S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.925
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 34C20+37G40

БИФУРАЦИИ ПОЛИЦИКЛА, ОБРАЗОВАННОГО СЕПАРАТРИСАМИ СЕДЛА С НУЛЕВОЙ СЕДЛОВОЙ ВЕЛИЧИНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В.Ш. Ройтенберг

Abstract. The paper considers two-parameter families of planar vector fields with central symmetry. At zero values of the parameters, the field has a rough saddle at the origin of coordinates O and two symmetric loops of the separatrices of this saddle. The saddle value – the trace of the matrix of the linear part of the field at the point O – is assumed to be zero. We describe a bifurcation diagram of a generic family – a partition of a neighborhood of zero on the parameter plane into topological equivalence classes of vector fields in a fixed neighborhood U of the polycycle formed by loops of separatrices. In particular, for each element of the partition, the number and type of closed trajectories of the field belonging to U are indicated.

Keywords: planar vector field, central symmetry, bifurcation, saddle, separatrix, limit cycle.

1. Введение

Поскольку динамические системы на плоскости, обладающие центральной симметрией, естественным образом появляются при математическом моделировании ряда процессов, то представляет интерес изучение бифуркаций в типичных конечно-параметрических семействах таких систем. Описание нелокальных бифуркаций в однопараметрических семействах, а также в некоторых

Roitenberg, V.Sh., Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of a saddle with zero saddle value of a dynamical system with central symmetry.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

двухпараметрических семействах, получается как следствие известного описания бифуркаций в типичных одно- и двухпараметрических семействах динамических систем без симметрии [1, 2]. Здесь мы рассмотрим один класс динамических систем с рассматриваемой симметрией, имеющих коразмерность два в пространстве всех таких систем, и опишем их типичные двухпараметрические деформации, не сводящиеся к типичным двухпараметрическим бифуркациям динамических систем без симметрии. А именно, будут описаны бифуркации системы X_0, имеющей в начале координат O грубое седло с нулевой седловой величиной, сепаратрисы которого образуют две симметричных петли Γ_0^+ и Γ_0^-, в окрестности полицикла $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$. Первая сепаратрисная величина для петель предполагается отрицательной, вследствие чего полицикл является аттрактором.

Отметим, что бифуркации в окрестности петли сепаратрисы седла с нулевой седловой величиной впервые были рассмотрены Е.А. Леонтович [3]. Ее результаты частично повторены Р. Руссари в [4]. В случае петли с нулевой седловой величиной и ненулевой первой сепаратрисной величиной бифуркационная диаграмма для двухпараметрического семейства общего положения описана В.П. Ноздрачевой [5].

2. Постановка задачи. Формулировка результатов

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon(z) = P_1(z,\varepsilon)\partial/\partial z_1 + P_2(z,\varepsilon)\partial/\partial z_2$ на плоскости, зависящее от двумерного параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Будем считать, что $P_1, P_2 \in C^r$ ($r \geq 3$) , векторные поля X_ε инвариантны относительно преобразования $S : z \mapsto -z$, то есть $X_\varepsilon(-z) = -X_\varepsilon(z)$, и удовлетворяют сформулированным ниже условиям У1–У4.

У1. *Точка $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ является грубым седлом поля X_0 с седловой величиной $(P_1)'_{z_1}(0,0) + (P_2)'_{z_2}(0,0) = 0$.*

У2. *Выходящая сепаратриса L_0^+ седла O (пусть она задается уравнением $z = \zeta(t), t \in \mathbb{R}$) совпадает с входящей сепаратрисой L_0^-, образуя петлю $\Gamma_0^+ := L_0^+ \cup \{O\} = L_0^- \cup \{O\}$. Соответственно, совпадают и сепаратрисы SL_0^+ и SL_0^-, образуя петлю $\Gamma_0^- = S\Gamma_0^+$.*

У3. *Первая сепаратрисная величина*

$$s_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} ((P_1)'_{z_1}(\zeta(t),0) + (P_2)'_{z_2}(\zeta(t),0))dt < 0.$$

При всех ε, достаточно близких к нулю, точка O является седлом для поля X_ε, а собственные значения матрицы линейной части поля в точке O , $\lambda_1(\varepsilon) > 0$ и $\lambda_2(\varepsilon) < 0$ – C^{r-1}-функции от ε. Обозначим $\sigma(\varepsilon) := \lambda_1(\varepsilon) + \lambda_2(\varepsilon)$ седловую величину, $\lambda(\varepsilon) := -\lambda_2(\varepsilon)/\lambda_1(\varepsilon)$ – седловой индекс. Поскольку $\sigma(0) = 0$, то $\lambda(0) = 1$.

Пусть $\eta : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ – такое C^∞-отображение, что $\eta(0) = \zeta(0)$, $\forall s \in (-1,1)$ $\eta'(s) \neq 0$, а репер $(\eta'(0), \zeta'(0)) = (\eta'(0), X_0(\zeta(0)))$ положительно ориентирован. Так как инвариантные многообразия седла C^{r-1}-гладко зависят от параметра, то при ε, достаточно близких к нулю, седло O имеет выходящую (входящую) сепаратрису L_ε^+ (L_ε^-) , трансверсально пересекающую дугу $\eta(-1,1)$ в точке $\eta(u_+(\varepsilon))$ $(\eta(u_-(\varepsilon)))$, где $u_\pm(\cdot) \in C^{r-1}$, $u_\pm(0) = 0$. Обозначим $u(\varepsilon) := u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon)$.

У4. *Ковекторы $\lambda'(0)$ и $u'(0)$ линейно независимы.*

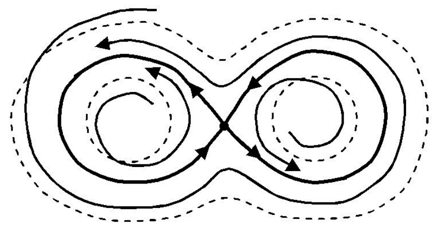

Рис. 1. Траектории поля X_0 в окрестности полицикла

Условие У4 не зависит от выбора параметризации сепаратрисы L_0^+ и отображения η.

При выполнении условий У1–У4 в окрестности нуля на плоскости параметров можно ввести C^{r-1}-координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, что

$$\lambda(\varepsilon) = 1 - \varepsilon_1, \;\; u(\varepsilon) = \varepsilon_2. \tag{1}$$

Далее будем отождествлять параметр ε с его координатной строкой: $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Опишем траектории векторных полей X_ε в окрестности полицикла $\Gamma_0 := \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^+$, гомеоморфного «восьмерке».

Теорема 1. *Пусть векторное поле X_0 удовлетворяет условиям У1–У3. Тогда существуют окрестность U полицикла Γ_0 с границей ∂U, состоящей из трех непересекающихся между собой гладких простых замкнутых кривых γ_{int}^+, $\gamma_{\text{int}}^- = S\gamma_{\text{int}}^+$ и $\gamma_{\text{ext}} = S\gamma_{\text{ext}}$, в точках которых поле X_0 направлено внутрь U, а все траектории поля X_0, начинающиеся в кольцевой области между γ_{int}^+ и Γ_0^+ , γ_{int}^- и Γ_0^-, γ_{ext} и Γ_0 , ω-предельны соответственно к Γ_0^+, Γ_0^-, Γ_0 и выходят из U при убывании времени соответственно в точках γ_{int}^+, γ_{int}^-, γ_{ext} (рис. 1).*

Теорема 2. *Пусть семейство векторных полей X_ε удовлетворяет условиям У1–У4. Тогда окрестность U полицикла Γ_0, о которой идет речь в теореме 1, и число $\delta > 0$ можно выбрать так, что имеют место следующие утверждения:*

В точках ∂U векторные поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, направлены внутрь U.

Область параметров $(-\delta, \delta)^2$ разбивается на множества $\mathrm{B}_0 = \{(0,0)\}$, E_i, $\mathrm{B}_i, i = 1,2,3,4$, где (рис. 2)

$\mathrm{B}_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = \beta_1(\varepsilon_2)\}$, $\beta_1 : (-\delta, 0) \to (0, \delta)$, $\beta_1 \in C^1$, $\beta_1(-0) = \beta_1'(-0) = 0$,

E_i *– связная компонента $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{k=0}^4 \mathrm{B}_k$, в границу которой входят B_i и B_{i+1} (здесь $\mathrm{B}_6 = \mathrm{B}_1$),*

со следующими свойствами:

1) Векторные поля X_ε при $\varepsilon \in \mathrm{E}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ грубые в U.

2) Векторные поля X_ε при $\varepsilon \in \mathrm{B}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ первой степени негрубости в U.

3) Векторные поля $X_\varepsilon|_U$ имеют следующие замкнутые траектории и петли сепаратрис:

при при $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$ – двойной цикл, гомотопный γ_{ext} , и по устойчивому циклу гомотопному, соответственно, γ_{int}^+ и γ_{int}^-;

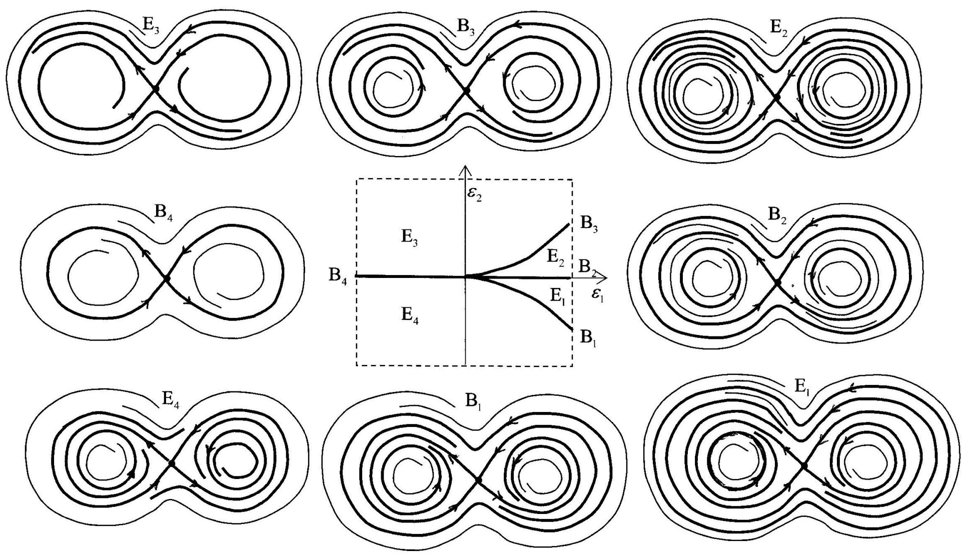

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

при $\varepsilon \in \mathrm{E}_1$ – два цикла, устойчивый и неустойчивый, гомотопные γ_{ext}, и по устойчивому циклу гомотопному, соответственно, γ^+_{int} и γ^-_{int};

при $\varepsilon \in \mathrm{B}_2$ – устойчивый цикл, гомотопный γ_{ext}, полицикл из двух петель сепаратрис и по устойчивому циклу, гомотопному, соответственно, γ^+_{int} и γ^-_{int};

при $\varepsilon \in \mathrm{E}_2$ – устойчивый цикл, гомотопный γ_{ext}, и по два цикла, устойчивому и неустойчивому, гомотопных, соответственно, γ^+_{int} и γ^-_{int};

при $\varepsilon \in \mathrm{B}_3$ – устойчивый цикл, гомотопный γ_{ext}, и по двойному циклу, гомотопному, соответственно, γ^+_{int} и γ^-_{int};

при $\varepsilon \in \mathrm{E}_3$ – единственный цикл, он устойчив и гомотопен γ_{ext};

при $\varepsilon \in \mathrm{B}_4$ – устойчивый полицикл из двух петель сепаратрис;

при $\varepsilon \in \mathrm{E}_4$ – по устойчивому циклу, гомотопному, соответственно, γ^+_{int} и γ^-_{int}.

Траектории векторных полей $X_\varepsilon|_U$ для $\varepsilon \in \mathrm{E}_i$ и $\varepsilon \in \mathrm{B}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) схематически изображены на рис. 2.

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в разделах 3–4.

3. Функции соответствия, функции последования и функции расхождения

Согласно теореме 2.17 из [6] в некоторой окрестности $V(O)$ точки O при достаточно малых ε существует замена координат

$$x = g_1(z_1, z_2, \varepsilon), y = g_2(z_1, z_2, \varepsilon),$$

где функции g_i принадлежат классу C^{r-1} по переменным z_1, z_2, а g_i и $(g_i)'_{z_j}$ – классу C^{r-2} по переменным z_1, z_2, ε, такая, что в координатах x, y поле X_ε

имеет вид

(2) $$X_\varepsilon = x(\lambda_1(\varepsilon) + p(x,y,\varepsilon))\partial/\partial x + y(\lambda_2(\varepsilon) + q(x,y,\varepsilon))\partial/\partial y,$$

где функции p и q являются C^{r-1}-гладкими относительно x, y и C^{r-2}-гладкими относительно x, y, ε,

(3) $$p(0,y,\varepsilon) = p(x,0,\varepsilon) = q(0,y,\varepsilon) = q(x,0,\varepsilon) = 0.$$

Из доказательства указанной теоремы видно, что при условии $X_\varepsilon(-z) = -X_\varepsilon(z)$ имеем $g_1(-z,\varepsilon) = -g_1(z,\varepsilon)$, $g_2(-z,\varepsilon) = -g_2(z,\varepsilon)$, то есть симметричные точки z и $-z$ имеют противоположные координаты (x,y) и $(-x,-y)$. Поэтому

$$p(-x,-y,\varepsilon) \equiv p(x,y,\varepsilon),\ q(-x,-y,\varepsilon) \equiv q(x,y,\varepsilon).$$

При фиксированном ε мы будем отождествлять точку $z \in V(O)$ с ее координатной строкой (x,y). Без ограничения общности можно считать, что при $\varepsilon = 0$ дуги $y = 0,\ x > 0$ и $x = 0,\ y > 0$ принадлежат, соответственно, сепаратрисам L_0^+ и SL_0^-. При достаточно малых $d > 0$ и $\delta_1 > 0$ определены отображения $(x,d) \mapsto (d, \varphi_+(x,\varepsilon))$ и $(x,-d) \mapsto (d, \varphi_-(x,\varepsilon))$, $x \in (0,d)$, $\varepsilon \in (-\delta_1,\delta_1)^2$ по траекториям поля $X_\varepsilon\Big|_{V(O)}$, где $\varphi_\pm(x,\varepsilon)$ и $(\varphi_\pm)'_x(x,\varepsilon)$ – C^{r-2}-функции (рис. 3). Из (1)–(3), лемм 13.1, 13.5 и замечаний к ним в [2] следует, что существуют такие числа $\bar{x} \in (0,d)$, $\delta_2 \in (0,\delta_1]$, что при всех $x \in (0,\bar{x}]$, $\varepsilon \in (-\delta_2,\delta_2)^2$

(4) $$\varphi_\pm(x,\varepsilon) = \pm d^{1-\lambda(\varepsilon)}x^{\lambda(\varepsilon)} + r_\pm(x,\varepsilon)) = \pm d^{\varepsilon_1}x^{1-\varepsilon_1} + r_\pm(x,\varepsilon),$$

где

(5) $$|\partial^{i+j} r_\pm(x,\varepsilon)/\partial x^i \partial\varepsilon_k^j| \le x^{1{,}5-\varepsilon_1-i},\ 0 \le i+j \le 2,\ 0 \le j \le 1,\ k = 1,2.$$

При достаточно малых $\bar{u} > 0$, $\bar{y} > 0$ и $\delta_3 \in (0,\delta_1)$ определены отображение по траекториям поля X_ε, $\varepsilon \in [-\delta_3,\delta_3]^2$, переводящее точку $\eta(u_-(\varepsilon)+u)$ с $u \in [-\bar{u},\bar{u}]$ в точку $(\psi(u,\varepsilon),-d)$, где $\psi(u,\varepsilon) \in (-\bar{x},\bar{x})$, $\psi(0,\varepsilon) = 0$, $\psi \in C^{r-2}$ и $\psi'_u(u,\varepsilon) < 0$, и отображение по траекториям поля X_ε, $\varepsilon \in [-\delta_3,\delta_3]^2$, переводящее точку $(d,\ y)$ с $y \in (-\bar{y},\bar{y})$ в точку $\eta(u_-(\varepsilon)+\chi(y,\varepsilon))$, где $\chi \in C^{r-2}$, $\chi'_y(y,\varepsilon) > 0$, $\chi(0,\varepsilon) = u_+(\varepsilon) - u_-(\varepsilon) = \varepsilon_2$ (рис. 3). Траекторию поля X_ε, проходящую через точку $\eta(u_-(\varepsilon)+u)$, $u \in [-\bar{u},\bar{u}]$, будем обозначать $L_\varepsilon(u)$.

Пусть далее числа $\bar{x}$ и $\bar{y}$ фиксированы. При достаточно малых $\bar{u}$ и δ_3 для любого $\varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2$ определены функции (см. рис. 3)

$$f_\varepsilon^-(u) := \chi(\varphi_-(\psi(u,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon), u \in [-\bar{u},0)$$

и

$$f_\varepsilon^+(u) := \chi(\varphi_+(-\psi(u,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon), u \in (0,\bar{u}].$$

Введем также функции расхождения $\Delta_\pm(u,\varepsilon) := f_\varepsilon^\pm(u) - u$ и функции $f_\varepsilon(u) := f_\varepsilon^+(f_\varepsilon^+(u))$.

Функция f_ε^- является функцией последования по траекториям поля X_ε на дуге $\eta(u_-(\varepsilon)-\bar{u},\ u_-(\varepsilon))$. Поэтому $L_\varepsilon(u_*)$, $u_* \in [-\bar{u},0)$, – замкнутая траектория поля тогда и только тогда, когда u_* – неподвижная точка f_ε^- (нуль функции $\Delta_-(\cdot\,,\varepsilon)$). Эта траектория – устойчивый (неустойчивый) грубый предельный цикл, если $(\Delta_-)'_u(u_*,\varepsilon) < 0$ ($(\Delta_-)'_u(u_*,\varepsilon) > 0$) и двойной цикл, если $(\Delta_-)'_u(u_*,\varepsilon) = 0$, $(\Delta_-)''_{uu}(u_*,\varepsilon) \ne 0$.

Учитывая симметрию поля X_ε, получаем, что положительная полутраектория поля, начинающаяся в точке $\eta(u_-(\varepsilon)+u)$ ($S\eta(u_-(\varepsilon)+u)$) при $u \in (0,\bar{u}]$, пересекает дугу $S\eta(-1,1)$ ($\eta(-1,1)$) в точке $S\eta(u_-(\varepsilon)+f_\varepsilon^+(u))$ ($\eta(u_-(\varepsilon)+$

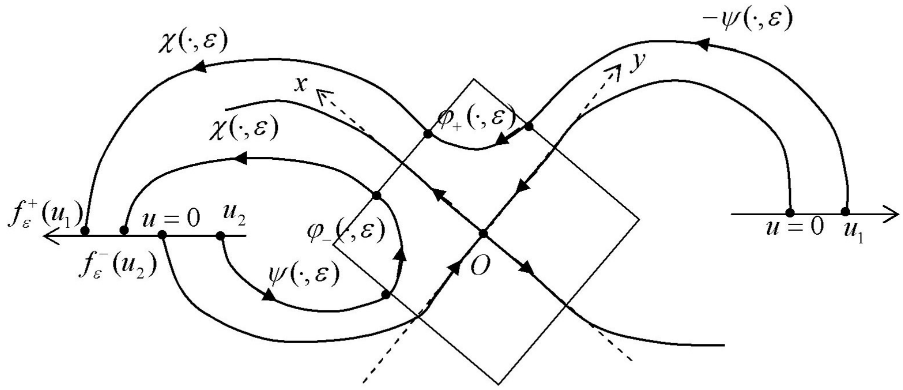

Рис. 3. Отображения соответствия по траекториям

$f^+_\varepsilon(u)))$. Поэтому f_ε – функция последования по траекториям поля. Траектория $L_\varepsilon(u_*)$, $u_* \in (0,\bar u]$, замкнута тогда и только тогда, когда она проходит и через точку $S\eta(u_-(\varepsilon)+u_*)$, при этом u_* – неподвижная точка, как для f_ε, так и для f^+_ε, и нуль для $\Delta_+(\cdot,\varepsilon)$. Так как $(f_\varepsilon)'(u_*) = [(f^+_\varepsilon)'(u_*)]^2$, то $L_\varepsilon(u_*)$ – устойчивый (неустойчивый) грубый предельный цикл, если $(f^+_\varepsilon)'(u_*) < 1$ (> 1), то есть $(\Delta_+)'_u(u_*,\varepsilon) < 0$ (> 0). Если $L_\varepsilon(u_*)$ – негрубая замкнутая траектория, то $(f^+_\varepsilon)'(u_*) = 1$, $(f_\varepsilon)''(u_*) = 2(f^+_\varepsilon)''(u_*)$. Поэтому $L_\varepsilon(u_*)$ – двойной цикл, если $(\Delta_+)'_u(u_*,\varepsilon) = 0$, $(\Delta_+)''_{uu}(u_*,\varepsilon) \neq 0$.

Из (4), (5) и свойств функций ψ и χ получаем, что существует такое число $D > 0$, что для любого $\varepsilon \in [-\delta_3,\delta_3]^2$

$$f^+_\varepsilon(u) = \varepsilon_2 + c(\varepsilon)u^{1-\varepsilon_1} + R_+(u,\varepsilon) \quad \text{при} \quad u \in (0,\bar u], \tag{6}$$

$$f^-_\varepsilon(u) = \varepsilon_2 - c(\varepsilon)(-u)^{1-\varepsilon_1} + R_-(u,\varepsilon) \quad \text{при} \quad u \in [-\bar u,0), \tag{7}$$

где $c(\varepsilon) > 0$, $c(\cdot) \in C^1$,

$$|\partial^{i+j}R_\pm(u,\varepsilon)/\partial u^i\partial\varepsilon_k^j| \le D\,|u|^{1{,}5-\varepsilon_1-i},\ 0 \le i+j \le 2,\ 0 \le j \le 1,\ k = 1,2. \tag{8}$$

При $\varepsilon = 0$ из (7) и (8) находим $c(0) = (f^-_0)'(-0)$. Как известно [2, п. 13.1], [5], для петли с нулевой седловой величиной производная функции последования $(f^-_0)'(+0) = e^{s_1}$. Из условия У3 и (6) получаем

$$(f^+_0)'(+0) = c(0) = (f^-_0)'(-0) < 1. \tag{9}$$

Поэтому можно считать $\bar u$ столь малым, что

$$\Delta_+(u,0) < 0,\ (\Delta_+)'_u(u,0) < 0 \quad \text{при всех} \quad u \in (0,\bar u], \tag{10}$$

$$\Delta_-(u,0) > 0 \quad \text{при всех} \quad u \in [-\bar u,0). \tag{11}$$

Из (6), (8)–(10) следует, что $u_0 \in (0,\bar u)$ и $\delta_4 \in (0,\delta_3)$ можно выбрать так, что

$$\Delta_+(u_0,\varepsilon) < 0,\ (\Delta_+)'_u(u_0,\varepsilon) < 0 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon \in [-\delta_4,\delta_4]^2, \tag{12}$$

$$(\Delta_+)'_u(u,\varepsilon) < 0 \quad \text{при всех} \quad u \in (0,u_0],\ \varepsilon \in [-\delta_4,0] \times [-\delta_4,\delta_4], \tag{13}$$

$$(\Delta_+)''_{uu}(u,\varepsilon) < 0 \quad \text{при всех} \quad u \in (0,u_0],\ \varepsilon \in (0,\delta_4] \times [-\delta_4,\delta_4], \tag{14}$$

$$(\Delta_+)'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) > 1/2 \quad \text{при всех} \quad u \in (0,u_0],\ \varepsilon \in [-\delta_4,\delta_4]^2, \tag{15}$$

$$\operatorname{sgn}\Delta_+(+0,\varepsilon) = \operatorname{sgn}\varepsilon_2 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon \in [-\delta_4,\delta_4]^2. \tag{16}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,\delta_4] \times [-\delta_4,\delta_4]$. Из (6) и (8) получаем $(\Delta_+)'_u(+0,\varepsilon) = +\infty$. Отсюда, из (12) и (14) следует, что существует такая C^{r-2}-функция $m : (0,\delta_4] \times [-\delta_4,\delta_4] \to (0,u_0)$, что

$$\operatorname{sgn}(\Delta_+)'_u(u,\varepsilon) = \operatorname{sgn}(m(\varepsilon) - u) \quad \text{при} \quad u \in (0,u_0]. \tag{17}$$

Выберем число q, $c(0) < q < 1$. Из (8) следует, что u_0 и δ_4 можно считать столь малыми, что при рассматриваемых ε справедливы неравенства

$$c(\varepsilon) < q,\ 0 < c(\varepsilon)(1-\varepsilon_1)/(1-(R_+)'_u(m(\varepsilon),\varepsilon)) < q.$$

Из (6) и (17) получаем $m(\varepsilon) = (c(\varepsilon)(1-\varepsilon_1)/(1-(R_+)'_u(m(\varepsilon),\varepsilon))^{1/\varepsilon_1}$, и потому

$$m(\varepsilon) \le q^{1/\varepsilon_1}. \tag{18}$$

Обозначим $M(\varepsilon) := \Delta_+(m(\varepsilon),\varepsilon)$. Из (6), (8) и (18)

$$M(\varepsilon_1,-\varepsilon_1) \le -\varepsilon_1 + q^{1/\varepsilon_1} + Dq^{(1{,}5-\varepsilon_1)/\varepsilon_1}.$$

Поэтому найдется такое $\delta \in (0,\delta_4)$, что $M(\varepsilon_1,-\varepsilon_1) < 0$ при всех $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$. Поскольку $\Delta_+(+0,\varepsilon)\,|_{\varepsilon_2=0} = 0$, то из (17) получаем $M(\varepsilon_1,0) > 0$. Из этих двух неравенств и (15) следует, что для любого $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$ существует такое число $\beta_1(\varepsilon_1) \in (-\varepsilon_1,0)$, что

$$\forall\varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,0)\ \operatorname{sgn}M(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_1(\varepsilon_1)). \tag{19}$$

Из (15) и (19) по теореме о неявной функции получаем $\beta_1(\cdot) \in C^1$. Ясно, что $\beta_1(+0) = 0$. Учитывая (17), имеем

$$\beta_1'(\varepsilon_1) = -\frac{M'_{\varepsilon_1}(\varepsilon)}{M'_{\varepsilon_2}(\varepsilon)}\bigg|_{\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)} = -\frac{(\Delta_+)'_{\varepsilon_1}(m(\varepsilon),\varepsilon)}{(\Delta_+)'_{\varepsilon_2}(m(\varepsilon),\varepsilon)}\bigg|_{\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)}. \tag{20}$$

Из (6) и (8) получаем, что существует такое число $K > 0$, что при $u \in (0,u_0)$, $\varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,0)$ $|(\Delta_+)'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon)| \le Ku^{1-\varepsilon_1}|\ln u|$. Из этой оценки, из (15), (18) и (20) следует, что $\beta_1'(+0) = 0$.

4. Окрестность U. Перестройки фазовых портреров в U при изменении параметров

Из (10) и (11) согласно [8, п. 3.14] следует, что через точку $\eta(f_0^+(u_0))$ (соотв. $\eta(f_0^-(-u_0))$ можно провести гладкую замкнутую трансверсаль $\gamma_{\text{ext}} = S\gamma_{\text{ext}}$ (соотв. γ_{int}^+) к полю X_0, в точках z которой вектор $X_0(z)$ направлен внутрь ее отрицательной (положительной) полуокрестности. Обозначим U окрестность полицикла Γ_0, граница которой состоит из кривых γ_{ext}, γ_{int}^+ и $\gamma_{\text{int}}^- = S\gamma_{\text{int}}^+$. Вследствие (10) и (11) любая траектория поля X_0, начинающаяся в U и не принадлежащая Γ_0, ω-предельна к Γ_0 и выходит из U при убывании времени. Отсюда следуют утверждения теоремы 1.

Считая δ выбранным достаточно малым, для любого $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$ будем иметь поле X_ε, направленным внутрь U в точках ∂U и не имеющим в U особых точек кроме O. Тогда любая траектория в U, отличная от седла O, пересекает одну из дуг $\eta(u_-(\varepsilon)-u_0,\ u_-(\varepsilon)+u_0)$ или $S\eta(u_-(\varepsilon)-u_0,\ u_-(\varepsilon)+u_0)$. Обозначим $T_\varepsilon^+ := \eta(u_-(\varepsilon),\ u_-(\varepsilon)+u_0)$, $T_\varepsilon^- := \eta(u_-(\varepsilon)-u_0,\ u_-(\varepsilon))$.

Ясно, что при $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$ входящие и выходящие сепаратрисы седла O совпадают тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 = 0$.

Из (12), (13), (16), (17) и (19) получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1)$ $\Delta_+(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственный (двукратный) нуль $m(\varepsilon)$, а двойной цикл $L_\varepsilon(m(\varepsilon))$ – единственная замкнутая траектория, пересекающая дугу T_ε^+. При $\varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,0)$, $\varepsilon_2 > \beta_1(\varepsilon_1)$ $\Delta_+(\cdot,\varepsilon)$ имеет ровно два простых нуля $0 < u_2(\varepsilon) < u_1(\varepsilon) < u_0$, а поле X_ε имеет грубые замкнутые траектории, пересекающие T_ε^+, устойчивую $L_\varepsilon(u_1(\varepsilon))$ и неустойчивую $L_\varepsilon(u_2(\varepsilon))$. При $\varepsilon \in (0,\delta)\times[0,\delta)$ и $\varepsilon \in (-\delta,0]\times(0,\delta)$ $\Delta_+(\cdot,\varepsilon)$ имеет на $(0,u_0]$ единственный нуль $u_1(\varepsilon) < u_0$, причем $(\Delta_+)'_u(u_1(\varepsilon),\varepsilon) < 0$, а поле X_ε имеет единственную замкнутую траекторию, пересекающую дугу T_ε^+, – устойчивый грубый предельный цикл $L_\varepsilon(u_1(\varepsilon))$. При $\varepsilon \in (-\delta,0]\times(-\delta,0]$ и $\varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,0)$, $\varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)$ $\forall u \in (0,u_0]$ $\Delta_+(u,\varepsilon) < 0$, и потому все траектории, пересекающую дугу T_ε^+, незамкнутые.

Из (7), (8) следует, что если на дуге $\eta(-1,1)$ параметр u заменить на $-u$, а ε_2 заменить на $-\varepsilon_2$, то отображение по траекториям, задаваемое функцией f_ε^-, будет иметь вид (6) с той же оценкой добавочного члена, что и в (8). Поэтому, как и выше, получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon \in (0,\delta)\times(0,\delta)$, $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, где $\beta_2 : (0,\delta) \to (0,\delta)$, $\beta_2 \in C^1$, $\beta_2(+0) = \beta_2'(+0) = 0$, поле X_ε имеет единственную замкнутую траекторию, пересекающую дугу T_ε^- (ST_ε^-), – двойной цикл. При $\varepsilon \in (0,\delta)\times(0,\delta)$, $\varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$ поле X_ε имеет две грубые замкнутые траектории, пересекающие T_ε^- (ST_ε^-), устойчивую и неустойчивую. При $\varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,0]$ и $\varepsilon \in (-\delta,0]\times(-\delta,0)$ поле X_ε имеет единственную замкнутую траекторию, пересекающую дугу T_ε^- (ST_ε^-), – устойчивый грубый предельный цикл. При $\varepsilon \in (-\delta,0]\times[0,\delta)$ и $\varepsilon \in (0,\delta)\times(0,\delta)$, $\varepsilon_2 > \beta_2(\varepsilon_1)$ все траектории, пересекающую дугу T_ε^- (ST_ε^-), незамкнутые.

Определив теперь множества E_i, B_i, $i = 1,2,3,4$, так, как это сделано в формулировке теоремы 2, получим все утверждения теоремы о существовании петель сепаратрис и замкнутых траекторий. Отсюда и из выбора окрестности U следует, что поведение траекторий, отличных от замкнутых, такое, как указано на рис. 2.

Грубость векторных полей X_ε при $\varepsilon \in \mathrm{E}_i$ и первая степень негрубости при $\varepsilon \in \mathrm{B}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ следует из достаточных условий грубости и первой степени негрубости [7].

Теорема 2 доказана.

References

[1] V.I. Arnold, V.S. Afraimovich, Y.S. Ilyashenko, L.P. Shilnikov, *Dynamical Systems V. Bifurcation theory,* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 5, Springer-Verlag: Berlin, 1994.

[2] L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II*, World Scientific Publishing: River Edge, New Jersey, 2001.

[3] E.A. Leontovich, *On birth of limit cycles from separatrixes*, Doclady AN SSSR, **28**:4 (1951), 641–644.

[4] R. Roussarie, *On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields*, Bull. Brazil. Math. Soc., **17**: 2 (1986), 67–101.

[5] V.P. Nozdracheva, *Bifurcations of non-rough separatrix loop*, Differential Equations, **8**:9 (1982), 1551–1558.

[6] L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I*, World Scientific Publishing: River Edge, New Jersey, 1998.

[7] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier, *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Halsted Press and Israel Program for Scientific Translations: New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973.

[8] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamic systems*, Halsted Press and Israel Program for Scientific Translations: New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973.

Vladimir Shleymovich Roitenberg
Yaroslavl State Technical University,
pr. Moscowskij, 88,
150023, Yaroslavl, Russia
Email address: `vroitenberg@mail.ru`