S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 51–60 (2020) УДК 517.928.2
DOI 10.33048/semi.2020.17.005 MSC 34E20

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ «СЛАБОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

А.Г. ЕЛИСЕЕВ, П.В. КИРИЧЕНКО

Abstract. The paper proposes a method for constructing an asymptotic solution of the singularly perturbed Cauchy problem in the case of violation of the stability conditions of the spectrum of the limit operator. In particular, we consider the problem with a turning point where eigenvalues "stick together" at $t = 0$.

Keywords: singularly perturbed Cauchy problem, turning point, regularization method.

1. Введение

В данной работе методом регуляризации Ломова С.А. [1] строится регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущенной неоднородной задачи Коши на всем отрезке $[0, T]$ при наличии спектральной особенности в виде «слабой» точки поворота 1-го порядка у предельного оператора. Определение «слабой» точки поворота будет дано ниже.

Отметим работы [2], [3] и [4], посвященные построению асимптотики решения сингулярно возмущенных задач Коши при наличии спектральных особенностей у предельного оператора.

Новизна представленной работы состоит в том,что методом регуляризации строится глобальная регуляризованная асимптотика на всем отрезке $[0, T]$ неоднородной задачи Коши с произвольными начальными условиями. Наши исследования являются развитием работы [2], в которой описана методика

Eliseev, A.G., Kirichenko, P.V., A solution of the singularly perturbed Cauchy problem in the presence of a «weak» turning point at the limit operator.

Поступила 26 февраля 2019 г., опубликована 4 февраля 2020 г.

построения регуляризованного асимптотического решения для задач с нестабильным спектром с «простой» точкой поворота, т.е. ситуации, в которой собственные значения в отдельных точках обращаются в нуль (как сказано в [2] "предельный оператор дискретно необратим"). Основные идеи настоящей работы тезисно изложены в [5]. Для того, чтобы выявить особенности построения асимптотики решения в случае «слабой» точки поворота и не усложнять изложение дополнительными вычислениями при наличии стабильной части спектра, мы будем рассматривать задачу в $\mathbf{R^2}$.

Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u} = A(t)u + h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \end{cases} \tag{1}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty([0,T], \mathbf{R^2})$;
2) $A(t) \in C^\infty([0,T], \mathcal{L}(\mathbf{R^2}, \mathbf{R^2}))$;
3) для собственных значений оператора $A(t)$:
   а) $\forall t \in (0,T] \quad \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$;
   б) $\forall t \in [0,T] \quad \lambda_i(t) \neq 0, \quad i = 1,2$;
4) условие «слабой» точки поворота 1-го порядка в точке $t = 0$:
   $\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = ta(t)$, $a(t) \neq 0$, причем геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для любых $t \in [0,T]$;
5) $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \leqslant 0, \quad i = 1,2, \quad$ при $\quad t \in [0,T]$.

Основной проблемой метода регуляризации при решении сингулярно возмущенных задач является описание сингулярного многообразия (функций). В случае стабильного спектра $A(t)$ это:

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right), \quad \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right), \quad \text{где} \quad \varphi_i(t) = \int\limits_0^t \lambda_i(s)\,ds, \quad i = 1,2.$$

При наличии точечных особенностей спектра все обстоит значительно сложнее. Если точечная особенность имеет вид 4), то регуляризирующие функции находятся из задачи Коши

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{J}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} J + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J, \\ J(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) в явном виде не решается. Найдем решение (2) методом последовательных приближениий.

Лемма 1. *Решение (2) представляется в виде равномерно сходящегося ряда на* $[0,T] \times (0,\varepsilon_0]$, *которое допускает оценку*

a) если $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant -\delta < 0$, *то*

$$\|J\|_{C\,[0,T]} \leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\mathbb{C},$$

b) если $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, *то*

$$\|J\|_{C\,[0,T]} \leqslant \mathbb{C},$$

где $\mathbb{C} > 0$ — *константа, не завичсящая от* ε.

Доказательство. Решив (2) методом последовательных приближений, получим:

$$J(t) = \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int\limits_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right)\cdot T\cdot \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) ds$$
$$+\exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int\limits_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right)\cdot T\cdot \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right)\int\limits_0^s \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\right)\cdot T$$
$$\cdot \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\right) ds_1\, ds + \ldots,$$

$$\text{здесь}\quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \Lambda_0^t = \begin{pmatrix}\varphi_1(t) & 0\\ 0 & \varphi_2(t)\end{pmatrix}.$$

Используя свойство

$$T\cdot\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}\varphi_1(t) & 0\\ 0 & \varphi_2(t)\end{pmatrix}\right) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}\varphi_2(t) & 0\\ 0 & \varphi_1(t)\end{pmatrix}\right)\cdot T,$$

получим

$$J(t) = \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int\limits_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)T\, ds$$
$$+\exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int\limits_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)\int\limits_0^s \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_1}\right)T\, ds_1\, ds \tag{3}$$
$$+\exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int\limits_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)\int\limits_0^s \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_1}\right)\cdot\int\limits_0^{s_1} \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_2}\right)T\, ds_2\, ds_1\, ds + \ldots,$$

$$\text{здесь}\quad \triangle_0^t = \begin{pmatrix}\varphi_2(t)-\varphi_1(t) & 0\\ 0 & \varphi_1(t)-\varphi_2(t)\end{pmatrix}.$$

Покомпонентно (3) выглядит

$$J_1(t) = \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right)\int\limits_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) ds$$
$$+\exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right)\int\limits_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)\int\limits_0^s \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right) ds_1\, ds + \ldots,$$
$$J_2(t) = \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right) + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right)\int\limits_0^t \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) ds \tag{4}$$
$$+\exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right)\int\limits_0^t \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)\int\limits_0^s \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right) ds_1\, ds + \ldots$$

Равномерная сходимость рядов (4) следует из оценок:

a) $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant -\delta < 0, \quad t\in[0,T].$

$$\left|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\right| \leqslant e^{-\delta t/\varepsilon},$$
$$\left|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{(\varphi_2(s)-\varphi_1(s))/\varepsilon}\, ds\right| \leqslant \int\limits_0^t e^{\int\limits_s^t \operatorname{Re}\lambda_1(s_1)\, ds_1/\varepsilon + \int\limits_0^s \operatorname{Re}\lambda_2(s_2)\, ds_2/\varepsilon} ds$$
$$\leqslant \int\limits_0^t e^{-\delta(t-s+s)/\varepsilon}\, ds = e^{-\delta t/\varepsilon}\cdot t,$$

. . . .

$$\left|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon}\int\limits_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon}\dots\int\limits_0^{s_{n-1}} e^{(-1)^n\Delta\varphi(s_n)/\varepsilon}\,ds_n\dots ds_1\right|$$
$$\leqslant \int\limits_0^t\int\limits_0^{s_1}\dots\int\limits_0^{s_{n-1}} e^{\left(\varphi_1(t)-\varphi_1(s_1)+\ldots+(-1)^{n+1}\varphi_1(s_n)\right)/\varepsilon}$$
$$\times\, e^{(\varphi_2(s_1)-\varphi_2(s_2)+\ldots+(-1)^n\varphi_2(s_n))/\varepsilon}\,ds_1\dots ds_n \leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\cdot\frac{t^n}{n!}$$

Таким образом

$$|J_1(t,\varepsilon)| \leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\cdot e^t \leqslant e^T\cdot e^{-\delta t/\varepsilon};$$

аналогично

$$|J_2(t,\varepsilon)| \leqslant e^T\cdot e^{-\delta t/\varepsilon}.$$

$b)$ $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0, \quad t\in[\,0,T]$

$$|J_i(t)| \leqslant e^T, \qquad i=1,2.$$

Следовательно, ряды (4) сходятся равномерно по ε и t на $[\,0,T]\times(\,0,\varepsilon_0]$. Кроме того, легко проверяется, что ряды выдерживают действие оператора $\varepsilon\frac{d}{dt}$ в любой степени.

□

Введем обозначения

$$\sigma_{1,k} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\underbrace{\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon}\int\limits_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon}\dots\int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k\text{ интегралов}}\,ds_k\dots ds_1,$$

$$\sigma_{2,k} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}\underbrace{\int_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon}\int_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon}\dots\int_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^k\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k\text{ интегралов}}\,ds_k\dots ds_1,$$

Нетрудно установить, что $\sigma_{i,k}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases}\varepsilon\dot{\sigma_{1,k}} = \lambda_1(t)\sigma_{1,k}+\varepsilon\sigma_{2,k-1},\\ \varepsilon\dot{\sigma_{2,k}} = \lambda_2(t)\sigma_{2,k}+\varepsilon\sigma_{1,k-1},\\ \sigma_{1,k}(0)=0, \sigma_{2,k}(0)=0, k\geqslant 1.\end{cases}$$

Для обоснования формализма метода регуляризации в случае «слабой» точки поворота сформулируем и докажем ещё одно утверждение.

Лемма 2. *Пусть дана матрица $A(t)$, удовлетворяющая условиям* 2) ÷ 4) *из постановки задачи* (1)*. Тогда $\lambda_i(t)\in C^\infty[\,0,T]$, $i=1,2$.*

Доказательство. Так как $\lambda_1(0)=\lambda_2(0)=\lambda_0$, то

$$A(0) = \begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix} = \lambda_0 I.$$

На основании леммы Адамара

$$A(t)-\lambda_0 I = t^p B(t),$$

где $B(t)$ — диагонализируемая матрица, p — целое положительное число (в нашем случае $p=1$). Для матриц $B(t)$, удовлетворяющих условиям стабильности ($\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$, $i=1,2$, $\mu_{1,2}(t)$ — собственные значения матрицы $B(t)$) известно, что, если $B(t) \in C^\infty[0,T]$, то собственные значения $\mu_i(t) \in C^\infty[0,T]$ и собственные векторы $e_i(t) \in C^\infty[0,T]$, $i=1,2$ [6] (стр. 55-60). В нашем случае это можно показать и непосредственно, так как $\mu_i(t)$ — корни квадратного уравнения с гладкими коэффициентами. Отсюда и $\lambda_i = \lambda_0 + t^p \mu_i(t) \in C^\infty[0,T]$.

□

2. Формализм метода регуляризации.

Решение задачи (1) будем искать в виде

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m x_m^k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2,k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m^k(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m z_m(t). \tag{5}$$

Подставив (5) в (1) и приравнивая слагаемые при одинаковых $\sigma_{1,k}, \sigma_{2,k}$, получим серию задач:

$$(\text{при} \quad \varepsilon^0) \qquad \begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t))\, x_0^k(t) = 0, \\ (A(t) - \lambda_2(t))\, y_0^k(t) = 0, \\ A(t) z_0(t) = -h(t), \\ x_0^0(0) + y_0^0(0) + z_0(0) = u^0, \quad k = \overline{0,\infty}. \end{cases} \tag{6}$$

Решение (6) имеет вид:

$$x_0^k(t) = \alpha_0^k(t) e_1(t), \quad y_0^k(t) = \beta_0^k(t) e_2(t), \quad z_0(t) = -A^{-1}(t) h(t)$$

здесь $e_1(t), e_2(t)$ — собственные векторы, $\alpha_0^k(t), \beta_0^k(t)$ — произвольные скалярные функции. Значения $\alpha_0^k(0), \beta_0^k(0)$ определяются из начальных условий:

$$\alpha_0^k(0) e_1(0) + \beta_0^k(0) e_2(0) = u^0 + A^{-1}(0) h(0)$$

или

$$\alpha_0^k(0) = u_1^0 + \frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)}, \qquad \beta_0^k(0) = u_2^0 + \frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}$$

Так как $\sigma_{1,k}(0) = 0, \sigma_{2,k}(0) = 0, \quad k \geqslant 1$, то $\alpha_0^k(0), \beta_0^k(0)$ могут принимать произвольные значения на данном итерационном шаге.

$$(\text{при} \quad \varepsilon^1) \qquad \begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t))\, x_1^k(t) = \dot{x}_0^k(t) + y_0^{k+1}(t), \\ (A(t) - \lambda_2(t))\, y_1^k(t) = \dot{y}_0^k(t) + x_0^{k+1}(t), \\ A(t) z_1(t) = \dot{z}_0(t), \\ x_1^0(0) + y_1^0(0) + z_1(0) = 0, \quad k = \overline{0,\infty}. \end{cases} \tag{7}$$

Подставив $x_0^k(t), y_0^k(t), z_0(t)$, получим:

$$
(8) \qquad \begin{cases}
(A(t)-\lambda_1(t))\,x_1^k(t) = \\
= \left(\dot\alpha_0^k(t) + C_1^1(t)\alpha_0^k(t)\right)e_1(t) + \left(\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t)\right)e_2(t), \\
\\
(A(t)-\lambda_2(t))\,y_1^k(t) = \\
= \left(\dot\beta_0^k(t) + C_2^2(t)\beta_0^k(t)\right)e_2(t) + \left(\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t)\right)e_1(t), \\
\\
z_1(t) = -\left(A^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\right)A^{-1}(t)h(t),
\end{cases}
$$

здесь $C_i^j(t)$ — коэффициенты разложения $\dot e_1(t)$ и $\dot e_2(t)$ по базису собственных векторов $e_1(t), e_2(t)$:

$$
\dot e_i(t) = \sum_{j=1}^{2} C_i^j(t)e_j(t), \quad i = 1,2.
$$

Из условий разрешимости и точечной разрешимости в нуле имеем системы

$$
(9) \quad \begin{cases}
\dot\alpha_0^k(t) + C_1^1(t)\alpha_0^k(t) = 0 \\
\beta_0^{k-1}(0)C_2^1(0) + \alpha_0^k(0) = 0
\end{cases}, \quad
\begin{cases}
\dot\beta_0^k(t) + C_2^2(t)\beta_0^k(t) = 0 \\
\alpha_0^{k-1}(0)C_1^2(0) + \beta_0^k(0) = 0
\end{cases}, \quad k \geqslant 1.
$$

Отсюда определяются начальные условия:

$$
(10) \qquad \alpha_0^k(0) = -\beta_0^{k-1}(0)C_2^1(0), \qquad \beta_0^k(0) = -\alpha_0^{k-1}(0)C_1^2(0)
$$

и функции $\alpha_0^k(t)$, $\beta_0^k(t)$, $\quad k \geqslant 1$:

$$
\alpha_0^k(t) = \alpha_0^k(0)\exp\left(-\int_0^t C_1^1(s)\,ds\right), \qquad \beta_0^k(t) = \beta_0^k(0)\exp\left(-\int_0^t C_2^2(s)\,ds\right)
$$

Заметим, что $\alpha_0^0(0)$, $\beta_0^0(0)$ определены в системе (6). Тогда $\alpha_0^k(0)$, $\beta_0^k(0)$, $\quad k \geqslant 1$ однозначно определены из рекуррентных соотношений (10).

Решения (8) примут вид

$$
\begin{cases}
x_1^k(t) = \alpha_1^k(t)e_1(t) + \dfrac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}e_2(t) \\
y_1^k(t) = \beta_1^k(t)e_2(t) + \dfrac{\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}e_1(t)
\end{cases}
$$

Заметим, что начальные условия (10), условия 1)$\div$4) задачи (1) и лемма 2 обеспечивают гладкость вектор-функций $x_1^k(t)$, $y_1^k(t)$ на $[0,T]$. Начальные условия для $\alpha_1^0(0)$, $\beta_1^0(0)$ определяются из соотношения:

$$
\alpha_1^0(0)e_1(0) + \beta_1^0(0)e_2(0) = \left[\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\right)A^{-1}(t)h(t) - \right.
$$
$$
\left. \left. - \frac{\beta_0^0(t)C_2^1(t) + \alpha_0^1(t)}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}e_1(t) - \frac{\alpha_0^0(t)C_1^2(t) + \beta_0^1(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}e_2(t)\right]\right|_{t=0}
$$

Произвольные функции $\alpha_1^k(t), \beta_1^k(t)$ и начальные условия для $\alpha_1^k(0)$, $\beta_1^k(0)$, $k \geqslant 1$ определяются на следующем итерационном шаге.

$$
\text{(11)} \qquad (\text{при} \quad \varepsilon^2) \qquad \begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t))\, x_2^k(t) = \dot{x}_1^k(t) + y_1^{k+1}(t), \\ (A(t) - \lambda_2(t))\, y_2^k(t) = \dot{y}_1^k(t) + x_1^{k+1}(t), \\ z_2(t) = -\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\right)^2 A^{-1}(t)h(t), \\ x_2^0(0) + y_2^0(0) + z_2(0) = 0, \quad k = \overline{0, \infty}. \end{cases}
$$

Записав условия разрешимости для (11), получим задачи Коши для определения $\alpha_1^k(t)$, $\beta_1^k(t)$.

$$
\begin{cases} \dot{\alpha}_1^k(t) + C_1^1(t)\alpha_1^k(t) = -\dfrac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t)C_2^1(t) - \alpha_0^{k+2}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}, \\ \dot{\beta}_1^k(t) + C_2^2(t)\beta_1^k(t) = -\dfrac{\beta_0^k(t)C_1^2(t)C_2^1(t) - \beta_0^{k+2}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}. \end{cases}
$$

Начальные условия находятся из (11) с учетом точечной разрешимости в нуле. Приведем ответ, опуская достаточно громоздкие выкладки:

$$
\text{(12)} \qquad \begin{gathered} \alpha_1^{k+1}(0) = -\beta_1^k(0)C_2^1(0) - \\ -\left[\frac{\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} C_1^1(t) + \frac{d}{dt}\frac{\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}\right]\Bigg|_{t=0} \end{gathered}
$$

$$
\text{(13)} \qquad \begin{gathered} \beta_1^{k+1}(0) = -\alpha_1^k(0)C_1^2(0) - \\ -\left[\frac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} C_2^2(t) + \frac{d}{dt}\frac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}\right]\Bigg|_{t=0} \end{gathered}
$$

Таким образом, имеем рекуррентные соотношения для определения начальных условий $\alpha_1^k(0)$, $\beta_1^k(0)$, $k \geqslant 1$:

$$
\begin{gathered} \alpha_1^{k+1}(0) = -\beta_1^k(0)C_2^1(0) - \gamma_k, \\ \beta_1^{k+1}(0) = -\alpha_1^k(0)C_1^2(0) - \delta_k, \end{gathered}
$$

где γ_k, δ_k известные числа, определенные в (12), (13).

Следовательно, решения системы (7) определены. Продолжая аналогичный процесс можно определить любой член ряда (5).

Замечание. Как следует из вышеизложенного, построение решения сильно упростится, если хотя бы один из коэффициентов разложения производных базиса имеет нуль в точке $t = 0$. Например,:

a) если $\left(C_1^2\right)^{(k)}(0) = 0, \quad \forall\, k \geqslant 0$, то для построения асимптотического ряда достаточно трех регуляризирующих функций:

$$
e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}, \qquad e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}, \qquad e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon}\, ds.
$$

Для построения асимптотической суммы из N членов достаточно выполнения условий: $\left(C_1^2\right)^{(k)}(0) = 0, \quad \forall\, k = \overline{0, N}$.

b) если $\left(C_1^2\right)^{(k)}(0) = 0$, $\left(C_2^1\right)^{(k)}(0) = 0, \quad \forall\, k \geqslant 0$, то для построения асимптотического ряда понадобится всего две регуляризирующие функции:

$$
e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}, \qquad e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}.
$$

Аналогично а) для построения асимптотической суммы из N членов можно ограничится нулем $N-$го порядка: $\left(C_1^2\right)^{(k)}(0)=0$, $\left(C_2^1\right)^{(k)}(0)=0$, $\quad\forall\, k=\overline{0,N}$.

3. Оценка остаточного члена. Теорема о предельном переходе.

Запишем

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{m}\varepsilon^q\left(\sigma_{1,p}\,x_q^p(t)+\sigma_{2,p}\,y_q^p(t)\right)+\sum_{q=0}^{m}\varepsilon^q z_q(t)+\varepsilon^{m+1}R_{k,m}(t,\varepsilon). \tag{14}$$

Подставив (14) в (1) и с учетом разрешимости итерационных задач, получим:

$$\begin{cases}\varepsilon\dot R_{n,m}-A(t)R_{n,m}=H(t,\varepsilon),\\ R_{n,m}(0,\varepsilon)=0,\end{cases} \tag{15}$$

где

$$H(t,\varepsilon)=-\left[\sum_{p=0}^{n-1}\sigma_{1,p}\left(\dot x_m^p(t)+y_m^{p+1}(t)\right)+\sigma_{2,p}\left(\dot y_m^p(t)+x_m^{p+1}(t)\right)\right.$$
$$\left.+\sigma_{1,n}\,\dot x_m^n(t)+\sigma_{2,p}\,\dot y_m^n(t)+\dot z_m(t)\right]$$

Как следует из оценок интегралов $\sigma_{1,p}$, $\sigma_{2,p}$ правая часть (15) имеет оценку

$$H(t,\varepsilon)=\underline{O}(1)$$

Решение (15) запишем в виде:

$$R_{n,m}=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t,s)H(s,\varepsilon)\,ds,$$

где $U_\varepsilon(t,s)$ — разрешающий оператор, являющийся решением задачи Коши:

$$\varepsilon\dot U_\varepsilon(t,s)=A(t)U_\varepsilon(t,s),\qquad U_\varepsilon(t,s)\Big|_{s=t}=I.$$

Из условий $1)\div 5)$ следует, что $U_\varepsilon(t,s)$ ограничен на $[0,T]$:

$$\|U_\varepsilon(t,s)\|_{C[0,T]}\leqslant\mathbb{C}.$$

Следовательно, из соотношения

$$R_{n,m}=-U_\varepsilon(t,s)A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)\Big|_0^t+\int_0^t U_\varepsilon(t,s)\frac{d}{ds}A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)\,ds$$
$$=-A^{-1}(t)H(t,\varepsilon)+U_\varepsilon(t,0)A^{-1}(0)H(0,\varepsilon)+\int_0^t U_\varepsilon(t,s)\frac{d}{ds}A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)\,ds,$$

получим:

$$R_{n,m}=\underline{O}(1)\qquad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Об оценке остатка (асимтотическая сходимость).*
Пусть дана задача Коши (1) *и выполнены условия* $1)\div 5)$. *Тогда верна оценка*

$$\|U(t,\varepsilon)-\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{m}\varepsilon^q\left(\sigma_{1,p}\,x_q^p(t)+\sigma_{2,p}\,y_q^p(t)\right)-\sum_{q=0}^{m}\varepsilon^q z_q(t)\|_{C[0,T]}\leqslant\mathbb{C}\cdot\varepsilon^{m+1}$$

Теорема 2. *О предельном переходе.*
Пусть дана задача Коши (1), *выполнены условия* 1) $\div$ 5) *и* $\lambda_i(t) \leqslant -\delta < 0$ *при* $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(t, \varepsilon) = -A^{-1}(t)h(t).$$

4. Пример.

Рассмотрим пример, в котором можно ограничиться тремя регуляризирующими функциями.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u} = A(t)u + h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \end{cases} \qquad t \in [0, 1],$$

$$\text{где} \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 - t & 0 \\ +2te^{2t} & -1 + t \end{pmatrix}.$$

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = -1 \pm t$.
Собственные векторы: $e_1 = \{0, e^t\}^T$, $e_2 = \{-e^{-t}, e^t\}^T$.

$$u^0 = u_1^0 e_1 + u_2^0 e_2, \quad h(t) = h_1(t)e_1 + h_2(t)e_2,$$

$$\dot{e}_1 = e_1, \quad \dot{e}_2 = \{e^{-t}, e^t\}^T = 2e_1 - e_2,$$

$$\varphi_1(t) = -t + \frac{t^2}{2}, \quad \varphi_2(t) = -t - \frac{t^2}{2}, \quad \Delta\varphi = -t^2.$$

Регуляризирующие функции:

$$\sigma_{1,0} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_{2,0} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_{1,1} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon}\, ds.$$

Главный член асимптотики запишется в виде:

$$u_0(t, \varepsilon) = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \left(u_1^0 + \frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)} \right) e^{-t} e_1(t) + e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \left(u_2^0 + \frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)} \right) e^{-t} e_2(t)$$
$$+ e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon}\, ds \cdot \left(-2u_2^0 - 2\frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)} \right) e^t e_1(t).$$

References

[1] S.A. Lomov, *Introducdion to the General Theory of Singular Perturbations*, Nauka, Moscow, 1981. Zbl 0782.34063

[2] A.G. Eliseev, S.A. Lomov, *Theory of singular perturbations in the case of spectral singularities of the limit operator*, Math. USSR, Sb., **59**:2 (1988), 541–555. Zbl 0652.34061

[3] A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov, *Regulized asymptotics of solutions to integro-differential partial differential equations with rapidly varying kernels*, Ufa Math. J., **10**:2 (2018), 3—13. MR3814175

[4] V.V. Kucherenko,*Asymptotics of solutions of the system* $A(x, -ih\frac{\partial}{\partial x})$ *as* $h \to 0$ *in the case of characteristics of variable multiplicity*, Math. USSR, Izv., **8**:3 (1974), 631—666. Zbl 0308.35080

[5] A.G. Eliseev, T.A. Salnikova, *Construction of a solution to the Cauchy problem in the case of a weak turning point of the limit operator*, Matem. metody i prilojeniya. Trudy 20 matem. chtenii RGSU, (2011), 46–52.

[6] V.V. Voevodin, *Vychislitel'nye osnovy linejnoj algebry*, Nauka, Moscow, 1977. Zbl 0563.65010

Alexander Georgievich Eliseev, Pavel Vladimirovich Kirichenko
National Research University «MPEI»,
17, Krasnokazarmennaya str.,
Moscow, 111116, Russia
E-mail address: eliseevag@mpei.ru, kirichenkopv@mpei.ru