.

1. Введение

Одной из центральных проблем теории дистанционно регулярных графов является проблема восстановления антиподальных дистанционно регулярных графов по их антиподальным частным. Если восстанавливаемый граф имеет

Tsiovkina, L.Yu., On a class of vertex-transitive distance-regular covers of complete graphs.

© 2021 Циовкина Л.Ю.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-00122).

Поступила 16 марта 2021 г., опубликована 2 июля 2021 г.

диаметр не больше 2, то он либо является полным графом, либо полным многодольным графом с долями одинаковых порядков. Но уже в случае, когда его диаметр равен 3, указанная проблема оказывается практически неразрешимой: такие графы являются антиподальными накрытиями полных графов и не имеют универсальной конструкции.

Дистанционно регулярное антиподальное накрытие полного графа K_n эквивалентно определяется как связный граф, множество вершин которого допускает разбиение на множество из n блоков одинакового размера $r \geq 2$ такое, что каждый блок индуцирует r-коклику, объединение любых двух различных блоков индуцирует совершенное паросочетание, и любые две несмежные вершины, лежащие в разных блоках, имеют ровно $\mu \geq 1$ общих соседей. Следуя [11], такой граф мы будем кратко называть (n, r, μ)-накрытием.

При исследовании проблемы построения (n, r, μ)-накрытий одной из основных задач является задача классификации графов, обладающих транзитивными группами автоморфизмов. Тот факт, что каждый такой граф допускает теоретико-групповую характеризацию, позволяет надеяться на получение новых конструкций и полного описания отдельных, представляющих интерес, классов (n, r, μ)-накрытий. Обзор по исследованию проблемы построения можно найти в [14].

Настоящая работа посвящена исследованию задачи классификации абелевых (в смысле Годсила и Хензеля) (n, r, μ)-накрытий Γ, обладающих следующим свойством:

($*$) Γ *имеет транзитивную группу автоморфизмов G, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ его антиподальных классов.*

При этом мы будем полагать, что G совпадает с полным прообразом группы G^Σ в $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Эта задача недавно была решена для случая, когда подстановочный ранг $\mathrm{rk}(G^\Sigma)$ группы G^Σ равен 2 (напомним, ранг группы подстановок на множестве — это число ее орбит относительно действия, индуцируемого ею на декартовом квадрате данного множества), см. обзор в [17]. Отметим, что класс графов Γ со свойством ($*$), удовлетворяющих данному условию на ранг, состоит только из реберно симметричных графов и включает несколько бесконечных семейств.

Целью данной работы является изучение класса абелевых (n, r, μ)-накрытий Γ со свойством ($*$) в случае, когда $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Для этого мы разрабатываем метод редукции к *минимальным* частным графа Γ, который позволяет классифицировать графы Γ в зависимости от типа такого частного. Исследуя равномерные разбиения множества вершин графа Γ, которые возникают как разбиения на множество орбит некоторых подгрупп группы G, мы получаем ряд существенных ограничений на спектр и параметры графа Γ, а также классифицируем его минимальные частные. На основе полученных результатов мы решаем исследуемую задачу при условии, что цоколь группы G^Σ является спорадической простой группой. При этом мы используем классификацию примитивных групп подстановок ранга 3 соответствующего типа [3, Ch.11].

Данная статья устроена следующим образом. В разделе 2 приводятся некоторые необходимые определения и вспомогательные результаты. В разделе 3 доказывается предложение 2, которое позволяет свести классификацию графов

Γ со свойством $(*)$ к рассмотрению некоторых специальных видов (n,r,μ)-накрытий, называемых минимальными, для произвольного $\mathrm{rk}(G^{\Sigma})$. В разделе 4 устанавливаются некоторые общие свойства абелевых (n,r,μ)-накрытий при условии $\mathrm{rk}(G^{\Sigma})=3$ и доказывается теорема 1, которая дает ограничения на спектр и параметры абелевых (n,r,μ)-накрытий, допускающих некоторые равномерные разбиения. Раздел 5 посвящен описанию абелевых минимальных (n,r,μ)-накрытий Γ со свойством $(*)$ таких, что $\mathrm{rk}(G^{\Sigma})=3$ (предложения 3 и 4). В нем мы, в частности, доказываем, что если полный прообраз группы $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ в G не является квазипростой группой, то выполнено хотя бы одно из следующих утверждений: (i) Γ имеет вершинно-транзитивную группу автоморфизмов, изоморфную группе $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$, (ii) Γ является графом Тейлора (и его параметры n, r и μ могут быть выражены при помощи параметров графов ранга 3, ассоциированных с G^{Σ}), (iii) $\mathrm{rk}(\mathrm{Soc}(G^{\Sigma}))>3$, (iv) степень $\mathrm{d_{min}}(\mathrm{Soc}(G^{\Sigma}))$ минимального подстановочного представления группы $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ не превосходит числа r. Затем мы уточняем строение группы $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$, а также параметры и спектр графа Γ при условии, что группа G квазипроста. Совокупность полученных результатов позволяет нам получить классификацию абелевых (n,r,μ)-накрытий Γ со свойством $(*)$ при условии, что $\mathrm{rk}(G^{\Sigma})=3$ и $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ является спорадической простой группой в заключительном разделе 6 (теорема 2 и следствие 1).

2. Определения и вспомогательные результаты

Всюду в работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Связный граф называется *антиподальным*, если отношение «совпадать или быть на максимальном расстоянии» на множестве его вершин является эквивалентностью, а классы этого отношения называются *антиподальными классами* графа. Каждому антиподальному графу можно поставить в соответствие его *антиподальное частное*, то есть граф на множестве антиподальных классов исходного графа, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие классы соединены ребром. Если граф Γ антиподален и любые два его антиподальных класса образуют коклику или совершенное паросочетание, то говорят, что Γ является *антиподальным r-накрытием* своего антиподального частного, где r — это порядок антиподального класса.

Пусть Γ — граф, $\mathcal{V}(\Gamma)$ — множество его вершин и d_Γ — его естественная метрика. Для любого $i\geq 1$ и $a\in\mathcal{V}(\Gamma)$ через $\Gamma_i(a)$ обозначается *i-окрестность вершины a*, то есть подграф, индуцированный множеством $\{b\in\mathcal{V}(\Gamma)|d_\Gamma(a,b)=i\}$, а через Γ_i — граф на $\mathcal{V}(\Gamma)$, ребрами которого являются пары вершин $\{a,b\}$ с $d_\Gamma(a,b)=i$. Если для любой вершины a графа Γ число $k:=|\Gamma_1(a)|$ постоянно, то граф называется *регулярным степени k*, а число k обозначается через $\deg\Gamma$. В случае, если число 3-циклов, в которых лежит заданное ребро графа Γ, не зависит от выбора этого ребра, то это число мы обозначаем через $\lambda(\Gamma)$. Через $\mathcal{A}(\Gamma)$ мы будем обозначать множество $\{(a,b)\in\mathcal{V}(\Gamma)^2|d_\Gamma(a,b)=1\}$, элементы которого называются *дугами* графа Γ (таким образом, каждому ребру $\{a,b\}$ соответствуют две дуги (a,b) и (b,a)). Если Γ — связный граф диаметра d и для любого $0\leq i\leq d$ существуют константы b_i,a_i и c_i, такие, что для любой пары вершин x и y графа Γ, находящихся на расстоянии i, среди соседей вершины y найдется ровно b_i вершин, находящихся на расстоянии $i{+}1$ от вершины x, ровно

a_i вершин, находящихся на расстоянии i от вершины x, и ровно c_i вершин, находящихся на расстоянии $i-1$ от вершины x, то граф Γ называется *дистанционно регулярным* (при этом полагается, что $b_d = c_0 = 0$), а последовательность параметров $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ называется его *массивом пересечений*. По теореме Смита (см. [2]), каждый *импримитивный* дистанционно регулярный граф (т.е. д.р.г. Γ с несвязным графом Γ_i для некоторого $1 < i \leq d(\Gamma)$) степени не меньше трех является двудольным или антиподальным.

Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3. Тогда Γ — антиподальное r-накрытие полного графа на $k+1$ вершинах, Γ имеет (см. [2]) массив пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$. При этом справедливо тождество $k - r\mu - 1 = \lambda - \mu$, где через λ обозначается параметр $a_1 = \lambda(\Gamma)$. Впоследствии мы будем называть такой граф Γ просто $(k+1, r, \mu)$-накрытием. Напомним, что $(k+1, r, \mu)$-накрытия с $r = 2$ эквивалентны неполным регулярным два-графам (см. [2, Proposition 1.5.1]) и называются *графами Тейлора*. При этом $(k+1, r, \mu)$-накрытия с $r = 2$ и $\mu = k-1$ — это в точности двудольные $(k+1, r, \mu)$-накрытия (все они известны и получаются единственным образом как дополнительный граф к $2 \times (k+1)$-решетке).

Пусть G — конечная группа подстановок на множестве Ω и $\Lambda \subseteq \Omega$. Множества $G_{\{\Lambda\}} = \{g \in G | \Lambda^g = \Lambda\}$ и $G_\Lambda = \{g \in G | x^g = x$ для всех $x \in \Lambda\}$ образуют две подгруппы в G, которые называются соответственно *глобальным стабилизатором* и *поточечным стабилизатором* множества Λ в G. Если $g \in G_{\{\Lambda\}}$, то говорят, что g фиксирует Λ как множество; в частности, если $g \in G_\Lambda$, то g фиксирует Λ поточечно. Если Λ — G-инвариантное множество, т.е. $G = G_{\{\Lambda\}}$, то через G^Λ обозначается группа подстановок, индуцируемая группой G на Λ, таким образом, $G^\Lambda \simeq G/G_\Lambda$.

Через $\mathcal{CG}(\Gamma)$ мы будем обозначать группу всех автоморфизмов $(k+1, r, \mu)$-накрытия Γ, фиксирующих как множество каждый его антиподальный класс. Ввиду [11] для любой нетривиальной подгруппы N из $\mathcal{CG}(\Gamma)$ порядка, меньшего чем r, *частное* Γ^N (определяемое как граф на множестве N-орбит, в котором две орбиты смежны, если между ними имеется ребро графа Γ) является $(k+1, r/|N|, \mu|N|)$-накрытием. Если группа $\mathcal{CG}(\Gamma)$ абелева и действует регулярно на (каждом) антиподальном классе, то Γ называется *абелевым* $(k+1, r, \mu)$-*накрытием* (см. [11]).

В следующем предложении мы приводим некоторые известные свойства недвудольных $(k+1, r, \mu)$-накрытий, которые применяются в дальнейших рассуждениях.

Предложение 1. *Пусть Γ — недвудольное $(k+1, r, \mu)$-накрытие с собственными значениями $k > n > -1 > -m$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- *(i)* $1 \leq (r-1)\mu \leq k-1 \leq \mu(2r-1) - 2$ *(см. [2, 11]);*
- *(ii) кратности собственных значений n и $-m$ равны $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$ и $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$ соответственно (см. [2, 11]);*
- *(iii) если $\lambda \neq \mu$, то числа n и m — целые, $k = nm$, $r\mu = (m-1)(n+1)$ и $\lambda = \mu + n - m$ (см. [2, 11]);*
- *(iv) если $r > 2$, то $m \leq n^2$ (см. [2, 10]);*
- *(v) если k — нечетно, то μ — четно [11];*
- *(vi) если $\lambda = 0$, то $r - 2 > \sqrt{\mu}$ [8];*

(*vii*) *если* $\mathcal{CG}(\Gamma) \neq 1$ *и числа* n, m *— целые, то* $n+m$ *делит* $(k+1)\gcd(n,m)$ (*см., например,* [21, лемма 3], [16, Lemma 5])*;*

(*viii*) *если* $\mathcal{CG}(\Gamma)$ *— абелева группа порядка* r*, то каждый простой делитель числа* r *делит и число* $k+1$ [12, Theorem 2.5].

Далее, если G — транзитивная группа подстановок на конечном множестве Ω и $\mathrm{O}rb_2(G)$ — множество орбиталов группы G на Ω (то есть орбит группы G относительно действия, индуцируемого ею на декартовом квадрате $\Omega \times \Omega$), то число $|\mathrm{O}rb_2(G)|$ называется (*подстановочным*) *рангом* группы G и обозначается через $\mathrm{rk}(G)$. Если $Q \in \mathrm{O}rb_2(G)$, то через Q^* обозначается орбитал, спаренный с Q; при этом если $Q^* = Q$ и $a \in \Omega$, то через $Q(a)$ обозначается множество всех точек $b \in \Omega$ таких, что $(a,b) \in Q$.

Если группа автоморфизмов G графа Γ транзитивна на множестве его вершин, то мы будем говорить, что Γ является *G-вершинно-транзитивным графом.* В случае, если группа автоморфизмов графа Γ действует транзитивно на $\mathcal{A}(\Gamma)$, то Γ называется *реберно симметричным*; если к тому же граф Γ связен и обладает группой автоморфизмов, которая для любого $1 \le i \le d(\Gamma)$ действует транзитивно на $\mathcal{A}(\Gamma_i)$, то Γ называется *дистанционно-транзитивным.* Из определения понятно, что каждый дистанционно-транзитивный граф является дистанционно регулярным. Дистанционно-транзитивный граф Γ диаметра 2 называется *графом ранга* 3 (*с параметрами* (v, b_0, a_1, c_2)), где $v = |\mathcal{V}(\Gamma)|$, при этом параметр c_2 обозначается также через $\mu(\Gamma)$.

Пусть G — это конечная группа. Через $\mathrm{Soc}(G)$, $Z(G)$ и G' обозначаются соответственно цоколь, центр и коммутант группы G. Если $G = G'$, то через $\mathrm{M}(G)$ обозначается мультипликатор Шура группы G. Если $G \neq 1$, то мы также полагаем $\mathrm{d}_{\min}(G) = |G : H|$, где H — собственная подгруппа в G наименьшего индекса. Если H и G — две группы и H изоморфно вкладывается в G, то в случае, когда это ясно из контекста, мы будем использовать запись $H \le G$; в частности, если H является нормальной подгруппой в G, то этот факт обозначается как $H \trianglelefteq G$.

Остальные обозначения и понятия, используемые в статье, в основном, стандартны и могут быть найдены в [1, 2].

3. Редукция к минимальным частным

Здесь мы докажем предварительный результат, который позволяет свести классификацию графов со свойством $(*)$ к рассмотрению $(k+1, r, \mu)$-накрытий некоторых специальных типов.

Предложение 2. *Пусть* Γ *— недвудольное* $(k+1, r, \mu)$*-накрытие и* Σ *— множество его антиподальных классов. Предположим, что* Γ *имеет транзитивную группу автоморфизмов* G_1*, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок* ${G_1}^{\Sigma}$ *на* Σ *и* $T = \mathrm{Soc}({G_1}^{\Sigma})$*. Пусть* G *— полный прообраз группы* T *в* G_1 *и* K *— ядро действия группы* G *на* Σ*. Тогда* K *содержит нормальную в* G_1 *подгруппу* N*, удовлетворяющую одному из следующих условий (ниже при помощи символа* $\bar{\ }$ *обозначается факторизация по* N*):*

(T1) $\overline{K} \simeq E_{p^l}$ *— элементарная абелева группа экспоненты* p *и либо*

  (*i*) $\overline{G} = \overline{K} \times \overline{G}'$ *и* $\overline{G}' \simeq T$*, либо*

  (*ii*) $\overline{G}$ *— квазипростая группа с центром* $\overline{K}$*;*

(T2) $\overline{K} \simeq E_{p^l}$ — *элементарная абелева группа экспоненты* p, T *действует точно на* $\overline{K}$, *т.е.* $T \leq GL_l(p)$, *и содержит собственную подгруппу индекса, не превосходящего числа* $\frac{p^l-1}{p-1}$;

(T3) $\overline{K} \simeq S^l$, *где* S — *простая неабелева группа, и либо*

(*i*) $\overline{G} = \overline{K} \times C_{\overline{G}}(\overline{K})$ *и* $C_{\overline{G}}(\overline{K}) \simeq T$, *либо*

(*ii*) $\overline{G} \leq \mathrm{Aut}(\overline{K})$ *и* T *содержит собственную подгруппу индекса, делящего* l.

Доказательство. Обозначим через K_1 ядро действия группы G_1 на Σ. По условию группа $G^\Sigma = T \simeq G/K$ — простая. Так как $GK_1 \trianglelefteq G_1$ и $GK_1/K_1 \simeq G/K$, то по выбору G мы имеем $K_1 = K \leq G$. Заметим, что для любой подгруппы $X \leq K$ такой, что $|X| < r$ и $X \trianglelefteq G_1$ частное Γ^X графа Γ является $(k+1, r/|X|, \mu|X|)$-накрытием, которое допускает транзитивную на вершинах группу автоморфизмов G_1/X.

Пусть N — максимальная нормальная в G_1 собственная подгруппа группы K. Далее для подгруппы $X \leq G_1$ через $\overline{X}$ мы будем обозначать образ X относительно естественного гомоморфизма из G_1 на G_1/N. Таким образом, $\overline{K}$ — характеристически простая группа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой в $\overline{G_1}$. Так как $C_{\overline{G}}(\overline{K}) = C_{\overline{G_1}}(\overline{K}) \cap \overline{G} \trianglelefteq \overline{G_1}$, то ввиду примитивности G_1 на Σ группа $C_{\overline{G}}(\overline{K})$ либо действует транзитивно на Σ, либо фиксирует Σ поточечно.

<u>Случай $\overline{K} \simeq E_{p^l} = (\mathbb{Z}_p)^l$.</u> В этом случае мы имеем либо $\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{K})$, либо $\overline{K} = C_{\overline{G}}(\overline{K})$.

Пусть $\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{K})$. Очевидно, это равносильно тому, что $Z(\overline{G}) = \overline{K}$. Предположим, что $\overline{G}' < \overline{G}$. Тогда $\overline{K} \not\leq \overline{G}'$, подгруппа $\overline{G}' \cap \overline{K} < \overline{K}$ нормальна в $\overline{G_1}$ и по выбору N мы получаем $\overline{G}' \cap \overline{K} = 1$, а поскольку $\overline{G}' \neq 1$, то $\overline{G}' \simeq G/K$.

Отсюда либо $\overline{G} = Z(\overline{G}) \times \overline{G}' = \overline{K} \times G/K$, либо $\overline{G}$ — квазипростая группа.

Пусть теперь $\overline{K} = C_{\overline{G}}(\overline{K})$. Отождествим $\overline{K}$ с пространством $(\mathbb{F}_p)^l$ и зададим его базис $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l$. Тогда $G/K \leq \mathrm{Aut}(\overline{K}) \simeq GL_l(p)$ и поэтому $l > 1$. В силу выбора N, G_1 действует без неподвижных точек на множестве 1-мерных подпространств в $\overline{K}$ (если бы это не выполнялось, то такое 1-мерное подпространство из $\overline{K}$ порождало бы собственную подгруппу в $\overline{K}$, которая была бы нормальна в G_1, что невозможно по выбору N). Поэтому число $s := |\overline{G_1} : N_{\overline{G_1}}(S)|$, где $S = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$, не меньше чем l и не превосходит числа $\frac{p^l-1}{p-1} < r$. С другой стороны, s делится на $|\overline{G} : N_{\overline{G}}(S)|$. Если $\overline{G}$ фиксирует (как множество) каждое 1-мерное подпространство из $\overline{K}$, то $\overline{G}/\overline{K} \leq Z(GL_l(p))$, противоречие. Поэтому можно считать, что $|\overline{G} : N_{\overline{G}}(S)| \neq 1$. Таким образом, для полного прообраза Y группы $N_{\overline{G}}(S)$ в G получаем, что $1 < |G/K : Y/K| \leq \frac{p^l-1}{p-1}$.

<u>Случай $\overline{K} \simeq S^l$ (S — простая неабелева группа).</u> Предположим, что $\overline{K} \simeq S^l$, где S — простая неабелева подгруппа в $\overline{K}$. В этом случае мы имеем $\overline{G_1}/C_{\overline{G_1}}(\overline{K}) \leq \mathrm{Aut}(\overline{K}) \simeq \mathrm{Aut}(S) \wr \mathrm{Sym}_l$ (см. [6, Exercise 4.3.9]). Ввиду гипотезы Шрейера (см. [1]) группа $\mathrm{Out}(S)$ разрешима и по выбору N группа G_1 действует транзитивно на множестве из всех l нормальных простых групп, входящих в указанное разложение для $\overline{K}$.

Так как G/K — неабелева группа, то, учитывая, что $C_{\overline{G}}(\overline{K}) \simeq C_{\overline{G}}(\overline{K})\overline{K}/\overline{K} \simeq X/K \trianglelefteq G/K$, где X обозначает полный прообраз группы $C_{\overline{G}}(\overline{K})\overline{K}$ в G, заключаем, что либо $C_{\overline{G}}(\overline{K}) \simeq G/K$ и $\overline{G} \simeq \overline{K} \times G/K$, либо $C_{\overline{G}}(\overline{K}) = 1$ и $\overline{G} \leq \mathrm{Aut}(\overline{K})$. Во втором случае $|\overline{G_1} : N_{\overline{G_1}}(S)| = l$ делится на $|\overline{G} : N_{\overline{G}}(S)|$ и поэтому для полного прообраза Y группы $N_{\overline{G}}(S)$ в G получаем, что $l_1 := |G/K : Y/K|$ делит l, а поскольку $G/K \not\leq \mathrm{Out}(S)$, то $l_1 > 1$.

Предложение доказано. □

Граф Γ, определенный в предложении 2, будем называть *минимальным* $(k+1, r, \mu)$-*накрытием типа* (Tx), если $|K| = r$ и тройка (G_1, G, K) удовлетворяет условиям п. (Tx) заключения этого предложения (в частности, $N = 1$). В таком случае мы будем обозначать Γ через $\Gamma(G_1, G, K)$.

4. Некоторые свойства $\widetilde{G}$-вершинно-транзитивных $(k+1, r, \mu)$-накрытий с $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$

Пусть далее Γ — недвудольное $(k+1, r, \mu)$-накрытие и Σ — множество его антиподальных классов. Всюду в этом разделе мы будем предполагать, что Γ имеет транзитивную группу автоморфизмов $\widetilde{G}$, которая индуцирует группу подстановок $\widetilde{G}^{\Sigma}$ ранга 3 на Σ четного порядка, и ядро K действия $\widetilde{G}$ на Σ имеет порядок, равный r. Через G мы будем обозначать полный прообраз группы $\mathrm{Soc}(\widetilde{G})$ в $\widetilde{G}$.

Обозначим через M стабилизатор антиподального класса F в $\widetilde{G}$, содержащего вершину a, и через H — подгруппу $\widetilde{G}_a$. Пусть $\mathcal{S} = \mathrm{O}rb_2(\widetilde{G}^{\Sigma})$. По условию $\widetilde{G}/K \simeq \widetilde{G}^{\Sigma}$ содержит инволюцию, поэтому (см., например, [1, 16.1]) каждый орбитал $\widetilde{G}$ на Σ является самоспаренным, то есть $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, S_2\}$ и $S_i^* = S_i$, $i = 0, 1, 2$ (через S_0 обозначается диагональный орбитал).

Пусть $(a, b_i) \in (F, F_i) \in S_i$ и $k_i := |M(F_i)|$ — длина подорбиты группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$, отвечающей орбиталу S_i. Тогда $k_1 + k_2 = k$.

Положим $\Omega = \mathcal{V}(\Gamma)$, $\mathcal{Q} = \mathrm{O}rb_2(\widetilde{G})$ и выберем $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ такие, что $Q_1 \neq Q_2$ и $Q_1 \cup Q_2 \subset \mathcal{A}(\Gamma)$. Пусть $\Gamma(Q_1 \cup Q_2)^*$ — это граф на Ω, ребрами которого являются пары вершин $\{x, y\}$ такие, что $(x, y) \in Q_i$ для некоторого $i = 1, 2$. Поскольку $|K| = r$, мы получаем, что $M = K : H$ и поэтому $\mathcal{A}(\Gamma)$ является объединением двух $\widetilde{G}$-орбиталов, то есть $\mathcal{A}(\Gamma) = Q_1 \cup Q_2$, $Q_i^* = Q_i$, где $i = 1, 2$, и $\Gamma = \Gamma(Q_1 \cup Q_2)^*$. Можно считать, что $(a, b_i) \in (F \times F_i) \cap Q_i$.

Тогда $|Q_i| = rk_i(k+1)$ и так как группа $\widetilde{G}$ транзитивна на вершинах графа, то для дуги $(a, b_i) \in Q_i$ имеем

$$r(k+1)k_i = |Q_i| = |\widetilde{G} : \widetilde{G}_{a,b_i}| = |\widetilde{G} : H| \cdot |H : \widetilde{G}_{a,b_i}|,$$

поэтому $|H : \widetilde{G}_{a,b_i}| = k_i$, то есть H имеет ровно две орбиты на $\Gamma_1(a)$ с представителями b_1 и b_2, которым соответствуют M-орбиты $\Sigma_1 := M(F_1)$ и $\Sigma_2 := M(F_2)$ на Σ. При этом $M_{\{F_i\}} = K : \widetilde{G}_{a,b_i}$.

Заметим, что граф $\Omega_i := (\Omega, Q_i)$ является реберно симметричным r-накрытием (необязательно антиподальным) графа $\Phi_i := (\Sigma, S_i)$, который в свою очередь является графом ранга 3. Отсюда следует, что каждое ребро графа Ω_i лежит ровно в $\lambda(\Omega_i)$ 3-циклах и максимальные клики в Ω_i имеют один и тот же размер, не превосходящий $\lambda(\Omega_i) + 2$. При этом очевидно, что

$$\mathrm{Cl}(\Omega_i) \leq \mathrm{Cl}(\Phi_i), \quad \lambda(\Omega_i) \leq \lambda(\Phi_i) \text{ и } \mathrm{Co}(\Omega_i) \leq r \cdot \mathrm{Co}(\Phi_i),$$

где через $\mathrm{Cl}(\Delta)$ ($\mathrm{Co}(\Delta)$) — обозначается размер максимальной клики (коклики, соответственно) графа Δ.

Положим $X_i := H(b_i)$ и $\lambda_i := |\Gamma_1(b_i) \cap X_i|$. Пусть $\delta_{ij}(x,y) := |Q_i(x) \cap Q_j(y)|$, $i,j = 1,2$. Тогда для всех $(x,y) \in Q_i$ имеем $\lambda(\Omega_i) = \delta_{ii}(x,y)$, $\delta_{12}(x,y) = \delta_{21}(x,y)$ (поскольку $Q_i^* = Q_i$) и

$$2\delta_{12}(x,y) = \lambda - \delta_{11}(x,y) - \delta_{22}(x,y).$$

В частности,

$$\begin{aligned} &(1) & \delta_{11}(a,b_1) + \delta_{12}(a,b_1) &= \lambda_1, \\ &(2) & \delta_{21}(a,b_2) + \delta_{22}(a,b_2) &= \lambda_2, \\ &(3) & \delta_{21}(a,b_1) + \delta_{22}(a,b_1) &= \lambda - \lambda_1, \\ &(4) & \delta_{11}(a,b_2) + \delta_{12}(a,b_2) &= \lambda - \lambda_2. \end{aligned}$$

Подсчет числа ребер в Γ между X_1 и X_2 дает равенства

$$(5) \qquad \delta_{21}(a,b_1)k_1 = \delta_{11}(a,b_2)k_2,$$

$$(6) \qquad \delta_{22}(a,b_1)k_1 = \delta_{12}(a,b_2)k_2$$

для ребер типов Q_1 и Q_2 соответственно. Отсюда

$$\begin{aligned} &(7) & (\lambda - \lambda_1)k_1 &= (\lambda - \lambda_2)k_2, \\ &(8) & \delta_{11}(a,b_1) + \delta_{12}(a,b_1) &= \lambda(\Omega_1) + \frac{k_2}{k_1}\delta_{11}(a,b_2) = \lambda_1, \\ &(9) & \delta_{21}(a,b_2) + \delta_{22}(a,b_2) &= \frac{k_1}{k_2}\delta_{22}(a,b_1) + \lambda(\Omega_2) = \lambda_2. \end{aligned}$$

Поэтому k_1 делит $\gcd(k_1,k_2)\delta_{11}(a,b_2)$, и k_2 делит $\gcd(k_1,k_2)\delta_{22}(a,b_1)$.

Положим $Y_i := \bigcup_{X \in \Sigma_i} X$ и посчитаем число ребер типа Q_1 и Q_2 в Γ между Y_1 и Y_2. Поскольку K регулярна на каждом антиподальном классе, получаем, что

$$\begin{aligned} |Q_1(b_1) \cap Y_1| &= \lambda(\Phi_1), \\ |Q_1(b_1) \cap Y_2| &= k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1 = |Q_2(b_1) \cap Y_1|, \\ |Q_2(b_1) \cap Y_2| &= k_2 - (k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1) = \mu(\Phi_2). \end{aligned}$$

Симметрично,

$$\begin{aligned} |Q_2(b_2) \cap Y_2| &= \lambda(\Phi_2), \\ |Q_2(b_2) \cap Y_1| &= k_2 - \lambda(\Phi_2) - 1 = |Q_1(b_2) \cap Y_2|, \\ |Q_1(b_2) \cap Y_1| &= k_1 - (k_2 - \lambda(\Phi_2) - 1) = \mu(\Phi_1). \end{aligned}$$

Так как

$$|Q_i(b_1) \cap Y_j| = \sum_{b \in F_1} |Q_i(b) \cap X_j|$$

для всех $i,j = 1,2$, то число ребер типа Q_1 в Γ между F_1 и X_1 равно

$$(10) \qquad \lambda(\Phi_1) = |Q_1(b_1) \cap Y_1| = \delta_{11}(a,b_1) + \sum_{b \in F_1 \setminus \{b_1\}} \delta_{11}(a,b),$$

а число ребер типа Q_1 в Γ между F_1 и X_2 равно

$$(11) \qquad k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1 = |Q_1(b_1) \cap Y_2| = \delta_{21}(a,b_1) + \sum_{b \in F_1 \setminus \{b_1\}} \delta_{21}(a,b).$$

Отсюда каждая вершина из $F_1 \setminus \{b_1\}$ «в среднем» имеет $\frac{\lambda(\Phi_1)-\lambda(\Omega_1)}{r-1}$ соседей типа Q_1 в X_1 и $\frac{k_1-\lambda(\Phi_1)-1-\delta_{21}(a,b_1)}{r-1}$ соседей типа Q_1 в X_2.

Кроме того, число ребер типа Q_2 в Γ между F_1 и X_1 равно

$$k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1 = |Q_2(b_1) \cap Y_1| = \delta_{12}(a, b_1) + \sum_{b \in F_1 \setminus \{b_1\}} \delta_{12}(a, b), \tag{12}$$

а число ребер типа Q_2 в Γ между F_1 и X_2 равно

$$\mu(\Phi_2) = |Q_2(b_1) \cap Y_2| = \delta_{22}(a, b_1) + \sum_{b \in F_1 \setminus \{b_1\}} \delta_{22}(a, b). \tag{13}$$

Отсюда каждая вершина из $F_1 \setminus \{b_1\}$ «в среднем» имеет $\frac{k_1-\lambda(\Phi_1)-1-\delta_{12}(a,b_1)}{r-1}$ соседей типа Q_2 в X_1 и $\frac{\mu(\Phi_2)-\delta_{22}(a,b_1)}{r-1}$ соседей типа Q_2 в X_2.

Мы будем говорить, что множество ребер графа Γ допускает *H-равномерное разбиение* (с параметрами (μ_1, μ_2)), если для каждого $j = 1, 2$ и любых двух различных вершин z_1, z_2 из F число ребер между $Q_j(z_1)$ и $Q_j(z_2)$ постоянно и равно $k_j\mu_j$ (μ_j — целое).

Лемма 1. *Предположим, что $|K| = r$, $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Если группа H действует транзитивно на $F \setminus \{a\}$ или $r \leq 3$, то множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение.*

Доказательство. Так как $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, то $G_a(b_i) = Q_i(a)$ и $G_a = G_F$. При $r = 2$ имеем $F = \{a, a^*\}$ и число ребер между $Q_j(z_1)$ и $Q_j(z_2)$ равно $k_j\mu_j$, где $\mu_j = |\Gamma_1(b_j) \cap Q_j(a^*)|$. Остается заметить, что в любом из случаев, когда H действует транзитивно на $F \setminus \{a\}$ или $r = 3$, найдется автоморфизм g графа Γ, переводящий пару $\{z_1, z_2\}$ вершин из F в любую другую пару $\{z'_1, z'_2\}$ вершин из F. При этом для каждого $j = 1, 2$ имеем $\{Q_j(z_1)^g, Q_j(z_2)^g\} = \{Q_j(z'_1), Q_j(z'_2)\}$. Отсюда для любых двух различных вершин z_1, z_2 из F число ребер между $Q_j(z_1)$ и $Q_j(z_2)$ постоянно. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Предположим, что $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Тогда для каждого $x \in F \setminus \{a\}$ имеем*

$$\delta_{11}(a, x_1) = \delta_{11}(x, b_1), \quad \delta_{12}(a, x_1) = \delta_{12}(x, b_1), \tag{14}$$

$$\delta_{21}(a, x_2) = \delta_{21}(x, b_2), \quad \delta_{22}(a, x_2) = \delta_{22}(x, b_2), \tag{15}$$

$$\delta_{11}(a, x_2)k_2 = \delta_{21}(x, b_1)k_1, \quad \delta_{12}(a, x_2)k_2 = \delta_{22}(x, b_1)k_1, \tag{16}$$

для всех $x_i \in Q_i(x)$, в частности,

$$(\mu - \mu_1)k_1 \quad = \quad (\mu - \mu_2)k_2, \tag{17}$$

где $\mu_i = |\Gamma_1(b_i) \cap Q_i(x)|$, $i = 1, 2$. Если, к тому же, множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение с параметрами (μ'_1, μ'_2), то $\mu'_i = \mu_i$ для каждого $i = 1, 2$ и число $\gamma = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (\mu - \mu_1 - \mu_2) = r(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$ является собственным значением графа Γ.

Доказательство. Пусть $x \in F \setminus \{a\}$. Положим

$$\mu_1 := \delta_{11}(b_1, x) + \delta_{21}(b_1, x) = |\Gamma_1(b_1) \cap Q_1(x)|,$$

и

$$\mu_2 := \delta_{12}(b_2, x) + \delta_{22}(b_2, x) = |\Gamma_1(b_2) \cap Q_2(x)|.$$

Для каждого $i = 1, 2$ положим $\mu_i(u, w) := |\Gamma_1(u) \cap Q_i(w)|$. Ясно, что для всех $z \in \Gamma_2(a)$ имеет место тождество

$$\mu_1(a, z) + \mu_2(a, z) = \mu = \mu_1(z, a) + \mu_2(z, a).$$

Так как $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, то $G_a(b_i) = Q_i(a)$ и $G_a = G_F$. Отсюда подсчет числа ребер типов Q_1 и Q_2 в Γ между $Q_1(a)$ и $Q_1(x)$, между $Q_2(a)$ и $Q_2(x)$ и между $Q_1(a)$ и $Q_2(x)$ дает равенства (14), (15), (16), совокупность которых влечет равенство (17).

Предположим, что множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение с параметрами (μ_1', μ_2'). Поскольку число ребер между $Q_j(a)$ и $Q_j(x)$ равно $k_j\mu_j(b_j, x)$, для каждого $x \in F \setminus \{a\}$ получаем

$$\mu_1' = \mu_1 = \mu_1(b_1', x) = \mu_1(x_1, a),$$

для всех $b_1' \in Q_1(a)$, $x_1 \in Q_1(x)$, и

$$\mu_2' = \mu_2 = \mu_2(b_2', x) = \mu_2(x_2, a),$$

для всех $b_2' \in Q_2(a)$, $x_2 \in Q_2(x)$.

Ввиду транзитивности K на F получаем, что для всех $y \in F$ и $z \in \Gamma_2(y)$ значение параметра $\mu_i(z, y)$ равно μ_i (что влечет $\mu_j(z, y) = \mu - \mu_i$ для $j \neq i$), если $z \in Q_i(x')$ для некоторой вершины $x' \in F$.

Пусть $\sigma = \{C_1, \dots, C_{3r}\}$ — это разбиение множества вершин графа Γ на множество G_a-орбит. При этом мы будем полагать, что элементы разбиения σ с индексами $i, i+1, i+2$, где $1 \leq i \leq 3r$ и $i \equiv 1 \pmod 3$, это соответственно G_a-орбиты $\{z\}$, $Q_1(z)$, $Q_2(z)$, где $z \in F$, и $C_1 = \{a\}$. Для всех $C_i, C_j \in \sigma$ положим $e_{ij} := |\Gamma_1(x) \cap C_j|$, где $x \in C_i$, и пусть $\mathbf{E}_\sigma := (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3r}$ — quotient-матрица разбиения σ.

Таким образом, $\mathbf{E}_\sigma$ может быть представлена в виде блочной $r \times r$-матрицы следующего вида

$$\mathbf{E}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda - \lambda_1 \\ 1 & \lambda - \lambda_2 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu - \mu_1 \\ 0 & \mu - \mu_2 & \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому характеристический многочлен $\chi(\gamma)$ матрицы $\mathbf{E}_\sigma$ равен

$$\chi(\gamma) = \det(\mathbf{E}_\sigma - \gamma\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}(\gamma) + (r-1)\mathbf{B})\big(\det(\mathbf{A}(\gamma) - \mathbf{B})\big)^{r-1},$$

где

$$\mathbf{A}(\gamma) = \begin{bmatrix} -\gamma & k_1 & k_2 \\ 1 & \lambda_1 - \gamma & \lambda - \lambda_1 \\ 1 & \lambda - \lambda_2 & \lambda_2 - \gamma \end{bmatrix}.$$

Преобразовав данное выражение, получаем

$$\chi(\gamma) \quad = \quad \big(\gamma + (\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (r-1)(\mu - \mu_1 - \mu_2)\big)\big(k - \gamma^2 + \gamma(\lambda + (r-1)\mu)\big) \times \times\big(\gamma^2 - \gamma(\lambda - \mu) - k\big)^{r-1} \cdot \big(\gamma + (\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) - (\mu - \mu_1 - \mu_2)\big)^{r-1}.$$

Следовательно, числа

$$\gamma_1 = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) - (r-1)(\mu - \mu_1 - \mu_2), \ \gamma_2 = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (\mu - \mu_1 - \mu_2)$$

и

$$\gamma_{3,4} = \frac{\lambda + (r-1)\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{(\lambda + (r-1)\mu)^2 + 4k}}{2}$$

являются собственными значениями графа Γ (см., например, [2, p. 436, § A.4] или [4, Ch. 2.3]). Теперь ввиду тождества $k - 1 = \lambda + (r-1)\mu$ получаем $\gamma_{3,4} \in \{k, -1\}$, а поскольку $\lambda_1 + (r-1)\mu_1 + \lambda_2 + (r-1)\mu_2 = k_1 - 1 + k_2 - 1 = k - 2$, то $\gamma_1 = -1$. Отсюда $\gamma_1, \gamma_{3,4}$ всегда являются собственными значениями графа Γ и поэтому дополнительные ограничения на параметры графа может дать только $\gamma_2 = r(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$. Теорема доказана. □

5. Абелевы минимальные $(k+1, r, \mu)$-накрытия

Данный раздел посвящен исследованию минимальных $(k+1, r, \mu)$-накрытий $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ таких, что $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ и K является абелевой группой. Классификация примитивных почти простых групп подстановок ранга 3 (см., например, [3, Ch.11]) влечет, что G^{Σ} является либо спорадической простой группой, либо знакопеременной группой, либо простой группой исключительного лиева типа, либо классической простой группой. При этом описаны все ассоциированные с $\widetilde{G}^{\Sigma}$ взаимодополнительные графы Φ_1 и Φ_2 ранга 3, и более того, во многих подслучаях ранг группы G^{Σ} также равен 3.

Заметим, что если граф Γ имеет тип (T2), то, с учетом того, что параметр $\mathrm{d}_{\min}(G^{\Sigma})$ является известным для всех допустимых групп G^{Σ}, предложение 2 дает достаточно строгие ограничения на r, k и G, или вовсе позволяет исключить существование графа Γ в отдельных случаях для G^{Σ}. Но если граф Γ имеет тип (T1), то подобные ограничения отсутствуют. Здесь мы описываем свойства группы $\widetilde{G}$ и параметры графа Γ, предполагая, что последний имеет тип (T1). В следующем предложении 3 нами будет показано, что если G не является квазипростой группой, то либо $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) > 3$, либо Γ является графом Тейлора (и его параметры λ и μ могут быть выражены при помощи параметров графов Φ_1 и Φ_2), либо $G' \simeq G^{\Sigma}$ действует транзитивно на вершинах графа Γ. Затем, на основе теоремы 1, в предложении 4 мы получим ограничения на группу G, а также на параметры и спектр графа Γ при условии, что $\widetilde{G} = G$ — квазипростая группа.

Предложение 3. *Предположим, что* Γ *— минимальное* $(k+1, r, \mu)$*-накрытие типа* (T1), $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$, Σ *— множество его антиподальных классов и пусть* $T = G'$*. Предположим к тому же, что* $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$*. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если* $T \simeq G^{\Sigma}$ *и* T *действует транзитивно на вершинах графа* Γ*, то для любого* $F \in \Sigma$ *группа* $T_{\{F\}}$ *содержит подгруппу простого индекса* p*, делящего* r*, причем если* $r = p$*, то группа* $T_{\{F\}}/T_F$ *разрешима.*

2. *Если T действует интранзитивно на вершинах графа Γ, то $G = T \times K$ и либо*
   (i) $r = 2$, $Q_i(a) \subset T(a)$ *для некоторого* $i \in \{1, 2\}$, $Q_i(a) \cap Q_i(b_i)$ *— коклика, Γ — недвудольный граф Тейлора с* $\mu = 2\mu(\Phi_i) + k_j - k_i - 1$, *где* $j \in \{1,2\} \setminus \{i\}$, $2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) = k - 1$, *число* $\gamma = -2(\lambda(\Phi_j) + \frac{k_i}{k_j}\mu(\Phi_j) + 1) + k$ *является собственным значением графа* Γ, $\Gamma_1(a)$ *— сильно регулярный граф с параметрами*
   $$(k, \lambda, \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1)), \frac{\lambda}{2}),$$
   где $\lambda = k - \mu - 1$ *и* k *— нечетно, либо*
   (ii) $r = 4$, $Q_i(a) \subset T(a)$ *для некоторого* $i \in \{1, 2\}$, k *— нечетно,* $\lambda \neq \mu$ *и число* $k_i - k_j/3 \in \{\pm \gcd(k_i, k_j/3)\}$ *— является собственным значением графа* Γ, *где* $j \in \{1,2\} \setminus \{i\}$, *и* $\mathrm{rk}(G^\Sigma) \geq 4$, *либо*
   (iii) $r \leq 1 + 4 \cdot |\widetilde{G}^\Sigma : G^\Sigma|^2$ *и* $\mathrm{rk}(G^\Sigma) \geq 6$, *или* $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 5$, $k = 35$, $r = 16$ *и* $\mu = 2$.

Доказательство. Обозначим $T = G'$ и $H = \widetilde{G}_a$. Ввиду предложения 2 имеем $G = T \times K$ и $K \leq Z(G)$. Положим $L = T_{\{F\}}$ и $M_1 = G_{\{F\}}$. Тогда $L \simeq G_a$, $M_1 = KL$, $|M_1 : G_a| = |M_1 : L| = |K|$ и $L \cap K = G_a \cap K = 1$. Также для $s = |L : L_a|$ мы имеем $|G_a L| = s|G_a|$ и s делит $|K|$. Для подгруппы K_0 простого индекса p в K граф $\Gamma_0 = \Gamma^{K_0}$ является G_0-вершинно-транзитивным $(k+1, p, \mu|K_0|)$-накрытием, где $G_0 \simeq G/K_0$. При этом $G_{\{F\}} = K \times L$, $L_a = L_F$ и LK/K_0 изоморфна стабилизатору антиподального класса X графа Γ_0 в G_0.

Допустим, что T транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда T действует транзитивно на вершинах графа Γ_0 и $r = s$. Если группа L/L_X неразрешима, то поскольку L централизует K, по [22, Theorem 11.7] получаем, что L фиксирует X поточечно, что влечет $s \leq r/p$, противоречие. Отсюда следует утверждение 1.

Докажем утверждение 2. Далее мы будем предполагать, что T интранзитивна на вершинах графа Γ. Положим $\Omega = \mathcal{V}(\Gamma)$, $\mathcal{Q} = \mathrm{O}rb_2(\widetilde{G})$ и выберем $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ такие, что $\mathcal{A}(\Gamma) = Q_1 \cup Q_2$, то есть $\Gamma = \Gamma(Q_1 \cup Q_2)^*$. Зафиксируем $(a, b_i) \in Q_i$ и пусть $|Q_i(a)| = k_i$, $i = 1, 2$. Пусть обозначения Φ_i, Ω_i, Y_i и $\delta(\cdot,\cdot)$ имеют тот же смысл, что и в разделе 4.

Покажем сначала, что $s = 1$.

Заметим, что каждая T-орбита на Ω пересекает каждый антиподальный класс ровно по s вершинам и множество T-орбит на Ω образует систему импримитивности τ группы $\widetilde{G}$ с блоками размера $r'(k+1)$, где $r' = r/s$. Обозначим через N ядро действия, индуцируемого группой $\widetilde{G}$ на τ. Ясно, что $L \leq T \leq N$ и K действует транзитивно на τ. Поэтому $|K : K_{\{A\}}| = |\tau| = r'$ для каждого $A \in \tau$ и $|K_{\{A\}}| = s$. По определению, K — минимальная нормальная подгруппа в $\widetilde{G}$, откуда заключаем, что $K \cap N = 1$ (иначе $K \leq N$ и $s = r$, то есть T транзитивна на вершинах графа Γ, что противоречит предположению) и $K^\tau \simeq K$. Но кроме того, по условию группа K является абелевой и поэтому $K_{\{A\}} \leq N$. Таким образом, $K_{\{A\}} = 1$ и, следовательно, $s = 1$.

Для $i = 1, 2$ определим на блоках системы τ граф Ψ_i, в котором два блока A и B смежны тогда и только тогда, когда $(A \times B) \cap Q_i \neq \varnothing$ (т.е. между A и B имеется ребро графа Ω_i).

Кроме того, определим на блоках системы τ граф Ψ, в котором два блока A и B смежны тогда и только тогда, когда $(A \times B) \cap \mathcal{A}(\Gamma) \neq \varnothing$ (т.е. между A и B имеется ребро графа Γ).

Мы имеем $T \leq N$, $\deg \Psi \leq \mathrm{rk}(N^{\Sigma}) - 1$ и поскольку в любых двух различных блоках системы τ найдутся вершины, находящиеся на расстоянии не больше 2 в Γ, заключаем $d(\Psi) \leq 2$ и поэтому

$$|\Psi| \leq 1 + \deg \Psi^{d(\Psi)} \leq 1 + (\mathrm{rk}(N^{\Sigma}) - 1)^{d(\Psi)} \leq 1 + (\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) - 1)^{d(\Psi)}. \tag{18}$$

В силу того, что для каждого $i = 1, 2$ граф Ω_i является реберно симметричным, число $t_i := |Q_i(a) \cap T(x)|$ не зависит от выбора вершины $x \in Q_i(a)$. Более того, для всех $x \in Q_i(a)$, $z \in T(x)$ и $y \in T(a)$ верно равенство

$$|Q_i(y) \cap T(x)| = |Q_i(z) \cap T(a)|.$$

Таким образом, либо $\deg \Psi_i = 0$ (что равносильно условию $Q_i(a) \subset T(a)$) и $t_i = |Q_i(a)|$, либо $t_i \cdot \deg \Psi_i = k_i$ и в $F \setminus \{a\}$ содержится всего $\deg \Psi_i$ вершин x, имеющих в точности t_i соседей типа Q_i из $T(a) \setminus \{a\}$. При этом в $F \setminus \{a\}$ имеется всего $r - 1 - \deg \Psi$ вершин, несмежных с вершинами из $T(a)$.

Так как группа T_a нормальна в H и для каждого $i = 1, 2$ группа H действует транзитивно на множестве T_a-орбит на $Q_i(a)$, то для любой вершины $x \in Q_i(a)$ число t_i делится на $|T_a(x)|$, а число n_i T_a-орбит на $Q_i(a)$ равно $\frac{k_i}{|T_a(x)|}$ и делит число $|H : T_a| = |\widetilde{G} : G|$. Отсюда n_i делит $|\mathrm{Out}(T)|$. Таким образом, если $\deg \Psi_i > 0$, то $n_i = \frac{t_i}{|T_a(x)|} \deg \Psi_i$ и $\deg \Psi_i \leq |\mathrm{Out}(T)|$, что влечет $\deg \Psi \leq 2|\mathrm{Out}(T)|$.

Таким образом, из (18) следует, что $|K| \leq 1 + \deg \Psi^2 \leq 17$ всякий раз, когда $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) \leq 5$ или $|\mathrm{Out}(T)| \leq 2$.

Далее через n, $-m$ $(m > 0)$ мы будем обозначать собственные значения графа Γ, отличные от -1 и k.

Так как для всех $A, B \in \tau$ число $e_{AB} := |\Gamma_1(x) \cap B|$ не зависит от выбора вершины $x \in A$, то есть разбиение τ является равномерным, то собственные значения матрицы $\mathbf{E}_\tau := (e_{AB})_{A,B \in \tau}$ являются собственными значениями графа Γ (см., например, [2, p. 436, § A.4] или [4, Ch. 2.3]). Мы имеем

$$\mathbf{E}_\tau = e_{AA}\mathbf{I}_r + t_1\mathbf{A}(\Psi_1) + t_2\mathbf{A}(\Psi_2), \tag{19}$$

где $\mathbf{I}_r$ — единичная $r \times r$-матрица, $\mathbf{A}(\Psi_i)$ — матрица смежности графа Ψ_i (рассматриваемого в качестве подграфа в Ψ) и $A \neq B$. В частности, если e_{AB} постоянно для всех $A \neq B$, то

$$\mathbf{E}_\tau = e_{AA}\mathbf{I}_r + e_{AB}\mathbf{A}(\Psi), \tag{20}$$

где $\mathbf{A}(\Psi)$ — матрица смежности графа Ψ и $A \neq B$.

Эти наблюдения мы используем позднее для исключения большинства подслучаев при $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) \leq 5$ и $r > 2$.

I. Допустим, что хотя бы один блок системы τ не является кокликой. Не ограничивая общности, будем считать, что $b_1 \in T(a)$ и положим $t := t_2$. В этом случае число $n_2 = \frac{t}{|T_a(x)|} \deg \Psi = \frac{k_2}{|T_a(x)|}$ делит $|\mathrm{Out}(T)|$, $Q_1(x) \subset T(x)$ для всех $x \in F$, в частности, $Q_1(a) \subset T(a)$. Если при этом $b_2 \in T(a)$, то $Q_2(a) \subset T(a)$ и Ψ — коклика, противоречие. Поэтому $T(a)$, а значит, и любой другой блок системы τ не содержат ребер типа Q_2, то есть $e_{AA} = k_1$. Отсюда Ψ_1 является r-кокликой, $\Psi = \Psi_2$ и Γ не содержит 3-циклов $\{x, y, z\}$ таких, что $(x, y), (x, z) \in Q_1$ и

$(y,z) \in Q_2$. В частности, $Q_1(a)$ не содержит ребер типа Q_2, что ввиду соотношений (5), (1), (3) влечет

$$\begin{aligned}\delta_{12}(a,b_1) &= \delta_{21}(a,b_1) = \delta_{11}(a,b_2) = 0,\\ \delta_{11}(a,b_1) &= \lambda(\Omega_1) = \lambda_1,\\ \delta_{22}(a,b_1) &= \lambda - \lambda_1.\end{aligned}$$

Отсюда ввиду соотношений (2), (4) получаем

$$\delta_{21}(a,b_2) + \delta_{22}(a,b_2) = \lambda_2, \quad \delta_{12}(a,b_2) = \lambda - \lambda_2.$$

Кроме того, в силу соотношения (10) имеем $\lambda_1 = \lambda(\Phi_1) = \lambda(\Omega_1)$ и вершина из $F_1 \setminus \{b_1\}$ «в среднем» имеет $\frac{k_1-\lambda(\Phi_1)-1}{r-1}$ соседей типа Q_1 в $Q_2(a)$ и $\frac{k_1-\lambda(\Phi_1)-1}{r-1}$ соседей типа Q_2 в $Q_1(a)$.

Поскольку TH индуцирует группу ранга 3 на $T(a)$, заключаем, что подграф в Γ, индуцированный множеством $T(a)$, изоморфен графу Φ_1. Следовательно, вершина b_1 имеет ровно $k_1-\lambda(\Phi_1)-1$ соседей типа Q_1 в $\big(T(a)\setminus(Q_1(a)\cup\{a\})\big) \subset Y_2$.

Кроме того, в $F\setminus\{a\}$ содержится всего $\deg\Psi$ вершин x, имеющих в точности t соседей типа Q_2 из $T(a)\setminus(Q_1(a)\cup\{a\})$, и всего $r-1-\deg\Psi$ вершин, несмежных с вершинами $T(a)$. Значит,

$$t = \delta_{12}(a,b_2) + |\big(T(a) \setminus Q_1(a)\big) \cap Q_2(b_2)| = \delta_{21}(a,b_2) + |\big(T(b_2) \setminus Q_1(b_2)\big) \cap Q_2(a)|.$$

1. Предположим, что $\deg\Psi = 1$. Тогда $Q_2(a) \subset T(b_2)$, $|K| = 2 = |\Psi|$ и для $a^* \in F \setminus \{a\}$ имеем с одной стороны

$$\mu = |\Gamma_1(a^*)\cap\Gamma_1(b_1)| = |Q_1(b_1)\cap Y_2| + |Q_2(b_1)\cap Y_1| = 2(k_1-\lambda(\Phi_1)-1) = 2\frac{k_2}{k_1}\mu(\Phi_1),$$

и с другой —

$$\mu = |\Gamma_1(a^*) \cap \Gamma_1(b_2)| = |Q_1(b_2) \cap Y_1| + |Q_2(b_2) \cap Y_2| = \mu(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2),$$

откуда

$$\mu = 2(k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1) = \mu(\Phi_1) + (1 + k - 2k_1 + \mu(\Phi_1) - 2) = 2\mu(\Phi_1) + k_2 - k_1 - 1,$$

то есть $3k_1 = 2(\mu(\Phi_1) + \lambda(\Phi_1)) + k_2 + 1$ и $\lambda = k - \mu - 1 = \mu(\Phi_2) + \lambda(\Phi_1)$.

По доказанному выше, получаем следующие соотношения

$$\mu - \mu_1 = k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1, \quad \mu_1 = \mu(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) - k_1 + \lambda(\Phi_1) + 1,$$

$$\mu-\mu_2 = \frac{k_1}{k_2}(\mu-\mu_1) = \frac{k_1}{k_2}(k_1-\lambda(\Phi_1)-1), \quad \mu_2 = \mu(\Phi_1)+\lambda(\Phi_2)-\frac{k_1}{k_2}(k_1-\lambda(\Phi_1)-1),$$

а также

$$\lambda-\lambda_1 = \mu(\Phi_2), \quad \lambda_1 = \lambda(\Phi_1), \quad \lambda-\lambda_2 = \frac{k_1}{k_2}\mu(\Phi_2), \quad \lambda_2 = \mu(\Phi_2)+\lambda(\Phi_1)-\frac{k_1}{k_2}\mu(\Phi_2).$$

Отсюда по лемме 1 и теореме 1

$$2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) - k = -1,$$

и число

$$\gamma = -2(\lambda(\Phi_2) + k_1 + \frac{k_1}{k_2}(-k_1 + \lambda(\Phi_1) + 1) + 1) + k$$

является собственным значением матрицы смежности $\mathbf{A}(\Gamma)$ графа Γ.

Поскольку Γ — недвудольный граф Тейлора, по [2, Theorem 1.5.3] получаем, что $\Delta := \Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, \lambda(\Delta), \frac{\lambda}{2})$ и, так как $k(\Delta) = \lambda > 0$, то $\lambda(\Delta) = \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1))$.

Покажем, что $Q_1(a) \cap Q_1(b_1)$ — коклика. Предположим обратное. Тогда найдется дуга $(x, y) \in Q_1 \cap (Q_1(a) \times Q_1(a))$. Посчитаем число вершин в $[x] \cap [y] \cap \Gamma_1(a)$. Имеем

$$\begin{aligned} |[x] \cap [y] \cap Q_1(a)| &= \delta_{11}(x,y) - 1 = \lambda(\Phi_1) - 1, \\ |[x] \cap [y] \cap Q_2(a)| &= \delta_{22}(x,y) = \delta_{22}(a,b_1) = \frac{k_2}{k_1}\delta_{12}(a,b_2) = \frac{k_2}{k_1}|Q_2(b_2) \cap Y_1| = \\ &= \frac{k_2}{k_1}(k_2 - \lambda(\Phi_2) - 1) = \mu(\Phi_2), \end{aligned}$$

поэтому

$$\lambda(\Delta) = \lambda(\Phi_1) - 1 + \mu(\Phi_2) = \lambda - 1.$$

Отсюда следует, что $k - 1 = \lambda$ и граф Γ несвязен, противоречие.

Далее мы докажем, что случай $\deg \Psi = 2, 3$ невозможен.

2. Предположим, что $\deg \Psi = 2$. Тогда Ψ — l-цикл, $l \le 5$ и $t = k_2/2$. Заметим, что H не может фиксировать F поточечно, поскольку иначе для вершины $a^* \in F \setminus \{a\}$ H-орбита на $[a^*] \cap Q_2(a)$ содержит все вершины из $Q_2(a)$ и $t = k_2$, что невозможно.

Допустим, $l = 3$, то есть Ψ — 3-цикл. Тогда в H найдется 2-элемент, переставляющий между собой $T(a_1)$ и $T(a_2)$, где $a_1, a_2 \in F \setminus \{a\}$, и Y_2 содержит четыре попарно непересекающихся подмножеств размера t:

$$Q_2(a_i) \cap T(a) \cap Y_2, \quad Q_2(a) \cap T(a_i) \cap Y_2 \quad (i = 1, 2).$$

Так как $Q_1(a_1) \subset T(a_1) \setminus Y_2$ и $Q_2(a_1) \cap T(a_1) = \varnothing$, то $t = |Q_2(a_1) \cap T(a_2) \cap Y_2|$ и, следовательно, вершина a_1 смежна с двумя вершинами из одного и того же антиподального класса, противоречие.

Пусть $l = 4$. Ввиду (20) собственное значение $\gamma \in \{\pm 2, 0\}$ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} + e_{AA} = \gamma \cdot \frac{k_2}{2} + k_1 \in \{k_1 \pm k_2, k_1\}$ графа Γ, откуда k_1 делит $\gcd(k, k_2)$. Поскольку граф Γ недвудолен, $k_2 \ne k_1$. Поэтому $\lambda \ne \mu$, $n = k_1$, $m = k_2 - k_1$ и $k_1 + k_2 = nm$, что влечет $k_1 = 1$, противоречие.

Пусть $l = 5$. Ввиду (20) собственное значение $\gamma \in \{2, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})\}$ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} + e_{AA} = \gamma \cdot \frac{k_2}{2} + k_1 \in \{k_2 + k_1, \frac{k_2}{4}(-1 \pm \sqrt{5}) + k_1\}$ графа Γ, что влечет $\lambda = \mu$ и $\sqrt{k} = \frac{k_2}{4}(-1 + \sqrt{5}) + k_1$, противоречие.

3. Предположим, что $\deg \Psi = 3$. Тогда $t = k_2/3$, $r \le 10$ и поскольку число вершин графа нечетной степени четно, то $r = 4, 8$.

Пусть $r = 4$. Тогда Ψ — 4-клика. Ввиду (20) собственное значение $\gamma \in \{3, -1\}$ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} + e_{AA} \in \{k, -k_2/3 + k_1\}$ графа Γ и $k_1 - k_2/3$ делит $k_1 + k_2$. Так как k — нечетно, то $k_1 - k_2/3 = \pm \gcd(k_1, k_2/3)$ и поэтому $\lambda \ne \mu$.

Пусть $r = 8$. Имеется всего три транзитивных графа степени 3 на 8 вершинах (это граф куба, граф Вагнера (обхвата 4, с полной группой автоморфизмов изоморфной Dih_8) и несвязный граф обхвата 3 (объединение двух тетраэдров), см. пп. $H5$,$H6$,$H7$ перечня из [18, p. 1111]), но ни один из них не удовлетворяет ограничениям на группу или диаметр графа Ψ. Противоречие.

II. Допустим, что хотя бы один блок системы τ является кокликой. Это равносильно тому, что любой ее блок состоит из вершин, находящихся попарно на расстоянии 2 в Γ. При этом группа T содержит хотя бы один элемент g, действующий без неподвижных точек на Σ (см., например, [6, Exercise 1.7.2]). Отсюда по [21, лемма 3] и [16, Lemma 3] в случае, если собственные значения графа Γ целые, получаем, что $n+m$ делит $k+1$.

Далее, $e_{AA}=0$ для всех $A\in\tau$ и по (19) матрица $\mathbf{E}_\tau$ есть не что иное, как взвешенная матрица смежности графа Ψ (с весами t_1 и t_2). Пусть γ^+ и γ^- — соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы $\mathbf{E}_\tau$, а γ_i^+ и γ_i^- — соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы $t_i\mathbf{A}(\Psi_i)$, $i=1,2$. Тогда (см., например, [4])

$$\gamma_1^-+\gamma_2^-\le\gamma^-\le\gamma^+\le\gamma_1^++\gamma_2^+\le t_1\deg\Psi_1+t_2\deg\Psi_2=k.$$

Покажем, что $r>2$ и $\deg\Psi>1$. Легко видеть, что $\deg\Psi=1$ тогда и только тогда, когда $r=2$. Но если $r=2$, то $H=\widetilde{G}_F$ централизует K и фиксирует F поточечно, противоречие с тем, что граф Γ недвудолен.

Заметим, что если $\deg\Psi<r-1$, то найдется вершина $a^+\in F\setminus\{a\}$ такая, что $a^+\notin\Gamma_1(x)$ для всех $x\in T(a)$, откуда граф Γ содержит $2(k+1)$-коклику $T(a)\cup T(a^+)$ и ввиду границы Хофмана для коклик (см., например, [2, Proposition 1.3.2]) мы получаем неравенство

$$1+\frac{k}{\theta}\le\frac{r}{2}, \tag{21}$$

где $-\theta=-m$ — наименьшее собственное значение графа Γ. Отсюда при $\deg\Psi<r-1$ следует, что $r\ge 6$ (иначе $n=1$ или $k\le 2$, что невозможно по условию).

Далее, при фиксированном $i=1,2$ число

$$t_{12}^i:=|\Gamma_1(a)\cap T(x)|$$

постоянно для каждой вершины $x\in Q_i(a)$. Из этого следует, что имеются ровно две возможности:

(a) $t_{12}^1=t_{12}^2=t_1+t_2$, $\widetilde{G}$ действует транзитивно на дугах графа Ψ и

$$\deg\Psi=\frac{k}{t_{12}^1}=\frac{k_1+k_2}{t_1+t_2}=\frac{k_i}{t_i}=\deg\Psi_i;$$

(b) $t_1=t_{12}^1\ne t_{12}^2=t_2$, H имеет ровно две орбиты на окрестности вершины $T(a)$ в Ψ и

$$\deg\Psi=\frac{k_1}{t_1}+\frac{k_2}{t_2}=\deg\Psi_1+\deg\Psi_2.$$

Напомним, что для любой вершины $x\in Q_i(a)$ число t_i делится на $|T_a(x)|$ и для каждого $i=1,2$ число T_a-орбит на $Q_i(a)$ равно $n_i:=\frac{t_i}{|T_a(x)|}\deg\Psi_i=\frac{k_i}{|T_a(x)|}$ и делит $|\mathrm{Out}(T)|$.

Обозначим через W_i, где $i=1,2$, все вершины графа Ψ_i, находящиеся в Ψ_i на расстоянии не меньше 3 от $\tilde a:=T(a)$ или содержащиеся в связной компоненте графа Ψ_i, не содержащей $\tilde a$. Тогда из условия $d(\Psi)\le 2$ следует, что для каждой вершины $\tilde x_1\in W_1$ в Ψ_2 имеется 2-путь от $\tilde x_1$ к $\tilde a$ (очевидно, число таких путей не превосходит $\deg\Psi_2(\deg\Psi_2-1)$. Проведя аналогичное рассуждение для W_2, получаем

$$|W_i|\le\deg\Psi_j(\deg\Psi_j-1)\ (\{i,j\}=\{1,2\}). \tag{22}$$

Далее мы последовательно рассмотрим возможности (a) и (b) и докажем, что в большинстве возникающих подслучаев $\deg\Psi \geq 5$ (и, стало быть, $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) > 5$).

(a): $t_{12}^1 = t_{12}^2 = t_1 + t_2$. Пусть $\widetilde{G}$ действует транзитивно на дугах графа Ψ.

1. Предположим, что $\deg\Psi = r - 1$ (по доказанному выше $r > 2$). Тогда $\widetilde{G}$ индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок $\widetilde{G}^{\Psi}$ на множестве вершин r-клики Ψ и $\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^{\Psi}) \simeq K$. Ввиду (20) собственное значение $\gamma \in \{r - 1, -1\}$ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} = \gamma(t_1 + t_2) \in \{k, -(t_1 + t_2)\}$ графа Γ. Если $\lambda \neq \mu$, то $m = t_1 + t_2 = \mu$, $n = r - 1$ и k четно, что противоречит ограничению $(r-1)\mu \leq k - 1$ из п. (i) предложения 1. Значит, $\lambda = \mu = r-2$ и $\sqrt{k} = t_1 + t_2 = r - 1$. Поскольку по п. $(viii)$ предложения 1 каждый простой делитель p числа r делит и число $k + 1 = r\mu + 2$, то r — степень 2 и K — элементарная абелева 2-группа. Так как группа $U := H/\widetilde{G}_F$ вкладывается изоморфно в группу $\mathrm{Out}(T)$ и последняя разрешима, то и U разрешима. При этом $r - 1$ делит число $|H : \widetilde{G}_F|$, которое в свою очередь, делит $|\mathrm{Out}(T)|$.

Если $r = 4$, то $k = 9$, $\mu = \lambda = 2$. Но по замечанию в начале части II доказательства число $k + 1$ должно делиться на $2\sqrt{k}$, противоречие.

2. Теперь предположим, что $\deg\Psi < r - 1$. По доказанному ранее имеем $r \geq 6$. Поэтому $\deg\Psi = \deg\Psi_i \geq 3$ и $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) \geq 4$. Ввиду (20) собственное значение γ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} = \gamma(t_1 + t_2)$ графа Γ.

2.1. Допустим, что $\deg\Psi = 3$. Тогда $r = 8$ и по [18] получаем противоречие тем же способом, что и в части I.

2.2. Допустим, что $\deg\Psi = 4$. Тогда $r = 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17$ и так как K — элементарная абелева группа, то по [9, Theorem 1.2] имеем либо $r = 8$, $\Psi \simeq K_{4,4} \simeq C(2;4;1)$ (см. п. $H8$ из [18, p.1111]) и $\gamma \in \{\pm 4, 0\}$, либо $r = 16$, $\Psi \simeq H_{4,2} \simeq C(2;4;2)$ (4-куб) и $\gamma \in \{\pm 4, \pm 2, 0\}$, либо $r = 9$, $\Psi \simeq G(3^2)$ и $\gamma \in \{-2, 1, 4\}$ (см. п. $I4$ из [18, p.1112]), либо $r = 13, 17$ и $\Psi \simeq C(r; \pm 1; \pm\epsilon)$ — r-циркулянт, где $\epsilon^2 \equiv -1 \pmod r$ (при $r = 13$ граф имеет три различных нецелых собственных значения (см. п. $M3$ из [18, p.1112]), при $r = 17$ граф имеет диаметр 3). Противоречие с тем, что $d(\Psi) \leq 2$ и в любом из этих случаев набор собственных значений $\{\gamma \cdot (t_1 + t_2)\}$ не является допустимым для Γ.

(b): $t_1 = t_{12}^1 \neq t_{12}^2 = t_2$. В этом случае $\deg\Psi \geq 2$. Заметим, что если для каждого $i = 1, 2$ обхват графа Ψ_i больше трех (то есть $\lambda(\Psi_i) = 0$), то

$$\delta_{11}(a, b_1) = \delta_{22}(a, b_2) = 0$$

и ввиду соотношений (1), (2), (3) и (4) получаем

$$\delta_{12}(a, b_i) = \lambda_i \quad (i = 1, 2), \quad \delta_{22}(a, b_1) = \lambda - 2\lambda_1, \quad \delta_{11}(a, b_2) = \lambda - 2\lambda_2,$$

что по (5) и (6) влечет

$$(\lambda - 2\lambda_1)k_1 = \lambda_2 k_2, \quad \lambda_1 k_1 = (\lambda - 2\lambda_2)k_2. \tag{23}$$

Таким образом, если $\lambda(\Psi_i) = 0$ $(i = 1, 2)$, то имеем либо $\lambda_i > 0$ и

$$(\lambda - 2\lambda_2)(\lambda - 2\lambda_1) = \lambda_1 \lambda_2, \tag{24}$$

либо $\lambda_i = \lambda = 0$.

Заметим, что в случае $\deg\Psi = r-1$ группа H имеет ровно две орбиты на $F\setminus\{a\}$ и тогда Ψ_1 и Ψ_2 — два взаимодополнительных графа ранга 3 на r вершинах.

1. Предположим, что $\deg\Psi = 2$. Тогда Ψ — r-цикл и $t_i = k_i$ $(i=1,2)$ и так как в этом случае $r \le 5$, то $\deg\Psi = r-1$, то есть Ψ — 3-цикл. Но тогда H фиксирует $F=\{a,a_1,a_2\}$ поточечно и для вершин a_1 и a_2 имеем $Q_i(a_i)\subset T(a)$ и $Q_2(a_1)\subset T(a_2)$, что влечет $T(a_1)=T(a)$, противоречие.

2. Предположим, что $\deg\Psi = 3$. Тогда $r\le 10$ четно, то есть $r=4,8$. Можно считать, что $t_1=k_1$ и $t_2=k_2/2$.

Пусть $r=4$. Тогда Ψ — 4-клика, Ψ_1 — объединение двух изолированных ребер и Ψ_2 — 4-цикл. Поэтому

$$\delta_{11}(a,b_1)=\delta_{11}(a,b_2)=\delta_{12}(a,b_1)=0,\quad \delta_{22}(a,b_2)=0$$

и ввиду соотношений (1), (2), (3) и (4) получаем

$$\lambda_1=0,\quad \delta_{12}(a,b_2)=\lambda-\lambda_2=\lambda_2,\quad \delta_{22}(a,b_1)=\lambda,$$

То есть $\lambda_2=\frac{1}{2}\lambda$ и по (7) $\lambda k_1=\lambda_2k_2$. Допустим, $\lambda>0$. Тогда $t_2=k_1\frac{\lambda}{2\lambda_2}=k_1$ и $\mathbf{E}_\tau = k_1\mathbf{A}(\Psi)$, следовательно $-k_1$ является собственным значением графа Γ и k_1 делит $\gcd(k,k_2)$, противоречие. Значит, $\lambda=0$, $k-1=3\mu$ и по п. (vi) предложения 1 получаем $2\ge\sqrt{\mu}$. Так как $k+1$ четно, то μ четно (см. по п. (v) предложения 1), то есть $\mu=2,4$ и $k=7,13$. Но тогда $\{n,m\}=\{1,k\}$, противоречие.

Случай $r=8$ исключается при помощи [18] тем же способом, что и в части I.

3. Предположим, что $\deg\Psi = 4$. Тогда $5\le r\le 17$ и можно считать, что либо $t_i=k_i/2$, $i=1,2$, либо $t_1=k_1$ и $t_2=k_2/3$.

3.1. Рассмотрим случай $\deg\Psi_1=\deg\Psi_2=2$. Тогда Ψ_i — объединение s_i изолированных l_i-циклов, $s_i\ge 1$ и l_i делит r. Ввиду границы (22) получаем $|W_i|\le 2$ и $d(\Psi_i)\le 3$ $(i=1,2)$, и поэтому $r=5,7$.

Пусть $r=5$ и Ψ — это 5-клика. Допустим, $\lambda>0$. Тогда по (23) имеем $k_2=\frac{(\lambda-2\lambda_1)}{\lambda_2}k_1 = xk_1$ и

$$\mathbf{E}_\tau = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_1 & k_2 & k_2\\ k_1 & 0 & k_2 & k_2 & k_1\\ k_1 & k_2 & 0 & k_1 & k_2\\ k_2 & k_2 & k_1 & 0 & k_1\\ k_2 & k_1 & k_2 & k_1 & 0\end{bmatrix} = \frac{k_1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & x & x\\ 1 & 0 & x & x & 1\\ 1 & x & 0 & 1 & x\\ x & x & 1 & 0 & 1\\ x & 1 & x & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\frac{(1+x)(-1\pm\sqrt{5})k_1}{4}=\frac{k(-1\pm\sqrt{5})}{4}$ являются собственными значениями графа Γ. Но тогда $\lambda=\mu$ и эти собственные значения равны $\pm\sqrt{k}$, что, очевидно, невозможно.

Значит, $\lambda=0$, $k+1=(r-1)\mu+2$ и по п. (vi) предложения 1 получаем $3\ge\sqrt{\mu}$. Но ввиду п. $(viii)$ предложения 1 число 5 делит $k+1$, поэтому и $(\mu,k)=(2,9)$, $(7,29)$. Второй случай невозможен, поскольку μ должно быть четно, см. п. (v) предложения 1. Тогда $k=9$ и $n=m=3$, но $\lambda-\mu=n-m$, противоречие.

Пусть $r=7$. По [18] в этом случае Ψ — это граф обхвата 3 на семи вершинах (7-циркулянт, см. п. $G3$ перечня из [18, p. 1111]) и ввиду (21) $k\le\frac{5}{2}\theta$. Если $\lambda=\mu$, то $r\le k\le 6$, противоречие. Если $\lambda\neq\mu$, то по п. (iv) предложения 1 имеем

$\theta = m \le n^2$, что влечет $n \le 2$ и $m \le 4$, то есть $k = 8$, противоречие с тем, что r делит $k+1$ в силу п. $(viii)$ предложения 1.

3.2. Теперь пусть $\deg \Psi_2 = 3$. Поскольку число вершин графа нечетной степени четно, то в этом случае $r = 8, 16$ и $d(\Psi) = 2$.

Пусть $r = 8$. В этом случае из неравенства (21) следует, что $k \le 3\theta$. Если $\lambda = \mu$, то $r \le k \le 9$. Если $\lambda \ne \mu$, то условие делимости числа $k+1$ на $m+n$ (см. замечание в начале части II доказательства) дает $(n, m) = (3, 5)$ и $k = 15$. Противоречие с тем, что тогда $\mathrm{rk}(\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^\Sigma)) = \mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma)$ [19].

Пусть $r = 16$. В этом случае из неравенства (21) следует, что $k \le 7\theta \le 7^3$, откуда по [19] $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 5$, $k = 35$, $k_1 = t_1 = 14$ и $k_2 = 21 = 3t_2$. Тогда $\lambda \ne \mu$, $(n, m) = (7, 5)$, $\lambda = 4$ и $\mu = 2$.

Предложение доказано. □

Пример 1. Пусть $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ — минимальное $(k+1, r, \mu)$-накрытие типа (T1) с $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$ и $k+1 \le 2500$. По [19] и с помощью компьютерной проверки в GAP [7] устанавливается, что тогда $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, за исключением случаев:

- (a) $k+1 = 36$, $k_1 = 14$, $k_2 = 21$, $G^\Sigma \simeq L_2(8)$, $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 5$ и $\widetilde{G}^\Sigma \simeq P\Gamma L_2(8)$,
- (b) $k+1 = 36$, $k_1 = 14$, $k_2 = 21$, $G^\Sigma \simeq U_3(3)$, $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 4$ и $\widetilde{G}^\Sigma \simeq P\Gamma U_3(3)$,
- (c) $k+1 = 2016$, $k_1 = 567$, $k_2 = 1512$, $G^\Sigma \simeq Sp_4(8)$, $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 5$ и $\widetilde{G}^\Sigma \simeq Sp_4(8).Z_3$.

Рассмотрим первые два. Перебор орбитальных графов для группы $L_2(8)$ в ее транзитивном представлении на 72 точках показывает, что граф Γ существует и имеет параметры $r = 2$ и $\mu \in \{16, 18\}$. При этом $\widetilde{G} = P\Gamma L_2(8) \times K$, $G' \simeq L_2(8)$ транзитивна на вершинах графа Γ и стабилизатор вершины в G изоморфен Z_7.

Перебор орбитальных графов для группы $P\Gamma U_3(3)$ в ее транзитивном представлении на 72 точках показывает, что граф Γ существует и имеет тот же набор параметров. При этом $\widetilde{G} = P\Gamma U_3(3) \times K$, $G' \simeq U_3(3)$ имеет две орбиты на вершинах графа Γ и стабилизатор вершины в G изоморфен $L_2(7)$. При $\mu = 18$ граф Γ имеет параметры $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$, допускает H-равномерное разбиение множества ребер с параметрами $\mu_1 = 9$, $\mu_2 = 12$. Кроме того, Γ удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет собственное значение $\gamma = -7$.

При фиксированном μ получающиеся графы изоморфны друг другу и являются дистанционно-транзитивными с $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq Z_2 \times Sp_6(2)$.

Пусть теперь $k+1 = 2016$. Перебор орбитальных графов для группы $Sp_4(8).Z_3$ в ее транзитивном представлении на 4032 точках показывает, что граф Γ существует и имеет параметры $r = 2$ и $\mu \in \{1024, 990\}$. При этом $\widetilde{G} = (Sp_4(8).Z_3) \times K$, $G' \simeq Sp_4(8)$ транзитивна на вершинах графа Γ и стабилизатор вершины в G изоморфен $L_2(64)$. Полная группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq Z_2 \times Sp_{12}(2)$ графа Γ действует дистанционно-транзитивно.

В компьютерных вычислениях применялся пакет GRAPE [20]. Конструкции указанных примеров графов $\Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ можно найти в [2, p. 228].

Предложение 4. *Предположим, что* Γ *— минимальное* $(k+1, r, \mu)$*-накрытие типа* (T1), $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$, Σ *— множество его антиподальных классов и* H *— стабилизатор вершины* a *в* $\widetilde{G}$. *Предположим к тому же, что* $\widetilde{G} = G$ *и* G *— квазипростая группа. Тогда число* r *— простое и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $r > 3$, *то либо* $G^\Sigma \simeq PSU_d(q)$ *и* r *делит* $\gcd(d, q+1)$, *либо* $G^\Sigma \simeq PSL_d(q)$ *и* r *делит* $\gcd(d, q-1)$.
2. *Если* $r = 3$ *и* $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, *то* $\gamma = 3(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$ *является собственным значением графа* Γ, *где* (μ_1, μ_2) — *параметры* H*-равномерного разбиения множества ребер.*
3. *Если* $r = 2$ *и* $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, *то* $\gamma = 2(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$ *является собственным значением графа* Γ *и* $\Gamma_1(a)$ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(k, \lambda, \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1)), \frac{\lambda}{2})$, *где* (μ_1, μ_2) — *параметры* H*-равномерного разбиения множества ребер.*

Доказательство. По условию имеем $K \leq Z(G)$ и $|K| = r$. Тогда $G_a \trianglelefteq G_{\{F\}}$ и поэтому $G_{\{F\}} = K \times G_a$. Отсюда G_a фиксирует F поточечно, то есть $G_a = G_F$ и поэтому $r \cdot \mathrm{rk}(G^\Sigma) = \mathrm{rk}(G)$.

Так как G — квазипростая группа и $K = Z(G)$, то $K \simeq \mathrm{M}(G^\Sigma)/\mathrm{M}(G)$ (см. [1, 33.8]). Ввиду того, что $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ — минимальное $(k+1, r, \mu)$-накрытие и $G = \widetilde{G}$ действует примитивно на Σ, получаем, что r — простое число. Действительно, если p — простой делитель числа r, то для подгруппы K_1 из K индекса p граф Γ^{K_1} является G/K_1-вершинно-транзитивным $(k+1, p, r\mu/p)$-накрытием. Поскольку действие группы G/K_1 на антиподальных классах графа Γ^{K_1} примитивно и ядро этого действия совпадает с K/K_1, то по выбору Γ заключаем $K_1 = 1$.

Как известно, мультипликатор Шура конечной неабелевой простой группы X либо тривиален, либо его порядок делится только на 2 или на 3, либо $\{2,3\}'$-часть от его порядка делит число $\gcd(d, q-1)$ при $X \simeq PSL_d(q)$ или число $\gcd(d, q+1)$ при $X \simeq PSU_d(q)$ (см., например, [13]). Применив п. $(viii)$ предложения 1, получаем, что справедливо утверждение 1.

Докажем утверждения 2 и 3. Пусть $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Положим $\Omega = \mathcal{V}(\Gamma)$, $\mathcal{Q} = \mathrm{O}rb_2(G)$ и выберем $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ такие, что $\mathcal{A}(\Gamma) = Q_1 \cup Q_2$, то есть $\Gamma = \Gamma(Q_1 \cup Q_2)^*$. Пусть $(a, b_i) \in Q_i$ и $|Q_i(a)| = k_i$, где $i = 1, 2$. По лемме 1 и теореме 1 множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение с параметрами (μ_1, μ_2), где $\mu_i = |\Gamma_1(b_i) \cap Q_i(x)|$ для $x \in F \setminus \{a\}$, $i = 1, 2$, и число

$$\gamma = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (\mu - \mu_1 - \mu_2) = r(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$$

является собственным значением графа Γ.

Пусть $r = 2$. Тогда $k = 2\mu + \lambda + 1$, Γ — недвудольный граф Тейлора, $\lambda > 0$ и по [2, Theorem 1.5.3] $\Delta := \Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, \lambda(\Delta), \frac{\lambda}{2})$, где $\lambda(\Delta) = \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1))$.

Предложение доказано. □

6. Спорадический случай

Здесь мы опишем абелевы минимальные $(k+1, r, \mu)$-накрытия $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ такие, что $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$ и G^Σ является спорадической простой группой. Основной результат раздела представлен следующей теоремой.

Теорема 2. *Предположим, что* $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ *является абелевым минимальным* $(k+1, r, \mu)$*-накрытием и* $\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^\Sigma)$ — *спорадическая простая группа. Тогда* $K \leq Z(G)$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(S1) *G' действует интранзитивно на вершинах графа Γ, $\widetilde{G} = G$, $G' \simeq M_{22}$, $k = 175$, $r = 2$, Γ — дистанционно-транзитивный граф Тейлора с $\mu \in \{72, 102\}$ и $\mathrm{Aut}(\Gamma) = HiS \times K$;*

(S2) *G — квазипростая группа, $r = 2$ и либо $G = Z_2.M_{22}$, $k = 175$ и $\{\lambda, \mu\} = \{72, 102\}$, либо $G = Z_2.Fi_{22}$, $k = 3509$ и $\{\lambda, \mu\} = \{1600, 1908\}$.*

Доказательство. Пусть $r = p^l$, где p — простое. Напомним, что по п. $(viii)$ предложения 1 число p делит $k+1$. Предположим, что $T = G^{\Sigma}(= \mathrm{Soc}(\widetilde{G}^{\Sigma}))$ — спорадическая группа и K — абелева группа. В этом случае допустимые возможности для T описываются таблицей 1, в которой приводится необходимая для дальнейших рассуждений информация о группе T (эти сведения можно почерпнуть в [15, таблица 4], [3, Ch. 11], [5], [13]).

Таблица 1

#	$k+1$	k_1, k_2	T	$T_{\{F\}}$	$\mathrm{M}(T)$	$\mathrm{Out}(T)$	$\mathrm{d_{min}}(T)$
1	55	18, 36	M_{11}	$M_9.2$	1	1	11
2	66	20, 45	M_{12}	$M_{10}.2$ (2 кл.)	Z_2	Z_2	12
3	77	16, 60	M_{22}	$2^4.A_6$	Z_{12}	Z_2	22
4	100	22, 77	HiS	M_{22}	Z_2	Z_2	$k+1$
5	100	36, 63	HJ	$U_3(3)$	Z_2	Z_2	$k+1$
6	176	70, 105	M_{22}	A_7	Z_{12}	Z_2	22
7	253	42, 210	M_{23}	$M_{21}.2$	1	1	23
8	253	112, 140	M_{23}	$2^4.A_7$	1	1	23
9	275	112, 162	McL	$U_4(3)$	Z_3	Z_2	$k+1$
10	276	44, 231	M_{24}	$M_{22}.2$	1	1	24
11	1288	495, 792	M_{24}	$M_{12}.2$	1	1	24
12	1782	416, 1365	Suz	$G_2(4)$	Z_6	Z_2	$k+1$
13	2300	891, 1408	Co_2	$U_6(2).2$	1	1	$k+1$
14	3510	693, 2816	Fi_{22}	$2.U_6(2)$	Z_6	Z_2	$k+1$
15	4060	1755, 2304	Ru	${}^2F_4(2)$	Z_2	1	$k+1$
16	14080	3159, 10920	Fi_{22}	$\Omega_7(3)$ (2 кл.)	Z_6	Z_2	3510
17	31671	3510, 28160	Fi_{23}	$2.Fi_{22}$	1	1	$k+1$
18	137632	28431, 109200	Fi_{23}	$P\Omega_8^+(3).S_3$	1	1	$k+1$
19	306936	31671, 275264	Fi_{24}'	Fi_{23}	Z_3	Z_2	$k+1$

Покажем сначала, что $K \leq Z(G)$. Предположим обратное. Тогда по предложению 2 имеем $\mathrm{d_{min}}(T) < k+1$, то есть реализуется один из случаев # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 16. Но в любом из них ограничение $T \leq \mathrm{Aut}(K) \simeq GL_l(p)$ влечет $r = p^l \geq k+1$, противоречие.

Так как $\mathrm{rk}(T) = 3$, то по предложению 2 заключаем $K \leq Z(G)$ и можно считать, что $r = p$. Положим $N = G'$. Пусть L — стабилизатор антиподального класса F в N и $a \in F$.

Случай $N \simeq T$. Допустим, что N интранзитивна на вершинах графа Γ. В этом случае $r = 2$ и Γ — граф из п. 2(i) предложения 3, то есть Γ — недвудольный граф Тейлора, и $2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) = k - 1$ (Φ_1 и Φ_2 определяются так же, как и в разделе 4).

Ввиду п. $(viii)$ предложения 1 получаем, что число $k+1$ четно. Этим сразу исключаются случаи # 1, 3, 7, 8, 17.

Полный перебор остальных случаев с учетом классификации графов Φ_1, Φ_2 (см. например, [3, Table 11.7]) показывает, что тождество $2(\lambda(\Phi_1)+\lambda(\Phi_2)+1) = k-1$ выполняется только в случае #6. Отсюда $k+1 = 176$, граф Φ_1 имеет параметры $(176, 70, 18, 34)$ и граф Φ_2 имеет параметры $(176, 105, 68, 54)$. Значит, $\{\lambda, \mu\} = \{72, 102\}$. В этом случае $\widetilde{G} = G$, $N \simeq M_{22} \leq HiS$ и Γ — дистанционно-транзитивный граф с $\mathrm{Aut}(\Gamma) = K \times HiS$ (последний факт проверен с помощью вычислений в GRAPE [20]).

Теперь пусть N транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда L содержит нормальную подгруппу L_a индекса r, $r=2$ и реализуется один из случаев # 2, 10, 11, 13, 18. При этом $\lambda > 0$ и $\Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, \frac{1}{2}(3\lambda-(k+1)), \frac{\lambda}{2})$. По лемме 1 и теореме 1 имеем $k_1 - 1 = \lambda_1 + \mu_1$, $k_2 - 1 = \lambda_2 + \mu_2$ и число $\gamma = 2(\mu - (\mu_1+\mu_2)) - 1$ является собственным значением графа Γ. Отсюда $k = (2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1)z$ для некоторого целого z.

Пусть $k+1 = 276$. Тогда $\widetilde{G} = G$ и граф Φ_1 имеет параметры $(276, 44, 22, 4)$ и граф Φ_2 имеет параметры $(276, 231, 190, 210)$. Допустим, $\lambda = \mu = 137$. Поскольку $\gamma = 2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1 = 274-2(\mu_1+\mu_2)-1 \neq \pm\sqrt{275}$, получаем $\mu = \mu_1+\mu_2$. Тогда из соотношения (17) следует, что $44(\mu-\mu_1) = 44\mu_2 = 231(\mu-\mu_2)$, то есть $275\mu_2 = 231\mu$, противоречие. Значит, $\lambda \neq \mu$. Так как по п. (vii) предложения 1 число $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m) = 276\gcd(n,m)$, то $\{n,m\} = \{55, 5\}$ и, учитывая п. (iii) предложения 1, получаем $\lambda - \mu = \pm 50$, то есть $\pm 50 \cdot 274 = \lambda^2 - \mu^2$. Значит, $\{\lambda, \mu\} = \{112, 162\}$. Но, как показывают компьютерные вычисления в GAP, в данном представлении на 552 точках подстановочный ранг группы M_{24} равен 7, причем длины подорбит равны 1^2, 22^4, 462^1, противоречие.

Пусть $k+1 = 2300$. Тогда $\widetilde{G} = G$ и граф Φ_1 имеет параметры $(2300, 891, 378, 324)$ и граф Φ_2 имеет параметры $(2300, 1408, 840, 896)$. Как и выше, $\lambda \neq \mu$ и ввиду пп. (vii), (iii) предложения 1 число $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m) = 2300\gcd(n,m)$, что влечет $\{n,m\} = \{11, 209\}$ и $\{\lambda,\mu\} = \{1050, 1248\}$. Но, как показывают компьютерные вычисления в GAP, в данном представлении на 4600 точках подстановочный ранг группы Co_2 равен 5, причем длины подорбит равны 1^2, 891^2, 2816^1, противоречие.

Пусть $k+1 = 66, 1288, 137632$. Допустим, $\lambda = \mu = (k-1)/2$. Поскольку $\gamma = 2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1 = k-1-2(\mu_1+\mu_2)-1 \neq \pm\sqrt{k}$, получаем $\mu = \mu_1+\mu_2$. Тогда из соотношения (17) следует, что $k_1(\mu-\mu_1) = k_1\mu_2 = k_2(\mu-\mu_2)$, то есть $k\mu_2 = k_2\mu$, противоречие. Значит, $\lambda \neq \mu$. Но тогда по п. (vii) предложения 1 число $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m)$, противоречие во всех подслучаях.

Случай $Z(N) = K$. Пусть $r = 3$. Тогда $k-1 = \lambda + 2\mu$ и так как $k+1$ должно делиться на 3 в силу п. $(viii)$ предложения 1, то допустимы только случаи # 12, 14, 19. По лемме 1 и теореме 1 имеем $k_1 - 1 = \lambda_1 + 2\mu_1$, $k_2 - 1 = \lambda_2 + 2\mu_2$ и число $\gamma = 3(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1$ является собственным значением графа Γ. Отсюда $k = (3(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1)z$ для некоторого целого z.

Так как $\gcd(k-1, k+1)$ не делится на 3, то $\lambda \neq \mu$. Но тогда ввиду пп. (iv), (vii) предложения 1 получаем $m \leq n^2$ и $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m)$, что влечет противоречие во всех подслучаях.

Пусть $r = 2$. Тогда $k-1 = \lambda+\mu$ и так как по п. $(viii)$ предложения 1 число $k+1$ должно быть четно, то допустимы только случаи # 2, 4–6, 12, 14–16. По лемме 1 и теореме 1 имеем $k_1 - 1 = \lambda_1 + \mu_1$, $k_2 - 1 = \lambda_2 + \mu_2$ и число $\gamma = 2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1$ является собственным значением графа Γ. Отсюда

$k = (2(\mu - (\mu_1 + \mu_2)) - 1)z$ для некоторого целого z. При этом $\lambda > 0$ и $\Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1)), \frac{\lambda}{2})$.

Допустим, $\lambda = \mu = (k-1)/2$. Поскольку $\gamma = 2(\mu - (\mu_1 + \mu_2)) - 1 = k - 1 - 2(\mu_1 + \mu_2) - 1 \neq \pm\sqrt{k}$, получаем $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Тогда из соотношения (17) следует, что $k_1(\mu - \mu_1) = k_1\mu_2 = k_2(\mu - \mu_2)$, то есть $k\mu_2 = k_2\mu = (k-1)\mu/2$, противоречие.

Значит, $\lambda \neq \mu$. Но тогда из п. (vii) предложения 1 следует, что $n + m$ делит $(k+1)\gcd(n, m)$. Отсюда следует, что имеет место одна из следующих возможностей: либо $k = 99$, $(n, m, \mu) = (9, 11, 50)$, $(11, 9, 48)$, либо $k = 175$, $(n, m, \mu) = (5, 35, 102)$, $(35, 5, 72)$, либо $k = 3509$, $(n, m, \mu) = (11, 319, 1908)$, $(319, 11, 1600)$, либо $k = 4059$, $(n, m, \mu) = (41, 99, 2058)$, $(99, 41, 2000)$, либо $k = 14079$, $(n, m, \mu) = (19, 741, 7400)$, $(57, 247, 7134)$, $(247, 57, 6944)$, $(741, 19, 6678)$. Сопоставив равенство

$$\mu_1 = -\mu_2 + \mu - \frac{1+\gamma}{2}$$

и соотношение (17), получаем

$$k\mu_2 = k_2\mu - k_1\frac{1+\gamma}{2}.$$

Учитывая, что $0 \leq \mu_1 \leq k_1$, этим исключаются все случаи, кроме случаев # 4–6,14, в которых либо $k = 99$, $k_1 = 22$ и $(\gamma, \mu_1, \mu_2) = (-11, 15, 40)$, $(11, 6, 36)$, либо $k = 99$, $k_1 = 36$ и $(\gamma, \mu_1, \mu_2) = (-9, 20, 32)$, $(9, 15, 30)$, либо $k = 175$ и $(\gamma, \mu_1, \mu_2) = (-35, 51, 68)$, $(5, 39, 60)$, $(-5, 30, 44)$, $(35, 18, 36)$, либо $k = 3509$ и $(\gamma, \mu_1, \mu_2) = (11, 372, 1530)$, $(-11, 320, 1285)$. Как показывают вычисления в GAP, если $G = Z_2.HiS$, то G не содержит подгрупп индекса 200, а если $G = Z_2.HJ$, то $\mathrm{rk}(G) = 5$. Поэтому $k \neq 99$.

Теорема доказана. □

Замечание 1. Граф Тейлора из п. $(S1)$ заключения теоремы 2 существует, известен и для каждого фиксированного набора параметров k, r и μ является единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным $(k+1, r, \mu)$-накрытием (см., например, [12]). Существование графов Тейлора из п. $(S2)$ заключения теоремы 2, равно как и накрытий, описываемых ниже в следствии 1, неизвестно.

Следствие 1. *Предположим, что* Γ *является абелевым* $(k+1, r, \mu)$*-накрытием со свойством* $(*)$ *и* $T := \mathrm{Soc}(\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma)$ — *спорадическая простая группа ранга* 3. *Тогда* Γ *является* $(r/2)$*-накрытием графа Тейлора из п.* $(S2)$ *заключения теоремы 2 и либо* $T \simeq M_{22}$, $k = 175$ *и* $r\mu/2 \in \{72, 102\}$, *либо* $T \simeq Fi_{22}$, $k = 3509$ *и* $r\mu/2 \in \{1600, 1908\}$.

Представляется возможным применить предложенные в этой статье методы исследования абелевых $(k+1, r, \mu)$-накрытий со свойством $(*)$ для рассмотрения остальных случаев для $\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^\Sigma)$ при условии $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$, опираясь на классификацию примитивных почти простых групп соответствующего ранга. Это будет предметом одной из последующих публикаций автора.

References

[1] M. Aschbacher, *Finite group theory. 2nd ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Zbl 0997.20001

[2] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073

[3] A.E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, preprint https://homepages.cwi.nl/ aeb/math/srg/rk3/srgw.pdf

[4] A.E. Brouwer, W.H.Haemers. *Spectra of graphs*, Springer, Berlin, 2012. Zbl 1231.05001

[5] J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker, R. Wilson, *Atlas of finite groups. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups.from J. G. Thackray*, Clarendon Press, Oxford, 1985. Zbl 0568.20001

[6] J.D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation groups*, Springer, New York, 1996. Zbl 0951.20001

[7] The GAP Group, GAP Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.8, 2015.

[8] A. Gardiner, *Antipodal graphs of diameter three*, Linear Algebra Appl., **46** (1982), 215–219. Zbl 0497.05053

[9] A. Gardiner, C.E. Praeger, *On 4-valent symmetric graphs*, Eur. J. Comb., **15**:4 (1994), 375–381. Zbl 0806.05037

[10] C.D. Godsil, *Krein covers of complete graphs*, Australas. J. Comb., **6** (1992), 245–255. Zbl 0776.05086

[11] C.D. Godsil, A.D. Hensel, *Distance regular covers of the complete graph*, J. Comb. Theory, Ser. B., **56**:2 (1992), 205–238. Zbl 0771.05031

[12] C.D. Godsil, R.A. Liebler, C.E. Praeger, *Antipodal distance transitive covers of complete graphs*, Eur. J. Comb., **19**:4 (1998), 455–478. Zbl 0914.05035

[13] D. Gorenstein, *Finite simple groups. An introduction to their classification*, Plenum Press, New York etc., 1982. Zbl 0483.20008

[14] M.H. Klin, C. Pech, *A new construction of antipodal distance regular covers of complete graphs through the use of Godsil-Hensel matrices*, Ars Math. Contemp., **4**:2 (2011), 205–243. Zbl 1245.05136

[15] V.D. Mazurov, *Minimal permutation representation of Thompson's simple group*, Algebra Logic, **27**:5 (1988), 350–361. Zbl 0688.20004

[16] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, L.Yu. Tsiovkina, *Arc-transitive distance-regular coverings of cliques with $\lambda = \mu$*, Proc. Steklov Inst. Math., **284**, Suppl. 1, (2014), S124–S134. Zbl 1304.05038

[17] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, L.Yu. Tsiovkina, *Edge-symmetric distance-regular coverings of complete graphs: the almost simple case*, Algebra Logic, **57**:2 (2018), 141–152. Zbl 1434.05159

[18] B.D. McKay, *Transitive graphs with fewer than twenty vertices*, Math. Comput., **33** (1979), 1101–1121. Zbl 0411.05046

[19] C.M. Roney-Dougal, *The primitive permutation groups of degree less than 2500*, J. Algebra, **292**:1 (2005), 154–183. Zbl 1107.20001

[20] L.H. Soicher, *The GRAPE package for GAP, Version 4.6.1*, 2012, http://www.maths.qmul.ac.uk/ leonard/grape/

[21] L.Yu. Tsiovkina, *Arc-transitive groups of automorphisms of antipodal distance-regular graphs of diameter 3 in affine case*, Sib. Élektron. Mat. Izv., **17** (2020), 445–495. Zbl 1435.20006

[22] H. Wielandt, *Finite permutation groups*, Academic Press, New York and London, 1964. Zbl 0138.02501

Ludmila Yur'evna Tsiovkina
Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16, S. Kovalevskaya str.,
Yekaterinburg, 620990, Russia
Email address: tsiovkina@imm.uran.ru