S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 740–743 (2021) УДК 514.772.35
DOI 10.33048/semi.2021.18.054 MSC 53C

НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЖЕСТКОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ И ОБЩИХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

И.Х. САБИТОВ

Abstract. We present some new proofs of infinitesimal rigidity of convex polyhedra and convex surfaces of revolution.

Keywords: convex polyhedra, convex surfaces of revolution, infinitesimal rigidity.

1. Известно, что между свойствами поверхности быть жесткой/нежесткой относительно бесконечно малых (б.м.) изгибаний 1-го порядка и быть изгибаемой/неизгибаемой нет однозначно формулируемой связи, есть только некоторые утверждения, зависящие от класса гладкости рассматриваемых деформаций. Поэтому, вообще говоря, неизгибаемая поверхность может допускать б.м. изгибания 1-го порядка (т.е.быть нежесткой) и, наоборот, жесткая поверхность может оказаться изгибаемой. Есть теорема, утверждающая, что если рассматриваются деформации поверхности, аналитически зависящие от параметра деформации (скажем, от времени), тогда из жесткости 1-го порядка следует неизгибаемость поверхности в этом классе деформаций, см [1], §30. В работе [2], п. 1.4 этот признак неизгибаемости дополнен так называемым *принципом C^n-неизгибаемости*: если C^n-гладкое по параметру изгибание происходит в классе жестких поверхностей, тогда это изгибание тривиальное.

Как уже было сказано, обратное утверждение неверно - из неизгибаемости не следует жесткость. Но если потребовать больше, а именно, предположить, что деформации происходят в классе поверхностей, каждая из которых *однозначно определена* своей метрикой (т.е., не только неизгибаема, но и не имеет

Sabitovv, I.Kh., New proofs of infinitesimal rigidity of convex polyhedra and convex surfaces of revolution.

Поступила 7 мая 2021 г., опубликована 29 июня 2021 г.

дискретно расположенных изометричных поверхностей), тогда из этого следует, что каждая поверхность этого семейства является жесткой. Это мы и используем ниже для получения нового доказательства жесткости строго выпуклых многогранников (а вообще, наше доказательство можно рассматривать как пополнение большого списка различных доказательств жесткости выпуклых многогранников, начиная с доказательства Дена 1916 года, и оно может быть интересным предложенным новым методом доказательства жесткости).

Далее, в работе [3] доказано, что замкнутая выпуклая поверхность вращения, не имеющая плоских кусков, является жесткой. Доказательство проводится для выпуклой поверхности без всяких дополнительных условий гладкости. Мы доказываем ту же теорему другим способом на основе результатов работы [4].

2. Доказываем теорему

Теорема 1. *Строго выпуклый многогранник с жесткими гранями является жестким относительно б.м. изгибаний 1-го порядка.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай многогранника P с треугольными гранями. Под строгой выпуклостью мы имеем в виду, что все внутренние двугранные углы строго меньше π. Пусть $M_i(x_i, y_i, z_i)$ - вершины многогранника. Пусть многогранник допускает б.м. изгибание, которое в вершинах M_i имеет вектор поля б.м. изгибания $Z_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Тогда для каждого ребра с вершинами в M_i и M_j выполнено уравнение

$$(1) \qquad (x_i - x_j)(\xi_i - \xi_j) + (y_i - y_j)(\eta_i - \eta_j) + (z_i - z_j)(\zeta_i - \zeta_j) = 0.$$

Для каждой вершины M_i построим ее траектории при б.м. изгибании $M_i \to \tilde{M}_i = M_i \pm \varepsilon Z_i$. Соединим точки $\tilde{M}_i$ с другими точками по той же комбинаторной схеме, что и в исходном многограннике P. Получим два многогранника P' и P'' одного и того же комбинаторного строения. Соответствующие ребра в P' и P'' имеют одинаковую длину, так как в обоих случаях $|\tilde{M}_i\tilde{M}_j|^2 = |M_iM_j|^2 + \varepsilon^2|Z_iZ_j|^2$. Так как грани треугольные, то по равенству длин ребер многогранники P' и P'' изометричны и имеют соответствующие конгруэнтные грани. Кроме того, при достаточно малых ε оба этих многогранника выпуклые, так как при достаточно малой деформации строго выпуклые многогранники остаются выпуклыми. К тому же они одинаково ориентированы. По теореме Лежандра-Коши выпуклые многогранники однозначно определяются своей метрикой, комбинаторным строением и ориентацией. Значит, многогранники P' и P'' конгруэнтны и получаются один из другого некоторым движением, что может быть только если б.м. изгибание Z тривиально.

Рассмотрим теперь случай, когда грани многогранника не обязательно являются треугольными. Грани предполагаются жесткими (иначе всегда можно построить нетривиальное поле б.м. изгибания, равное нулю на всех ребрах и ортогональное к каждой грани). Это значит, что каждая грань, как целый объект, может подвергаться только тривиальному б.м. изгибанию. А поле тривиального б.м. изгибания задается как поле начальных скоростей движения, т.е. как перенос любой точки $r = \{x, y, z\}$ на некоторый вектор $A = \{a, b, c\}$ и вращение ее с некоторым вектором угловой скорости $\omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$. В формальной записи это имеет вид

$$(2) \quad Z(x, y, z) = A + [\omega \times r] = \{a, b, c\} + \{\omega_2 z - w_3 y,\ \omega_3 x - \omega_1 z,\ \omega_1 y - \omega_2 x\}.$$

Деформация, задаваемая вектором тривиального б.м. изгибания (2), и переводящая вершины M_i в точки $\tilde{M}_i = M_i \pm \varepsilon Z_i$, в пределах одной грани является аффинным преобразованием, поэтому вершины грани как лежащие на одной плоскости, переходят в точки, тоже лежащие на одной плоскости, и данный многогранник P с вершинами M_i переходит в многогранники P' и P'' соответственно с вершинами в $\tilde{M}_i = M_i + \varepsilon Z_i$ и $\tilde{M}_i = M_i - \varepsilon Z_i$. При этом расстояния в P' и P'' между всеми парами вершин грани, в том числе между концами диагоналей, имеют одинаковые значения $|\tilde{M}_i\tilde{M}_k|^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2 + \varepsilon^2|Z_k - Z_i|^2$. Значит, выпуклые многогранники P' и P'' имеют одинаковое комбинаторное строение с конгруэнтностью соответствующих граней, и поэтому они по теореме Лежандра-Коши конгруэнтны. Следовательно, предполагаемое б.м. изгибание тривиально не только на гранях, но и в целом на всем многограннике P. □

Замечание 1. *Условие жесткости граней не существенно в случае симплициальности многогранника, но существенно для многогранников с нетреугольными гранями. Именно, когда мы изучаем жесткость каркаса и тем самым предполагаем выполнение уравнения (1) только на ребрах, тогда жесткости каркаса не будет (по этому поводу см. большой список литературы в* [5]*).*

3. Теперь докажем теорему

Теорема 2. *Замкнутая выпуклая поверхность вращения без плоских областей является жесткой.*

Доказательство. Под замкнутой поверхностью вращения понимается поверхность с двумя полюсами. Очевидно, плоские области на ней могут быть, только если ее меридиан имеет прямолинейный отрезок, ортогональный к оси вращения.

Пусть поверхность получена вращением ее меридиана $r = r(x)$ вокруг оси Ox и пусть полюса расположены в точках с координатами $x = 0$ и $x = a > 0$. Пусть $v \in [0, 2\pi]$ - угол вращения, $\alpha(x, v)$ - компонента по оси вращения вектора б.м. изгибания поверхности, разложенная в ряд Фурье

$$\alpha(x, v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{inv}.$$

Так как $\bar{\varphi}_{-n} = \varphi_n$, уравнения можно свести к действительным функциям $\varphi_n(x)$, причем с $n \geq 2$ (значениям $n = 0$ и ± 1 соответствуют тривиальные б.м. изгибания). В работе [4] доказано, что в промежутке (x_c, a), где абсциссе x_c соответствует наибольшее значение ординаты $r(x_c)$ меридиана, существует счетное множество параллелей $x_2 > x_3 > ... > x_m > ...$, стремящихся к x_c, таких, что на них $\varphi_m(x_m) = 0$ (если $r(x)$ достигает максимума на некотором отрезке, тогда за x_c принимается правый конец этого отрезка). Равенство $\varphi_m(x_m) = 0$ означает, что соответствующее б.м. изгибание происходит скольжением поверхности по плоскости параллели с $x = x_m$. Из результатов [4] следует также, что равенство $\varphi(x) = 0$ при $x < x_c$ невозможно,

Далее, полюса поверхности вращения равноправны в том смысле, что если есть ее б.м. изгибание, то исследование поведения поля б.м. изгибания можно начинать как с одного, так и с другого полюса (например, достаточно взять зеркальный образ поверхности, и правый полюс станет левым начальным). Следовательно, если мы начнем исследование с полюса с координатой $x = a$, тогда компонента с $\varphi_n(x) = 0$ должна обращаться в ноль на параллелях, лежащих левее точки $x = x_c$, что невозможно.Теорема о жесткости поверхности вращения доказана.

$\square$

References

[1] N.V. Efimov, *Qualitative problems on the theorie of deformations of surfaces*, Usp. Mat. Nauk, **3**:2(24) (1948), 47–158. Zbl 0030.06901

[2] I. Ivanova-Karatopraklieva, I.Kh. Sabitov, *Surface deformation. I*, J. Math. Sci., New York, **70**:2 (1994), 1685–1710. Zbl 0835.53003

[3] A.D. Alexandrov, *About the infinitesimal bending of non-regular surfaces*, Rec. Math. Moscou, n. Ser., **1** (1936), 307–322. Zbl 0014.41304

[4] E. Andreichin, I.Kh. Sabitov, *Generalization of Rembs' theorem to general convex surfaces of revolution*, Ukr. Geom. Sb., **26** (1983), 13–24. Zbl 0536.53060

[5] I. Ivanova-Karatopraklieva, I.Kh. Sabitov, *Bending of surfaces. II*, J. Math. Sci., New York, **74**:3 (1995), 997–1043). Zbl 0861.53002

Idzhad Khakovich Sabitov
Lomonosov Moscow State Univerity,
1, Leninskii Gory,
Moscow, 119991, Russia
Email address: isabitov@mail.ru