

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №1, стр. 694–702 (2021)
DOI 10.33048/semi.2021.18.049УДК 539.214
MSC 86A17**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА
РАСТВОРЕННОГО ВЕЩЕСТВА В ПОРОУПРУГОМ
ГЛИНИСТОМ СЛАНЦЕ**Б.Х. ИМОМНАЗАРОВ, А.А. МИХАЙЛОВ, И.К. ХАЙДАРОВ,
А.Э. ХОЛМУРАДОВ

ABSTRACT. This paper considers the solution to the problem of the transport of solvent and solute in a chemically inert elastically deformable rock, for which only changes in stress and pore pressure are taken into account. The chemistry of the saturating pore fluid has no direct effect on the rock deformation. Chemical effects are taken into account by changing the pore pressure and deformation of rocks in the transport equations. The numerical algorithm for solving the problem under consideration is based on a combination of the Laguerre integral transform and the finite difference method. The paper presents the results of numerical calculations for the model of the transport of a solute through a semi-permeable shale.

Keywords: porous medium, saturated fluid, elastic parameters, stress tensor, partial density, permeability, chemical potential.

1. ВВЕДЕНИЕ

В сланцах может происходить катионный обмен между глинистыми поверхностями и участвующей поровой жидкостью. Другие растворенные вещества также могут адсорбироваться или десорбироваться на стенках пор. Этими эффектами можно пренебречь [1]. Результат этого переноса справедлив лишь для молекул, которые не склонны адсорбироваться, или количество которых уже достаточно в порах, так что равновесие между породой и поровой жидкостью не

ИМОМНАЗАРОВ, В.КН., МИХАЙЛОВ, А.А., ХАЙДАРОВ, И.К., ХОЛМУРАДОВ, А.Э.,
NUMERICAL SOLUTION OF THE SOLUTE TRANSFER PROBLEM IN POROUS ELASTIC CLAY SHALE.

© 2021 Имомназаров Б.Х., Михайлов А.А., Хайдаров И.К., Холмурадов А.Э.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-31-00120).

Поступила 2 июля 2020 г., опубликована 15 июня 2021 г.

нарушается. Примером может служить перенос натрия через глину, которая имеет только натриевые противоионы. Пренебрежение адсорбцией/десорбцией и непосредственными химическими эффектами в теории пороупругости в соотношении напряжение-деформация приводит к упрощению основных уравнений.

Следуя работе [1], для простоты, рассмотрим пористую жидкость, состоящую из одного незаряженного растворенного вещества с мольной фракцией $\Psi = x^s$ в растворителе (воде) с мольной фракцией $x^w = 1 - \Psi$. Раствор считается идеальным. Химические потенциалы растворенного вещества μ^s и растворителя μ^w имеют вид

$$\begin{aligned} \mu^s &= pV_s + RT\ln\Psi, \\ \mu^w &= pV_w + RT\ln(1-\Psi), \end{aligned}$$

где p – давление, R – газовая постоянная, T – температура, V_s, V_w – соответствующие парциальные молярные объемы растворенного вещества и растворителя. Молярный объем раствора (при атмосферном давлении) равен

$$V_{soln} = (1 - \Psi)V_w + \Psi V_s.$$

В [2] рассмотрена химопороупругая модель для оценки профиля напряжений околоскважинного пространства, а в [3] решена система уравнений химотермопороупругости на основе неявного конечно-разностного метода. Далее, в предлагаемой работе предположим, также как в [1], что объемный модуль K раствора не зависит от Ψ , и ограничимся изотермическим случаем при постоянной температуре. В отличие от [1-3] в данной работе коэффициент диффузии является функцией пористости.

2. ТЕОРИЯ ПОРОУПРУГОСТИ

Чтобы связать изменения деформации e_{ij} горной породы с изменениями приложенного напряжения σ_{ij} и изменениями химических потенциалов компонентов пористой жидкости, воспользуемся модифицированной теорией пороупругости. Если поровая жидкость содержит n химических веществ с химическими потенциалами μ^i ($i = 1, \dots, n$) и с массой m^i (на единицу объема пористого материала), то [4]

$$(1) \quad de_{ij} = S_{ijkl}d\sigma_{kl} + \sum_{q=1}^n Q_{ij}^q d\mu^q, ,$$

$$(2) \quad dm^p = Q_{ij}^p d\sigma_{ij} + \sum_{q=1}^n B^{pq} d\mu^q,$$

где перекрестные коэффициенты Q_{ij}^r являются общими для (1) и (2) и $B^{rs} = B^{sr}$.

Предположим, что изменение приложенного напряжения $d\sigma_{ij}$ сжимает компоненты поровой жидкости пропорционально их молярным долям и, следовательно, в (2) $Q_{ij}^p = x^p$. Из уравнения Гиббса-Дюгема следует, что

$$\sum_{q=1}^n Q_{ij}^q d\mu^q = V_{soln} dp$$

и только изменения порового давления требуется для (1). Предположим, что горная порода изотропна с модулем сдвига G , параметром Скемптона B и дренированными и недренированными коэффициентами Пуассона ν , ν_u , соответственно. Тогда уравнение (1) принимает следующий вид [5]:

$$(3) \quad 2Gde_{ij} = d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}d\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu)(1+\nu_u)}p\delta_{ij}$$

Из уравнения равновесия [6] следует, что выполняется уравнение

$$(4) \quad \Delta \left[\sigma_{kk} + \frac{6(\nu_u - \nu)}{B(1-\nu)(1+\nu_u)}p \right] = 0.$$

Химические потенциалы μ^i в (2) не могут быть сведены к простому поровому давлению p . Тем не менее, в двухкомпонентной пористой жидкости удобно использовать давление p и мольную фракцию Ψ , а не химические потенциалы μ^s , μ^w , соответственно. Таким образом, для некоторой константы α , которая определяется ниже, имеют место:

$$dm^s = \frac{3\Psi(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)V_{soln}} [d\sigma_{kk} + 3B^{-1}dp] + \frac{\alpha}{V_s}d\Psi,$$

$$dm^w = \frac{3(1-\Psi)(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)V_{soln}} [d\sigma_{kk} + 3B^{-1}dp] - \frac{\alpha}{V_w}d\Psi.$$

Если объем пор (на единицу объема) – ϕ_0 , число молей растворителя и растворенного вещества:

$$m^w = (1 - \Psi) \frac{\phi_0}{V_{soln}}, \quad m^s = \Psi \frac{\phi_0}{V_{soln}}$$

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{\phi_0 V_w V_s}{V_{soln}^2}.$$

Используя законы сохранения массы и предполагая, что Ψ меняется достаточно мало [1], после простых преобразований получим систему уравнений параболического типа:

$$(5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = A \nabla^2 \Phi + H \nabla^2 \Psi,$$

$$(6) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = C \nabla^2 \Phi + E \nabla^2 \Psi,$$

где $\Phi = \sigma_{kk} + \frac{3p}{B}$, σ_{kk} – след тензора напряжений,

$$A = \frac{2GB^2k(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)V_{soln}} [\gamma V_s x_0^s + V_w(1-x_0^s)],$$

$$H = \frac{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)(\gamma-1)RTk}{3(\nu_u-\nu)},$$

$$C = \frac{(\gamma-1)Bk(1-\nu)(1+\nu_u)V_s V_w x_0^s (1-x_0^s)}{3(1-\nu_u)(1+\nu)\alpha V_{soln}},$$

$$E = \frac{V_s}{\alpha V_{soln}} [\gamma D V_{soln} + (1-\gamma)RTk x_0^s],$$

γ – коэффициент пропускания, D – коэффициент диффузии.

Как показано в [7-10], коэффициенты ν и k можно связать с пористостью:

$$\nu = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda} + G)}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda - (\alpha\rho^2)^{-1}K^2, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}G, \quad k = \frac{\mu}{\chi\rho\rho_l},$$

где μ - вязкость воды, χ - коэффициент трения, $\rho = \rho_l + \rho_s$, $\rho_s = \rho_s^f(1 - d_0)$ и $\rho_l = \rho_l^f d_0$, d_0 - пористость, ρ_s^f и ρ_l^f - физические плотности пористого тела и воды соответственно, λ , G , $\alpha\rho^2$ - упругие параметры пористой среды [11]. Упругие параметры K , G , α выражаются через скорость распространения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p_1} , c_{p_2} [12, 13]:

$$G = \rho_s c_s^2, \quad K = \frac{\rho \rho_s}{2 \rho_l} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8 \rho_l}{3 \rho} c_s^2 - \sqrt{(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2)^2 - \frac{64 \rho_l \rho_s}{9 \rho^2} c_s^4} \right),$$

$$\rho^2 \alpha = \frac{1}{2} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8 \rho_l}{3 \rho} c_s^2 + \sqrt{(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2)^2 - \frac{64 \rho_l \rho_s}{9 \rho^2} c_s^4} \right).$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Функции $\Phi(x, t)$ и $\Psi(x, t)$ определяются из системы уравнений теплопроводности

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$(8) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

с граничными

$$(9) \quad \Phi|_{x=0} = \Phi_0(t), \quad \Phi|_{x=L} = \Phi_1(t), \quad t > 0,$$

$$(10) \quad \Psi|_{x=0} = \Psi_0(t), \quad \Psi|_{x=L} = \Psi_1(t), \quad t > 0,$$

и нулевыми данными Коши

$$(11) \quad \Phi|_{t=0} = 0, \quad \Psi|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

Для решения начально-краевой задачи (7) - (11) используем метод Лагерра интегральное преобразование по времени:

$$\vec{W}^m(x) = \int_0^\infty \vec{W}(x, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht),$$

с формулами обращения

$$\vec{W}(x, t) = (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^\infty \frac{m!}{(m + \alpha)!} \vec{W}^m(x) l_m^\alpha(ht),$$

где $l_m^\alpha(t)$ - является функцией Лагерра.

Функции Лагерра $l_m^\alpha(t)$ выражаются через классические ортонормированные многочлены Лагерра $L_m^\alpha(t)$ [14]. В этой статье мы выбираем параметр α как целое и положительное, отсюда:

$$l_m^\alpha(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t}{2}} L_m^\alpha(t).$$

Для первой и второй производных полиномов Лагерра имеем следующие формулы:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_m^\alpha(ht) = -h \sum_{k=0}^{m-1} L_k^\alpha(ht),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_m^\alpha(ht) = h^2 \sum_{k=0}^{m-2} (m-k-1) L_k^\alpha(ht).$$

Легко видеть, что для удовлетворения начальных условий задачи необходимо достаточно установить значение $\alpha \geq 2$. Более того, в этих формулах введем параметр сдвига $h > 0$, значение и эффективность которого подробно обсуждаются в [15, 16].

В результате применения преобразования Лагерра исходная задача (7) - (11) сводится к одномерной краевой задаче для обыкновенного дифференциальной системы в спектральной области, которая переписывается в виде:

$$(12) \quad \frac{h}{2} \Phi^m = A \frac{d^2 \Phi^m}{dx^2} + H \frac{d^2 \Psi^m}{dx^2} - h \sum_{k=0}^{m-1} \Phi^k, \quad 0 < x < L,$$

$$(13) \quad \frac{h}{2} \Psi^m = C \frac{d^2 \Phi^m}{dx^2} + E \frac{d^2 \Psi^m}{dx^2} - h \sum_{k=0}^{m-1} \Psi^k, \quad 0 < x < L,$$

с граничными условиями

$$(14) \quad \Phi^m|_{x=0} = \Phi_0^m, \quad \Phi^m|_{x=L} = \Phi_1^m,$$

$$(15) \quad \Psi^m|_{x=0} = \Psi_0^m, \quad \Psi^m|_{x=L} = \Psi_1^m.$$

Для решения задачи (12)–(15) используем конечно-разностный метод со вторым порядком точности.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Для начальной апробации численного алгоритма и определения точности вычислений, вместо параболической системы (7)–(8), рассматривалась гиперболическая система с соответствующими начально-краевыми условиями (9)–(11), которая описывает распространение продольных колебаний в среде. На рисунках 1 и 2 представлены результаты расчетов сейсмических трасс $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ компонент волнового поля для тестовой модели среды. Данная модель среды задавалась следующими физическими характеристиками: $x_0^s = 0.1$, $\varphi = 0.14$, $B = 0.92$, $T = 300K$, $\nu = 0$, $\nu_u = 0.44$, $V_w = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$, $V_s = 2.6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$, $G = 0.6 \text{ ГПа}$, $\mu = 10^{-9} \text{ МПа}\cdot\text{с}$, $R = 8.3 \text{ Дж К}^{-1} \text{ мол}^{-1}$, $D = 10^{-7} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $\gamma = 0.9$, $k = 1.4 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$.

Тогда, исходя из заданных коэффициентов гиперболической системы, скорости продольных волн определяются как: $c_1 = 0.355 \cdot 10^{-5} \text{ м/сек}$, $c_2 = 0.115 \cdot 10^{-4} \text{ м/сек}$.

Волновое поле моделировалось от источника, находящегося на левом конце пороупругого слоя глинистого сланца: $\Phi_0(t) = 0$, $\Phi_1(t) = 0$, $\Psi_0(t) = f(t)$, $\Psi_1(t) = 0$. Временной сигнал в источнике задавался в виде:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\kappa^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)),$$

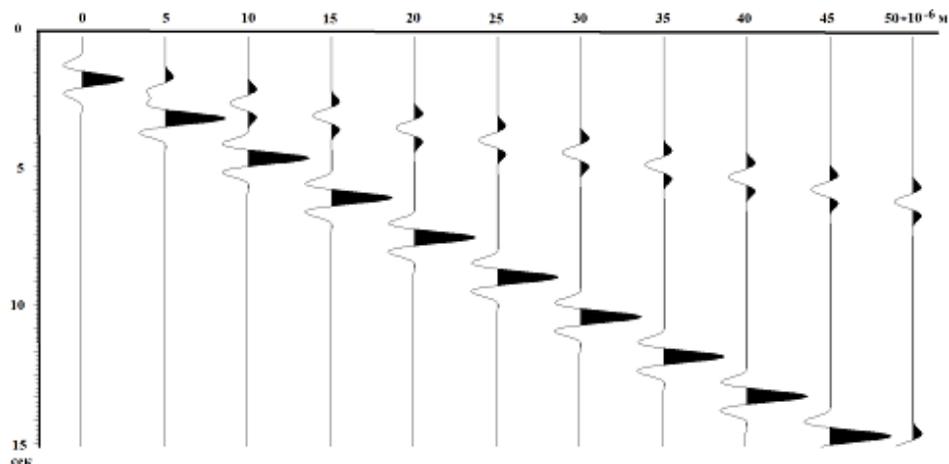


Рис. 1. Трассы для компоненты $\Phi(t)$.

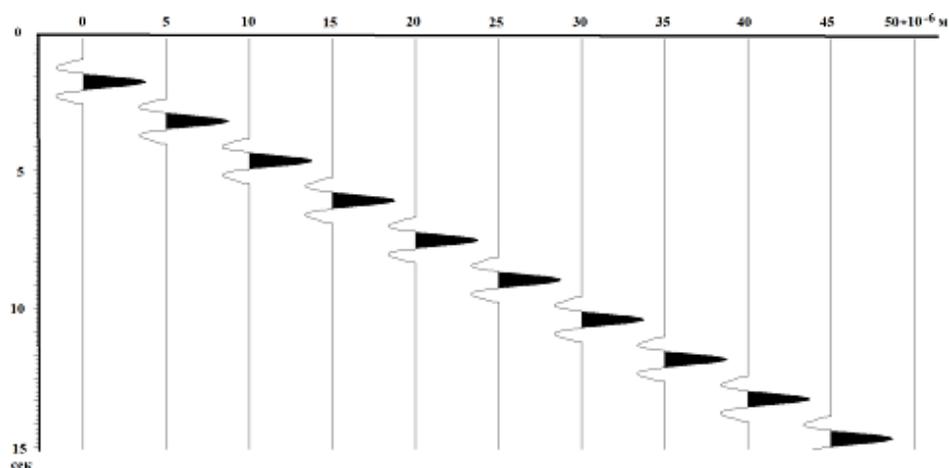


Рис. 2. Трассы для компоненты $\Psi(t)$.

где $\kappa = 4$, $f_0 = 1$ Гц, $t_0 = 1,5$ с.

Для разностной аппроксимации по пространственной координате шаг дискретизации задавался 50 узлов на минимальную длину волны.

Из представленных рисунков видно, что образуются соответствующие два типа волн в пороупругом глинистом сланце. Анализ данных расчетов показал, что погрешность вычислений менее 0.1%.

На рисунках 3 и 4 представлены результаты расчетов для параболической системы (7)-(8), с начально-краевыми условиями (9)-(11). Модель среды задавалась следующими физическими характеристиками: $x_0^s = 0.1$, $\varphi = 0.14$, $B = 0.92$, $T = 300K$, $\nu = 0$, $\nu_u = 0.44$, $V_w = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$, $V_s = 2.6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$, $G = 0.6 \text{ ГПа}$, $\mu = 10^{-9} \text{ МПа}\cdot\text{с}$, $R = 8.3 \text{ Дж К}^{-1} \text{ мол}^{-1}$, $D = 10^{-7} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $\gamma = 0.9$, $k = 1.4 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$.

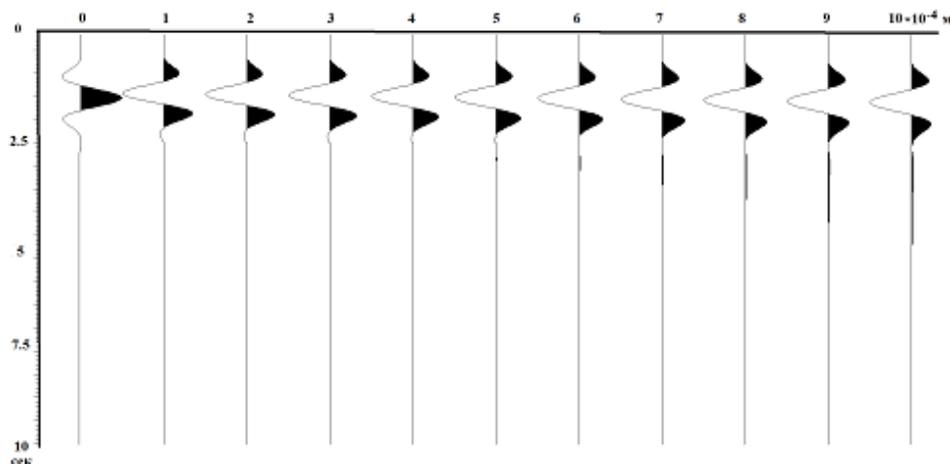


Рис. 3. Трассы для компоненты $\Phi(t)$. Нормировка независима для каждой трассы.

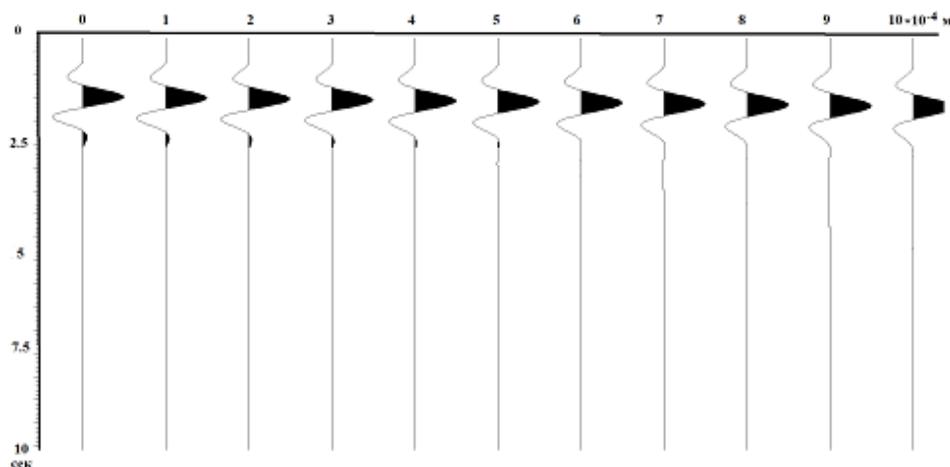


Рис. 4. Трассы для компоненты $\Psi(t)$. Нормировка независима для каждой трассы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена химически инертная деформируемая горная порода, для которой учитываются только изменения напряжения и порового давления: химия пористой жидкости не оказывает прямого влияния на деформацию. Показано, что изменения химических эффектов приводит к изменению порового давления и деформации горных пород. Предлагаемый алгоритм является аналогом известных спектральных методов решения динамических задач. Однако в отличие от классических преобразований Фурье и Лапласа применение преобразования Лагерра приводит к системе уравнений, в которой параметр разделения по гармоникам входит только в правую часть в рекуррентном виде.

В результате матрица системы сведенной задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать эффективные методы решения полученных систем линейных алгебраических уравнений. Численно решена задача переноса растворителя и растворенного вещества через полупроницаемый глинистый сланец на основе предложенного алгоритма.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект No. 18-31-00120).

REFERENCES

- [1] J.D. Sherwood, *A model of hindered solute transport in a poroelastic shale*, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, **445**:1925 (1994), 679–692. Zbl 0807.76079
- [2] H. Roshan, S. Rahman, *A fully coupled chemo-poroelastic analysis of pore pressure and stress distribution around a wellbore in water active rocks*, Rock Mechanics and Rock Engineering, **44**, (2011), 199–210.
- [3] S. Rafeepour, S. Zamiran, M. Ostadhassan, *A cost-effective chemo-thermo-poroelastic wellbore stability model for mud weight design during drilling through shale formations*, Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, **12**:4, (2020), 768–779.
- [4] J.D. Sherwood, *Biot poroelasticity of a chemically active shale*, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, **440**:1909 (1993), 365–377. Zbl 0786.73064
- [5] I. Haydarov, B. Imomnazarov, *On one model of solute transport in poroelastic shale*, Bull. Nov. Comp. Center, Math. Model. in Geoph., 21 (2019), 1–9.
- [6] J.R. Rice, M.P. Clearly, *Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents*, Rev. Geophys. Space Phys., **14**:2 (1976), 227–241.
- [7] Kh.Kh. Imomnazarov, *Concentrated force in a porous half-space*, Bull. Novosib. Comput. Cent. Ser. Math. Model. Geophys., **1998**:4 (1998), 75–77. Zbl 1050.74525
- [8] E.V. Grachev, N.M. Zhabborov, Kh.Kh. Imomnazarov, *A Concentrated force in an elastic porous half-space*, Doklady Physics, **48**:7 (2003), 376–378.
- [9] E. Grachev, Kh. Imomnazarov, N. Zhabborov, *One nonclassical problem for the statics equations of elastic-deformed porous media in a half-plane*, Appl. Math. Lett., **17**:1 (2004), 31–34. Zbl 1040.35021
- [10] Kh.Kh. Imomnazarov, N.M. Zhabborov, *Some initial boundary value problems of the mechanics of two-velocity media*, Izd-vo NUUz im. Mirzo Ulugbek, 2012.
- [11] A.M. Blokhin, V.N. Dorovsky, *Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum*, Nova Science., Commack. 1995. MR1379588
- [12] Kh.Kh. Imomnazarov, *Some remarks on the Biot equations*, Dokl. RAS, **373**:4 (2000), 536–537. Zbl 1056.86512
- [13] Kh.Kh. Imomnazarov, *Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium*, Appl. Math. Lett., **13**:3 (2000), 33–35. Zbl 0985.74032
- [14] G.V. Konyukh, B.G. Mikhailenko, *Application of the Laguerre integral transforms for solving dynamic seismic problems*, Bull. Novosib. Comput. Cent., Ser. Math. Model. Geophys., **1998**:4 (1998), 79–91. Zbl 0954.86003
- [15] B.G. Mikhailenko, A.A. Mikhailov, G.V. Reshetova, *Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method*, Pure Appl. geophys., **160** (2003), 1207–1224.
- [16] B.G. Mikhailenko, A.A. Mikhailov, G.V. Reshetova, *Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method*, Geophysical Prospecting, **51**:1 (2003), 37–48.

BUNYOD KHOLMATZHONOVICH IMOMNAZAROV
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: imom@omzg.sbcc.ru

ALEKSANDER ANATOLIEVICH MIKHAILOV
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
6, LAVRENTIEVA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: alex_mikh@omzg.ssc.ru

ILKHOM QUDRATOVICH KHAYDAROV
CHIRCHIK STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE OF THE TASHKENT REGION,
104, AMIR TEMUR STR.,
CHIRCHIK, 111700, UZBEKISTAN

ABDULKHAMID ERKINOVICH KHOLMURODOV
KARSHI STATE UNIVERSITY,
17, KUCHABAG STR.,
KARSHI, 180100, UZBEKISTAN
Email address: abishx@mail.ru