S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, стр. 144–144 (2021) УДК 517.98:519.677
DOI 10.33048/semi.2021.18.xxx MSC 44A30

СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА НОРМАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ТРЕХМЕРНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ 2-ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

А.П. Полякова

Abstract. A problem of 3D 2-tensor field potential part reconstruction by its known value of the normal Radon transform is considered. A singular value decomposition of the operator is constructed for solving the problem. Basic fields are constructed with usage of the Yakobi polynomials, Gegenbauer polynomials and spherical harmonics.

Keywords: symmetric tensor field, potential field, potential, normal Radon transform, singular value decomposition of operator, system of orthogonal polynomials.

1. Введение

Классическим оператором интегральной геометрии, действующим на векторные и 2-тензорные поля, является лучевое преобразование [1]. В двумерном случае для полного восстановления векторного поля необходимо знать значения двух лучевых преобразований, продольного и поперечного, так как каждое из них обладает ненулевым ядром, в то время как для полного восстановления симметричного, то есть инвариантного относительно всех перестановок индексов, 2-тензорного поля в $\mathbb{R}^2$ должны быть известны значения уже трех лучевых преобразований (подробнее см. в [2]). В трехмерном случае

Polyakova, A.P., Singular value decomposition of the normal Radon transform operator acting on 3D symmetric 2-tensor fields.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0011) и при частичной поддержке РФФИ (грант 19-51-12008-ННИО_а).

Поступила 1 января 2021 г., опубликована 31 декабря 2021 г.

по продольному лучевому преобразованию можно восстановить лишь соленоидальную часть векторного или симметричного 2-тензорного поля. Для восстановления потенциальной части необходимо иметь другие данные. Одним из операторов, позволяющих восстанавливать потенциальную часть векторного и симметричного 2-тензорного поля, является нормальное преобразование Радона. В работе [3] исследован вопрос обращения преобразования Радона симметричного 2-тензорного поля в $\mathbb{R}^3$ и, в частности нормального преобразования Радона. Отметим также работу [4], в которой предложены два подхода восстановления трехмерных потенциальных векторных и симметричных 2-тензорных полей по известным значениям нормального преобразования Радона, основанные на методе приближенного обращения.

В данной работе построено сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона, действующего на трехмерные симметричные 2-тензорные поля. Сингулярные разложения операторов преобразования Радона [5]–[10] и продольного лучевого преобразования [11], действующих на скалярные поля в $\mathbb{R}^3$, хорошо известны. В указанных работах базисные поля строятся на основе различных вариаций ортогональных многочленов и сферических гармоник. В частности, при построении базисных полей в работе [9] использовались полиномы Якоби и полиномы Гегенбауэра. Основываясь на этом результате, а также связи лучевых преобразований и нормального преобразования Радона с преобразованием Радона, были получены сингулярные разложения операторов лучевых преобразований векторных [12] и симметричных 2-тензорных [13] полей в $\mathbb{R}^2$ и разложение оператора нормального преобразования Радона векторных полей в $\mathbb{R}^3$ [14],[15], а также результат данной статьи. Отметим работы посвященные разработке, реализации и исследованию алгоритмов численного решения задач векторной и тензорной томографии в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ с использованием указанных выше SV-разложений [16]–[19]. Упомянем работу [20], в которой построено сингулярное разложение оператора веерного преобразования Радона, действующего на двумерные тензорные поля произвольной валентности.

В работе [19] предложен алгоритм численного решения задачи 2-тензорной томографии по восстановлению трехмерного потенциального симметричного 2-тензорного поля по его известному нормальному преобразованию Радона, основанный на методе усеченного сингулярного разложения. Именно, оператор нормального преобразования Радона представляется в виде ряда по сингулярным числам и базисным элементам в пространстве образов, тогда обратный оператор будет представлять собой ряд со схожей структурой, где задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа (более подробно см. [7],[21],[10]). Необходимо отметить, что [19] посвящена лишь численному решению задачи трехмерной 2-тензорной томографии, ортогональность базисных полей степени $N \leqslant 50$ в основном пространстве была проверена с использованием пакета программ Wolfram Mathematica 9. В данной работе это утверждение теоретически обосновано для полей произвольной степени, тем самым построено сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона, действующего на трехмерное симметричное 2-тензорное поле.

2. Основные определения

Введем обозначения $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1\}$ для единичного шара, $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ — для единичной сферы, $Z = \{(s, \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^3, |\xi| = 1, s \in (-1, 1)\}$ — для цилиндра.

Функции будем обозначать через $f(x), g(x), \ldots$ Для потенциалов будем использовать обозначения $\phi(x), \psi(x), \ldots$ Множество симметричных m-тензорных полей $\mathbf{w}(x) = (w_{i_1 \ldots i_m}(x))$, $\mathbf{u}(x) = (u_{i_1 \ldots i_m}(x))$, $\mathbf{v}(x) = (v_{i_1 \ldots i_m}(x))$, $i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3$, определенных в B, обозначается $S^m(B)$. Скалярное произведение в $S^m(B)$ вводится формулой

$$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = \sum_{i_1, .., i_m = 1}^{3} u_{i_1 .. i_m}(x) v_{i_1 .. i_m}(x).$$

Функциональное пространство $L_2(S^m(B))$ состоит из интегрируемых в квадрате симметричных m-тензорных полей, определенных в B. Скалярное произведение двух тензорных полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из пространства $L_2(S^m(B))$ задается формулой:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(S^m(B))} = \int\limits_B \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle dx.$$

Пространства Соболева для симметричных m-тензорных полей обозначим через $H^k(S^m(B))$. Через $H_0^k(S^m(B))$ обозначим пространство симметричных 2-тензорных полей из $H^k(S^m(B))$, обращающихся в ноль на границе области вместе со всеми своими производными вплоть до $(k-1)$-го порядка. Кроме того, мы будем использовать весовое пространство $L_2(Z, \rho)$, где $\rho(s) > 0$ задана на Z. Скалярное произведение функций f и g из $L_2(Z, \rho)$ задается формулой:

$$(f, g)_{L_2(Z, \rho)} = \int\limits_Z f(x) g(x) \rho(x) dx.$$

Дифференциальные операторы. Мы будем использовать следующие операторы:

1) *Оператор внутреннего дифференцирования*

$$\mathrm{d} : H^k(S^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B)),$$

который действует на потенциал ψ и векторное поле $\mathbf{v}$ следующим образом:

$$(\mathrm{d}\psi)_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \qquad (\mathrm{d}\mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

2) *Оператор ротора*

$$\mathrm{rot} : H^k(S^1(B)) \to H^{k-1}(S^1(B)),$$

который действует на векторное поле $\mathbf{w}$ по формуле

$$\mathrm{rot}\mathbf{w} = \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right).$$

3) *Оператор дивергенции*

$$\mathrm{div} : H^k(S^{m+1}(B)) \to H^{k-1}(S^m(B)),$$

который действует на тензорное поле $\mathbf{w}$ по правилу:

$$(\operatorname{div}\mathbf{w})_{i_1..i_m} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial w_{i_1..i_m j}}{\partial x_j}.$$

Напомним, что m-тензорное поле $\mathbf{u} \in H^k(S^m(B))$ называется *потенциальным*, если существует $(m-1)$-тензорное поле $\mathbf{v} \in H^{k+1}(S^{m-1}(B))$ (потенциал), такое что $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{v}$. Поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \in H^{k-1}(S^{m-1}(B))$. Очевидно, что векторное поле $\mathbf{w} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$ — соленоидально. Аналогично, симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w}$ соленоидально, если $(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) = \operatorname{rot}\mathbf{v}^i,\ i = 1,2,3$ для некоторых векторных полей $\mathbf{v}^i$.

Известно [1], что имеет место единственное разложение любого симметричного m-тензорного поля $\mathbf{v} \in L_2(S^m(B))$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathrm{d}\mathbf{u},$$
$$\mathbf{w} \in H^1(S^m(B)), \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{u} \in H_0^1(S^{m-1}(B)).$$

В работе [19] было показано, что для симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{v} \in L_2(S^2(B))$ существует единственное разложение

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) + \mathrm{d}^2\phi,$$

где

$$\mathbf{w} \in H^1(S^2(B)), \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0,$$
$$\mathbf{u} \in H^2(S^1(B)), \qquad \operatorname{rot}\mathbf{u} \in H_0^1(S^1(B)),$$
$$\phi \in H_0^2(B).$$

Интегральные операторы. Плоскость $P_{\xi,s}$ в $\mathbb{R}^3$ задается нормальным уравнением $\langle \xi, x\rangle - s = 0$ для $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $|\xi| = 1$. Здесь $|s|$ — расстояние от плоскости до начала координат, а ξ — нормальный вектор плоскости.

Преобразование Радона $\mathcal{R}f : L_2(B) \to L_2(Z, \rho)$ скалярной функции $f(x)$ задается формулой

$$[\mathcal{R}f](s,\xi) = \int\limits_{P_{\xi,s}\cap B} f(x)\, dx.$$

Нормальное преобразование Радона $\mathcal{R}_2^{\perp} : L_2(S^2(B)) \to L_2(Z, \rho)$ симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{u}(x)$ задается формулой

$$[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{u}](s,\xi) = \int\limits_{P_{\xi,s}\cap B} \langle \mathbf{u}(x), \xi^2\rangle\, dx.$$

Сформулируем в виде утверждения свойства нормального преобразования Радона, полученные в работе [19].

Утверждение 1 *1) Для функции $\psi \in H_0^2(B)$ выполняется равенство*

$$[\mathcal{R}_2^{\perp}(\mathrm{d}^2\psi)](s,\xi) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}[\mathcal{R}\psi](s,\xi).$$

2) Ядро оператора нормального преобразования Радона, действующего на симметричные 2-тензорные поля, состоит из любых линейных комбинаций следующих двух типов полей:

— *соленоидальные симметричные 2-тензорные поля* $\mathbf{w}$*, для которых выполняется* $(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) = \operatorname{rot} \mathbf{u}^i$*,* $i = 1,2,3$*, где* $\mathbf{u}^i \in H^2(S^1(B)) \cup H^1_0(S^1(B))$*,* $i = 1,2,3$*;*

— *потенциальные симметричные 2-тензорные поля вида* $\mathbf{w} = \mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{v})$ *такие, что* $\mathbf{v} \in H^2(S^1(B)) \cup H^1_0(S^1(B))$.

Из Утверждения 1 следует, что по известному нормальному преобразованию Радона симметричного 2-тензорного поля можно восстановить лишь его потенциальную часть вида $\mathrm{d}^2\psi$, $\psi \in H^2(B)$.

Ортогональные многочлены. Напомним определения и некоторые свойства ортогональных многочленов, необходимых для построение сингулярного разложения оператора нормального преобразования Радона.

Полиномы Якоби $P_n^{(p,q)}(t)$ степени n с индексами (p,q), заданные на отрезке $[0,1]$, определяются явной формулой

$$P_n^{(p,q)}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(p+n)(p+n+1)\dots(p+n+k-1)}{q(q+1)\dots(q+k-1)} t^k,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. На отрезке $[0,1]$ эти полиномы ортогональны с весом $t^{q-1}(1-t)^{p-q}$, т.е. при $n \neq m$ имеет место равенство

$$\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-q}\, P_n^{(p,q)}(t)\, P_m^{(p,q)}(t)\, dt = 0.$$

Норма полиномов Якоби может быть вычислена по следующей формуле:

$$\|P_n^{(p,q)}\|^2 = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-q}\, P_n^{(p,q)}(t)\, P_n^{(p,q)}(t)\, dt = \frac{n!\Gamma(q)\Gamma(q)\Gamma(p-q+n+1)}{\Gamma(q+n)\Gamma(p+n)(p+2n)}. \tag{1}$$

Первая и вторая производные полинома Якоби вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \left(P_n^{(p,q)}\right)'(t) &= -\frac{n(n+p)}{q} P_{n-1}^{(p+2,q+1)}(t), \\ \left(P_n^{(p,q)}\right)''(t) &= \frac{n(n-1)(n+p)(n+p+1)}{q(q+1)} P_{n-2}^{(p+4,q+2)}(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Полиномы Гегенбауэра $C_n^{(\mu)}(t)$ степени n с индексом μ задаются явной формулой

$$C_n^{(\mu)}(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\mu)}{\Gamma(\mu)\, k!\, (n-2k)!} (2t)^{n-2k},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — Гамма-функция, а $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. На отрезке $[-1,1]$ полиномы Гегенбауэра ортогональны с весом $(1-t^2)^{\mu-1/2}$. Норма полиномов Гегенбауэра может быть вычислена по формуле

$$\|C_n^{(\mu)}\|^2 = \int_{-1}^{1} C_n^{(\mu)}(t) C_n^{(\mu)}(t)(1-t^2)^{\mu-1/2} dt = \frac{\pi 2^{1-2\mu}\Gamma(n+2\mu)}{n!(n+\mu)\Gamma^2(\mu)}.$$

Полиномы Лежандра $L_k(t)$ степени k представляют собой частный случай полиномов Гегенбауэра: $L_k(t) = C_k^{(0.5)}(t)$. Производная полинома Лежандра вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dt}L_k(t) = \frac{k}{1-t^2}(L_{k-1}(t) - tL_k(t)).$$

Полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $[-1,1]$. Норма полиномов Лежандра может быть вычислена по формуле

$$\|L_k\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} L_k^2(t)dt = \frac{2}{2k+1}.$$

Присоединенный полином Лежандра $L_{kl}(t)$ степени k с целым индексом $l = 0,\dots,k$ удовлетворяет уравнению Лежандра, то есть имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d}{dt}L_{kl}(t)\right) + \left(k(k+1) - \frac{l^2}{1-t^2}\right)L_{kl}(t) = 0, \tag{3}$$

и определяется через полином Лежандра:

$$L_{kl}(t) = (1-t^2)^{l/2}\frac{d^l}{dt^l}L_k(t). \tag{4}$$

На отрезке $[-1,1]$ присоединенные полиномы Лежандра ортогональны.

Сферическая функция Y_{kl} порядка k с целым индексом $l = -k,\dots,k$ определяется формулой

$$Y_{kl}(\theta,\varphi) = L_{k|l|}(\cos\theta)\cdot\begin{cases}\cos l\varphi, & l \geqslant 0,\\ \sin|l|\varphi, & l < 0.\end{cases}$$

Сферические функции ортогональны на единичной сфере. Норма сферической функции вычисляется по формуле

$$\|Y_{kl}\| = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{4\pi}{2k+1}}, & l = 0,\\ \sqrt{\dfrac{2\pi}{2k+1}\,\dfrac{(k+|l|)!}{(k-|l|)!}}, & l \neq 0.\end{cases}$$

Гармонические полиномы $H_{kl}(x)$ степени k с целым индексом $l = -k,\dots,k$ в сферической системе координат имеют вид

$$H_{kl}(r,\theta,\varphi) = r^k Y_{kl}(\theta,\varphi).$$

3. Сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона, действующего на симметричные 2-тензорные поля

Базисные потенциальные симметричные 2-тензорные поля в исходном пространстве $L_2(S^2(B))$ будем строить методом потенциалов, т.е. выбираем базисную систему функций в пространстве потенциалов $H_0^2(B)$ и далее, применяя дифференциальный оператор d^2, образуем из нее 2-тензорный потенциальный базис в исходном пространстве $L_2(S^2(B))$. За основу исходной базисной системы потенциалов выбираются полиномы следующего вида:

$$\Phi_{kln}(x) = (1-|x|^2)^2\,H_{kl}(x)\,P_n^{(k+3.5,k+1.5)}(|x|^2), \quad k,n = 0,1,2,\dots, \quad l = -k,\dots k,$$

они же в сферической системе координат ($x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$)

$$\Phi_{kln}(r,\theta,\varphi) = (1-r^2)^2\, r^k\, P_n^{(k+3.5,k+1.5)}(r^2)\, Y_{kl}(\theta,\varphi).$$

Применяя к данным потенциалам оператор d^2, получим семейство базисных потенциальных симметричных 2-тензорных полей

$$\mathbf{T}_{kln}(x) = \mathrm{d}^2\Phi_{kln}(x), \qquad k,n = 0,1,2,\ldots, \quad l = -k,\ldots,k.$$

Базисную систему потенциалов определим равенствами $\widetilde{\Phi}_{kln}(x) = \lambda_{kln}\Phi_{kln}(x)$, $k,n = 0,1,2,\ldots$, $l = -k,\ldots k$, где

$$\lambda_{kln} = \frac{\Gamma(n+k+1.5)}{(n+2)!\Gamma(k+1.5)\|Y_{kl}\|}\sqrt{\frac{2n+k+3.5}{8}}.$$

Основным результатом данной статьи является

Теорема 1 *Система потенциальных симметричных 2-тензорных полей $\widetilde{\mathbf{T}}_{kln} = \mathrm{d}^2\widetilde{\Phi}_{kln}$, является ортонормированной системой в пространстве $L_2(S^2(B))$.*

Сформулируем результаты, полученные в работе [19].

Утверждение 2 *Образы потенциальных симметричных 2-тензорных полей $\widetilde{\mathbf{T}}_{kln}$, $k,n = 0,1,2,\ldots,l = -k,\ldots,k$, под действием оператора нормального преобразования Радона имеют вид*

$$[\mathcal{R}_2^{\perp}\widetilde{\mathbf{T}}_{kln}](s,\,\theta,\,\varphi) = b_{kln}(1-s^2)C_{2n+k+2}^{(1.5)}(s)Y_{kl}(\theta,\varphi),$$

где

$$b_{kln} = \frac{(-1)^n 4\pi}{(2n+k+3)(2n+k+4)\|Y_{kl}\|}\sqrt{\frac{2n+k+3.5}{2}}.$$

Утверждение 3 *Система функций*

$$G_{kln}(s,\,\theta,\,\varphi) = \frac{(-1)^n\sqrt{2n+k+3.5}}{\sqrt{(2n+k+3)(2n+k+4)}\|Y_{kl}\|}(1-s^2)C_{2n+k+2}^{(1.5)}(s)Y_{kl}(\theta,\varphi),$$
$$k,n = 0,1,2,\ldots, \quad l = -k,\ldots,k,$$

является ортонормированной системой в пространстве $L_2(Z,(1-s^2)^{-1})$.

Из Утверждения 2 и определения функций G_{kln} следуют равенства:

$$[\mathcal{R}_2^{\perp}\widetilde{\mathbf{T}}_{kln}](s,\,\theta,\,\varphi) = \sigma_{kn}G_{kln}(s,\,\theta,\,\varphi), \qquad k,n = 0,1,2,\ldots, \quad l = -k,\ldots,k,$$

где числа

$$\sigma_{kn} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{(2n+k+3)(2n+k+4)}},$$

с учетом Теоремы 1 и Утверждения 3, являются сингулярными числами оператора нормального преобразования Радона. Таким образом имеет место

Теорема 2 *Сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона*

$$\mathcal{R}_2^{\perp} \,:\, L_2(S^2(B)) \to L_2(Z,(1-s^2)^{-1})$$

имеет вид

$$g(s,\theta,\varphi) := [\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{w}](s,\theta,\varphi) = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\sigma_{kn}\left(\mathbf{w},\widetilde{\mathbf{T}}_{kln}\right)_{L_2(S^2(B))}G_{kln}(s,\theta,\varphi),$$

а обратный оператор вычисляется по формуле

$$\mathbf{w}(x) = \left((\mathcal{R}_2^{\perp})^{-1} g\right)(x) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^{k} \sigma_{kn}^{-1} (g, G_{kln})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1})} \widetilde{\mathbf{T}}_{kln}(x).$$

4. Доказательство Теоремы 1

Введем для краткости обозначения:

$$P_n := P_n^{(k+3.5,k+1.5)}(r^2), \quad P_n' := \frac{\partial P_n^{(k+3.5,k+1.5)}}{\partial(r^2)}(r^2), \quad P_n'' := \frac{\partial^2 P_n^{(k+3.5,k+1.5)}}{\partial(r^2)^2}(r^2),$$

$$Y_{kl} := Y_{kl}(\varphi,\theta), \qquad Y_{kl,\varphi}' := \frac{\partial Y_{kl}}{\partial \varphi}(\varphi,\theta), \qquad Y_{kl,\theta}' := \frac{\partial Y_{kl}}{\partial \theta}(\varphi,\theta),$$

$$Y_{kl,\varphi\varphi}'' := \frac{\partial^2 Y_{kl}}{\partial \varphi^2}(\varphi,\theta), \qquad Y_{kl,\varphi\theta}'' := \frac{\partial^2 Y_{kl}}{\partial \varphi \partial \theta}(\varphi,\theta), \qquad Y_{kl,\theta\theta}'' := \frac{\partial^2 Y_{kl}}{\partial \theta^2}(\varphi,\theta).$$

Лемма 1 *Значения компонент базисных симметричных 2-тензорных полей могут быть вычислены по формулам (в полярной системе координат)*

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{T}_{kln}\right)_{ij}(r,\theta,\varphi) &= \left(2A_{ij} r^{k+2} - 2B_{ij}(1-r^2)r^k + C_{ij}(1-r^2)^2 r^{k-2}\right) P_n \\ &\quad + \left(-4A_{ij}(1-r^2)r^{k+2} + B_{ij}(1-r^2)^2 r^k\right) P_n' + A_{ij}(1-r^2)^2 r^{k+2} P_n'', \\ & i,j = 1,2,3,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11} &= Y_{kl}\left(4\cos^2\varphi \sin^2\theta\right), \\
B_{11} &= Y_{kl}\left(4k\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2\right) + Y_{kl,\varphi}'\left(-2\sin 2\varphi\right) + Y_{kl,\theta}'\left(2\cos^2\varphi \sin 2\theta\right), \\
C_{11} &= Y_{kl}\left(k(k-2)\cos^2\varphi\sin^2\theta + k\right) + Y_{kl,\varphi}'\left(\sin 2\varphi(\operatorname{ctg}^2\theta - k + 1)\right) \\
&\quad + Y_{kl,\varphi\varphi}''\left(\sin^2\varphi(1+\operatorname{ctg}^2\theta)\right) + Y_{kl,\theta}'\left((k-1)\cos^2\varphi\sin 2\theta + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) \\
&\quad + Y_{kl,\varphi\theta}''\left(-\sin 2\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) + Y_{kl,\theta\theta}''\left(\cos^2\varphi\cos^2\theta\right); \\
A_{12} = A_{21} &= Y_{kl}\left(2\sin 2\varphi \sin^2\theta\right), \\
B_{12} = B_{21} &= Y_{kl}\left(2k\sin 2\varphi\sin^2\theta\right) + Y_{kl,\varphi}'\left(2\cos 2\varphi\right) + Y_{kl,\theta}'\left(\sin 2\varphi \sin 2\theta\right), \\
C_{12} = C_{21} &= Y_{kl}\left(k(k-2)\sin 2\varphi \sin^2\theta/2\right) + Y_{kl,\varphi}'\left(\cos 2\varphi(k-1-\operatorname{ctg}^2\theta)\right) \\
&\quad + Y_{kl,\varphi\varphi}''\left(-\sin 2\varphi(1+\operatorname{ctg}^2\theta)/2\right) + Y_{kl,\theta}'\left(\sin 2\varphi((k-1)\sin 2\theta - \operatorname{ctg}\theta)/2\right) \\
&\quad + Y_{kl,\varphi\theta}''\left(\cos 2\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) + Y_{kl,\theta\theta}''\left(\sin 2\varphi\cos^2\theta/2\right); \\
A_{22} &= Y_{kl}\left(4\sin^2\varphi\sin^2\theta\right), \\
B_{22} &= Y_{kl}\left(4k\sin^2\varphi\sin^2\theta + 2\right) + Y_{kl,\varphi}'\left(2\sin 2\varphi\right) + Y_{kl,\theta}'\left(2\sin^2\varphi \sin 2\theta\right), \\
C_{22} &= Y_{kl}\left(k(k-2)\sin^2\varphi\sin^2\theta + k\right) + Y_{kl,\varphi}'\left(\sin 2\varphi(k-1-\operatorname{ctg}^2\theta)\right) \\
&\quad + Y_{kl,\varphi\varphi}''\left(\cos^2\varphi(1+\operatorname{ctg}^2\theta)\right) + Y_{kl,\theta}'\left((k-1)\sin^2\varphi\sin 2\theta + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) \\
&\quad + Y_{kl,\varphi\theta}''\left(\sin 2\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) + Y_{kl,\theta\theta}''\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta\right); \\
A_{13} = A_{31} &= Y_{kl}\left(2\cos\varphi \sin 2\theta\right), \\
B_{13} = B_{31} &= Y_{kl}\left(2k\cos\varphi\sin 2\theta\right) + Y_{kl,\varphi}'\left(-2\sin\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) + Y_{kl,\theta}'\left(2\cos\varphi\cos 2\theta\right),
\end{aligned}$$

$$C_{13} = C_{31} = Y_{kl}\left(k(k-2)\cos\varphi\sin 2\theta/2\right) + Y'_{kl,\varphi}\left(-k\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)$$
$$+ Y'_{kl,\theta}\left((k-1)\cos\varphi\cos 2\theta\right) + Y''_{kl,\varphi\theta}\sin\varphi + Y''_{kl,\theta\theta}\left(-\cos\varphi\sin 2\theta/2\right);$$
$$A_{23} = A_{32} = Y_{kl}\left(2\sin\varphi\sin 2\theta\right),$$
$$B_{23} = B_{32} = Y_{kl}\left(2k\sin\varphi\sin 2\theta\right) + Y'_{kl,\varphi}\left(2\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\right) + Y'_{kl,\theta}\left(2\sin\varphi\cos 2\theta\right),$$
$$C_{23} = C_{32} = Y_{kl}\left(k(k-2)\sin\varphi\sin 2\theta/2\right) + Y'_{kl,\varphi}\left(k\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)$$
$$+ Y'_{kl,\theta}\left((k-1)\sin\varphi\cos 2\theta\right) + Y''_{kl,\varphi\theta}(-\cos\varphi) + Y''_{kl,\theta\theta}\left(-\sin\varphi\sin 2\theta/2\right);$$
$$A_{33} = Y_{kl}\left(4\cos^2\theta\right),$$
$$B_{33} = Y_{kl}\left(4k\cos^2\theta + 2\right) + Y'_{kl,\theta}\left(-2\sin 2\theta\right),$$
$$C_{33} = Y_{kl}\left(k(k-2)\cos^2\theta + k\right) + Y'_{kl,\theta}\left(-(k-1)\sin 2\theta\right) + Y''_{kl,\theta\theta}\left(\sin^2\theta\right).$$

Доказательство. Переходя от декартовой системы координат к сферической, имеем

$$\frac{\partial^2\Phi_{kln}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial r}\cos\varphi\sin\theta + \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial\theta}\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r} - \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)$$
$$= \frac{\partial^2\Phi_{kln}}{\partial r^2}\cos^2\varphi\sin^2\theta + \frac{\partial^2\Phi_{kln}}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\partial^2\Phi_{kln}}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$
$$+ 2\frac{\partial^2\Phi_{kln}}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta}{r} - 2\frac{\partial^2\Phi_{kln}}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - 2\frac{\partial^2\Phi_{kln}}{\partial\theta\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{r^2\sin\theta}$$
$$+ \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial\theta}\frac{\cos\theta(\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi\sin^2\theta)}{r^2\sin\theta}$$
$$+ 2\frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}.$$

Подставляя выражение для Φ_{kln} и группируя слагаемые по функциям от r^2, получим утверждение Леммы для $(T_{kln})_{11}(r,\theta,\varphi)$.

Аналогичным образом, используя формулы

$$\frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial y} = \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial r}\sin\varphi\sin\theta + \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial\theta}\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r} + \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta},$$
$$\frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\Phi_{kln}}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

получим оставшиеся утверждения Леммы. □

Ортогональность в случае $\mathbf{n_1 \neq n_2,\ k_1 = k_2,\ l_1 = l_2}$. Здесь и далее считаем, что $l \geqslant 0$, случай $l < 0$ доказывается аналогично. Пользуясь Леммой 1, вычислим скалярное произведение

$$(\mathbf{T}_{kln_1}, \mathbf{T}_{kln_2})_{L_2(S^2(B))} = \iiint\limits_B \sum_{i,j=1}^{3}\left((T_{kln_1})_{ij}(x,y,z)(T_{kln_2})_{ij}(x,y,z)\right)dx\,dy\,dz$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{i,j=1}^{3}(T_{kln_1})_{ij}(r,\theta,\varphi)(T_{kln_2})_{ij}(r,\theta,\varphi)\right)r^2\sin\theta d\theta\,d\varphi\,dr.$$

Заносим одно r под dr, на второе r домножим все подынтегральное выражение и рассмотрим отдельно интеграл по r^2. Используя свойства ортогональности полиномов Якоби

$$\int\limits_0^1 r^{2k+1}(1-r^2)^2 P_{n_1}P_{n_2}dr^2 = 0, \qquad \int\limits_0^1 r^{2k+3}(1-r^2)^3 P'_{n_1}P'_{n_2}dr^2 = 0,$$

$$\int\limits_0^1 r^{2k+5}(1-r^2)^4 P''_{n_1}P''_{n_2}dr^2 = 0,$$

получим

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{T}_{kln_1}, \mathbf{T}_{kln_2})_{L_2(S^2(B))} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{i,j=1}^{3}\left(B_{ij}^2(2k+1) - A_{ij}B_{ij}\frac{(2k+3)(2k+1)}{2}\right.\\
&\left.-A_{ij}C_{ij}\frac{(2k+3)(2k+1)}{2} - 2C_{ij}^2 + B_{ij}C_{ij}(2k-1)\right)(1-r^2)^2 r^{2k-1}P_{n_1}P_{n_2}\sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr^2\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{i,j=1}^{3}\left(C_{ij}^2 + A_{ij}C_{ij}(k^2-1/4) - B_{ij}C_{ij}(k-1/2)\right)\\
&\cdot(1-r^2)^2 r^{2k-3}P_{n_1}P_{n_2}\sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr^2\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{i,j=1}^{3}\left(B_{ij}^2 - 2A_{ij}C_{ij} - A_{ij}B_{ij}\frac{2k+3}{2}\right)(1-r^2)^3 r^{2k+1}P'_{n_1}P'_{n_2}\sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr^2.
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно последний интеграл. Подставляя выражения для A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} и суммируя, получим следующее выражение

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-r^2)^3 r^{2k+1}P'_{n_1}P'_{n_2}dr^2\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{i,j=1}^{3}\left(B_{ij}^2 - 2A_{ij}C_{ij} - A_{ij}B_{ij}\frac{2k+3}{2}\right)\sin\theta d\theta\, d\varphi\\
=&\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-r^2)^3 r^{2k+1}P'_{n_1}P'_{n_2}dr^2\\
&\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(-8k(k+1)Y_{kl}^2 + 8Y'_{kl,\theta}Y'_{kl,\theta} + 8\frac{1}{\sin^2\theta}Y'_{kl,\varphi}Y'_{kl,\varphi}\right)\sin\theta d\theta\, d\varphi.
\end{aligned}$$

В работе [15] доказано, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(-k(k+1)Y_{kl}^2 + Y'_{kl,\theta}Y'_{kl,\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}Y'_{kl,\varphi}Y'_{kl,\varphi}\right)\sin\theta d\theta\, d\varphi = 0,$$

поэтому последний интеграл обращается в нуль и остается доказать равенство нулю суммы первых двух интегралов.

Заметим, что подынтегральные выражения в рассматриваемых интегралах линейно зависимы. Именно, для любых $i, j = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned}
&B_{ij}^2(2k+1) - (A_{ij}B_{ij} + A_{ij}C_{ij})\frac{(2k+3)(2k+1)}{2} - 2C_{ij}^2 + B_{ij}C_{ij}(2k-1)\\
&= (2k+1)\left(B_{ij}^2 - 2A_{ij}C_{ij} - A_{ij}B_{ij}\frac{2k+3}{2}\right) - 2C_{ij}\left(C_{ij} + A_{ij}(k^2-1/4) - B_{ij}(k-1/2)\right),
\end{aligned}$$

поэтому для доказательства ортогональности достаточно показать равенство нулю второго интеграла. Именно, докажем, что

$$I := \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{i,j=1}^{3}\big(C_{ij}^2 + A_{ij}C_{ij}(k^2-1/4) - B_{ij}C_{ij}(k-1/2)\big)\sin\theta d\theta\, d\varphi\ = 0.$$

Подставляя выражения для A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} и суммируя, получим

$$\begin{aligned} I = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big(& k(k-2)(k^2-1)Y_{kl}^2 + \operatorname{ctg}\theta\, Y_{kl}Y'_{kl,\theta} + (\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y_{kl}Y''_{kl,\varphi\varphi} + Y_{kl}Y''_{kl,\theta\theta}\\ &+ 2(\operatorname{ctg}^2\theta+1)(\operatorname{ctg}^2\theta - k^2 + k)Y'_{kl,\varphi}Y'_{kl,\varphi} - 4\ \operatorname{ctg}\theta(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y'_{kl,\varphi}Y''_{kl,\varphi\theta}\\ &+ (\operatorname{ctg}^2\theta - 2k(k-1))Y'_{kl,\theta}Y'_{kl,\theta} + 2\operatorname{ctg}\theta(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y'_{kl,\theta}Y''_{kl,\varphi\varphi}\\ &+ (\operatorname{ctg}^2\theta+1)^2Y''_{kl,\varphi\varphi}Y''_{kl,\varphi\varphi} + 2(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y''_{kl,\varphi\theta}Y''_{kl,\varphi\theta} + Y''_{kl,\theta\theta}Y''_{kl,\theta\theta}\Big)\sin\theta d\theta\, d\varphi\,. \end{aligned}$$

Представляя Y_{kl} через присоединенные полиномы Лежандра, делая замену $t=\cos\theta$ и интегрируя по φ, получим

$$\begin{aligned} I = -\pi\int\limits_{-1}^{1}\Big(& k(k-2)(k^2-1)\,L_{kl}^2 - tL_{kl}L'_{kl} - \frac{l^2}{1-t^2}L_{kl}^2 + L_{kl}(-tL'_{kl} + (1-t^2)L''_{kl})\\ &+ \frac{2l^2}{(1-t^2)}L_{kl}^2\Big(\frac{t^2}{1-t^2} - k(k-1)\Big) + \frac{4l^2t}{1-t^2}L_{kl}L'_{kl}\\ &+ L'_{kl}L'_{kl}(1-t^2)\Big(\frac{t^2}{1-t^2} - 2k(k-1)\Big) + \frac{2l^2t}{1-t^2}L_{kl}L'_{kl} + \frac{l^4}{(1-t^2)^2}L_{kl}^2\\ &+ 2l^2L'_{kl}L'_{kl} + \Big(-tL'_{kl} + (1-t^2)L''_{kl}\Big)^2\Big)\,dt\\ = -\pi\int\limits_{-1}^{1}\Big(& k(k-2)(k^2-1)\,L_{kl}^2 - 2tL_{kl}L'_{kl} - \frac{l^2}{1-t^2}L_{kl}^2 + (1-t^2)L_{kl}L''_{kl} + \frac{2l^2t^2}{(1-t^2)^2}L_{kl}^2\\ &- \frac{2l^2k(k-1)}{1-t^2}L_{kl}^2 + \frac{6l^2t}{1-t^2}L_{kl}L'_{kl} + 2t^2L'_{kl}L'_{kl} - 2k(k-1)(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}\\ &+ \frac{l^4}{(1-t^2)^2}L_{kl}^2 + 2l^2L'_{kl}L'_{kl} + (1-t^2)^2L''_{kl}L''_{kl} - 2t(1-t^2)L'_{kl}L''_{kl}\Big)\,dt. \end{aligned}$$

Возводя уравнение Лежандра (3) в квадрат и вычитая из подынтегрального выражения, получим

$$\begin{aligned} I = -\pi\int\limits_{-1}^{1}\Big(& k(k+1)(-4k+2)L_{kl}^2 - \frac{l^2}{1-t^2}L_{kl}^2 + (1-2k-2k^2)(1-t^2)L_{kl}L''_{kl}\\ &+ \frac{2l^2t^2}{(1-t^2)^2}L_{kl}^2 + \frac{4kl^2}{1-t^2}L_{kl}^2 + \frac{2l^2t}{1-t^2}L_{kl}L'_{kl} - 2t^2L'_{kl}L'_{kl} - 2k(k-1)(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}\\ &+ 2l^2L'_{kl}L'_{kl} + 2t(1-t^2)L'_{kl}L''_{kl} + 2l^2L_{kl}L''_{kl} + 2t(2k^2+2k-1)L_{kl}L'_{kl}\Big)\,dt. \end{aligned}$$

Лемма 2 *Для произвольных k_1, k_2 имеет место равенство*

$$(1-t^2)L_{k_1l}L'_{k_2l}\Big|_{-1}^{1}=0. \tag{5}$$

Доказательство. При $l=0$ имеем

$$(1-t^2)L_{k_1l}L'_{k_2l}\Big|_{-1}^{1}=(1-t^2)L_{k_1}L'_{k_2}\Big|_{-1}^{1}=0,$$

поскольку полиномы Лежандра и их производные не имеют неопределенностей при $t=\pm 1$. Если $l=1$, то

$$\begin{aligned}(1-t^2)L_{k_1l}L'_{k_2l}\Big|_{-1}^{1} &= (1-t^2)L_{k_11}L'_{k_21}\Big|_{-1}^{1}\\ &\overset{(4)}{=}((1-t^2)\left((1-t^2)^{1/2}L'_{k_1}\right)\left((1-t^2)^{1/2}L'_{k_2}\right)'\Big|_{-1}^{1}\\ &=(1-t^2)\left((1-t^2)^{1/2}L'_{k_1}\right)\left(\frac{-t}{(1-t^2)^{1/2}}L'_{k_2}+(1-t^2)^{1/2}L''_{k_2}\right)\Big|_{-1}^{1}\\ &=(1-t^2)\left(-tL'_{k_1}L'_{k_2}+(1-t^2)L'_{k_1}L''_{k_2}\right)\Big|_{-1}^{1}=0.\end{aligned}$$

При $l\geqslant 2$ равенство доказывается аналогично. □

Далее заметим, что

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left(\frac{(4k-1)l^2}{1-t^2}L_{kl}^2-k(k+1)(4k-1)L_{kl}^2\right)dt\\ &=\int_{-1}^{1}(4k-1)\left(\frac{l^2}{1-t^2}L_{kl}-k(k+1)L_{kl}\right)L_{kl}\,dt\overset{(3)}{=}\int_{-1}^{1}(4k-1)\left((1-t^2)L'_{kl}\right)'L_{kl}\,dt\\ &=(4k-1)(1-t^2)L_{kl}L'_{kl}\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(4k-1)(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}\,dt\\ &\overset{(5)}{=}-\int_{-1}^{1}(4k-1)(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}\,dt,\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}I=-\pi\int_{-1}^{1}\Big(&k(k+1)L_{kl}^2+\underline{(1-2k-2k^2)(1-t^2)L_{kl}L''_{kl}}+\frac{2l^2t^2}{(1-t^2)^2}L_{kl}^2\\ &+\frac{2l^2t}{1-t^2}L_{kl}L'_{kl}-2t^2L'_{kl}L'_{kl}\underline{-(2k^2+2k-1)(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}}+2l^2L'_{kl}L'_{kl}\\ &+2t(1-t^2)L'_{kl}L''_{kl}+2l^2L_{kl}L''_{kl}\underline{+2t(2k^2+2k-1)L_{kl}L'_{kl}}\Big)\,dt.\end{aligned}$$

Группируя подчеркнутые слагаемые, получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big((1-2k-2k^2)(1-t^2)L_{kl}L''_{kl}-(2k^2+2k-1)(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}$$
$$+\,2t(2k^2+2k-1)L_{kl}L'_{kl}\Big)\,dt$$
$$=\int\limits_{-1}^{1}(1-2k-2k^2)\left((1-t^2)L_{kl}L''_{kl}+(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}-2tL_{kl}L'_{kl}\right)\,dt$$
$$=\int\limits_{-1}^{1}(1-2k-2k^2)\left((1-t^2)L_{kl}L'_{kl}\right)'\,dt$$
$$=(1-2k-2k^2)(1-t^2)L_{kl}L'_{kl}\Big|_{-1}^{1}\overset{(5)}{=}0.$$

Таким образом имеем

$$I=-\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(k(k+1)L^2_{kl}+\frac{2l^2t^2}{(1-t^2)^2}L^2_{kl}+\frac{2l^2t}{1-t^2}L_{kl}L'_{kl}-2t^2L'_{kl}L'_{kl}+2l^2L'_{kl}L'_{kl}\right.$$
$$\left.+2t(1-t^2)L'_{kl}L''_{kl}+2l^2L_{kl}L''_{kl}\right)\,dt.$$

Из уравнения Лежандра (3) следует равенство

$$\int\limits_{-1}^{1}k(k+1)L^2_{kl}\,dt=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{l^2}{1-t^2}L^2_{kl}-\left((1-t^2)L'_{kl}\right)'L_{kl}\right)\,dt$$
$$=-(1-t^2)L_{kl}L'_{kl}\Big|_{-1}^{1}+\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{l^2}{1-t^2}L^2_{kl}+(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}\right)\,dt$$
$$\overset{(5)}{=}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{l^2}{1-t^2}L^2_{kl}+(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}\right)\,dt,$$

поэтому

$$I=-\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{l^2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}L^2_{kl}+\frac{2l^2t}{1-t^2}L_{kl}L'_{kl}-2t^2L'_{kl}L'_{kl}+2l^2L'_{kl}L'_{kl}\right.$$
$$\left.+2t(1-t^2)L'_{kl}L''_{kl}+2l^2L_{kl}L''_{kl}+(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}\right)\,dt$$
$$\overset{(3)}{=}-\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{l^2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}L^2_{kl}+\frac{2l^2t}{1-t^2}L_{kl}L'_{kl}-2t^2L'_{kl}L'_{kl}+2l^2L'_{kl}L'_{kl}\right.$$
$$\left.+2tL'_{kl}\left[2tL'_{kl}-k(k+1)L_{kl}+\frac{l^2}{1-t^2}L_{kl}\right]+2l^2L_{kl}L''_{kl}+(1-t^2)L'_{kl}L'_{kl}\right)\,dt$$

$$= -\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{l^2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} L_{kl}^2 + \frac{4l^2 t}{1-t^2} L_{kl} L'_{kl} + (1+t^2) L'_{kl} L'_{kl} + 2l^2 L'_{kl} L'_{kl} \right.$$
$$\left. -2tk(k+1) L_{kl} L'_{kl} + 2l^2 L_{kl} L''_{kl} \right) dt.$$

Поскольку

$$\int_{-1}^{1} \frac{2l^2 t}{1-t^2} L_{kl} L'_{kl}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{l^2 t}{1-t^2} (L_{kl} L_{kl})'\, dt = \frac{l^2 t}{1-t^2} L_{kl}^2 \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(\frac{l^2 t}{1-t^2} \right)' L_{kl}^2\, dt$$
$$= \frac{l^2 t}{1-t^2} L_{kl}^2 \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{l^2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} L_{kl}^2\, dt$$

и

$$\int_{-1}^{1} \left(2l^2 L'_{kl} L'_{kl} + 2l^2 L_{kl} L''_{kl} \right) dt = 2l^2 \int_{-1}^{1} \left(L_{kl} L'_{kl} \right)' dt = 2l^2 L_{kl} L'_{kl} \Big|_{-1}^{1},$$

имеем

$$I = -\pi \left(\frac{l^2 t}{1-t^2} L_{kl}^2 + 2l^2 L_{kl} L'_{kl} \right) \Big|_{-1}^{1}$$
$$-\pi \int_{-1}^{1} \left(2t L'_{kl} \left(\frac{l^2}{1-t^2} L_{kl} - k(k+1) L_{kl} \right) + (1+t^2) L'_{kl} L'_{kl} \right) dt$$
$$\overset{(3)}{=} -\pi \left(\frac{l^2 t}{1-t^2} L_{kl}^2 + 2l^2 L_{kl} L'_{kl} \right) \Big|_{-1}^{1} - \pi \int_{-1}^{1} \left(2t L'_{kl} \left((1-t^2) L'_{kl} \right)' + (1+t^2) L'_{kl} L'_{kl} \right) dt$$
$$= -\pi \left(\frac{l^2 t}{1-t^2} L_{kl}^2 + 2l^2 L_{kl} L'_{kl} + 2t(1-t^2) L'_{kl} L'_{kl} \right) \Big|_{-1}^{1}$$
$$-\pi \int_{-1}^{1} \left(-(2t L'_{kl})'(1-t^2) L'_{kl} + (1+t^2) L'_{kl} L'_{kl} \right) dt$$
$$= -\pi \left(\frac{l^2 t}{1-t^2} L_{kl}^2 + 2l^2 L_{kl} L'_{kl} + 2t(1-t^2) L'_{kl} L'_{kl} \right) \Big|_{-1}^{1}$$
$$-\pi \int_{-1}^{1} \left((-1+3t^2) L'_{kl} L'_{kl} - 2t(1-t^2) L'_{kl} L''_{kl} \right) dt$$
$$= -\pi \left(\frac{l^2 t}{1-t^2} L_{kl}^2 + 2l^2 L_{kl} L'_{kl} + 2t(1-t^2) L'_{kl} L'_{kl} \right) \Big|_{-1}^{1} - \pi \int_{-1}^{1} \left(-t(1-t^2) L'_{kl} L'_{kl} \right)' dt$$
$$= -\pi \left(\frac{l^2 t}{1-t^2} L_{kl}^2 + 2l^2 L_{kl} L'_{kl} + t(1-t^2) L'_{kl} L'_{kl} \right) \Big|_{-1}^{1}.$$

Если $l = 0$, то $L_{kl} = L_{k0} = L_k$ и $I = -\pi t(1-t^2) L'_k L'_k \Big|_{-1}^{1} = 0.$

Если $l=1$, то $L_{k1} \overset{(4)}{=} (1-t^2)^{1/2}\dfrac{d}{dt}L_k = (1-t^2)^{1/2}L_k'$, значит

$$\begin{aligned}
I = &-\pi\left(\frac{t}{1-t^2}(1-t^2)L_k'L_k' + 2(1-t^2)^{1/2}L_k'\left((1-t^2)^{1/2}L_k'\right)'\right.\\
&\left.+t(1-t^2)\left((1-t^2)^{1/2}L_k'\right)'\left((1-t^2)^{1/2}L_k'\right)'\right)\Bigg|_{-1}^{1}\\
= &-\pi\left(tL_k'L_k' + 2(1-t^2)^{1/2}L_k'\left(\frac{-t}{(1-t^2)^{1/2}}L_k' + (1-t^2)^{1/2}L_k''\right)\right.\\
&\left.+t(1-t^2)\left(\frac{t^2}{1-t^2}L_k'L_k' - 2tL_k'L_k'' + (1-t^2)L_k''L_k''\right)\right)\Bigg|_{-1}^{1}\\
= &-\pi\Big(tL_k'L_k' - 2tL_k'L_k' + 2(1-t^2)L_k'L_k'' + t^3L_k'L_k' - 2t^2(1-t^2)L_k'L_k''\\
&+ t(1-t^2)^2L_k''L_k''\Big)\Bigg|_{-1}^{1}\\
= &-\pi\left(-tL_k'L_k' + t^3L_k'L_k'\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0,
\end{aligned}$$

так как производные полиномов Лежандра не имеют неопределенностей при $t=\pm1$. Аналогично несложно показать, что $I=0$ для $l\geqslant 2$.

Таким образом, ортогональность в случае $k_1=k_2$, $l_1=l_2$ и $n_1\neq n_2$ доказана.

Ортогональность в случае $\mathbf{k_1\neq k_2}$ или $\mathbf{l_1\neq l_2}$, $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$ – любые.

Лемма 3 *Значения компонент базисных симметричных 2-тензорных полей могут быть вычислены по формулам (в полярной системе координат)*

$$\left(\mathbf{T}_{kln}\right)_{ij}(r,\theta,\varphi) = A_{ij}r^{k+2}F'' + B_{ij}r^kF' + C_{ij}r^{k-2}F,\;\; i,j=1,2,3,$$

где A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} из Леммы 1 и $F=(1-r^2)^2P_n^{(k+3.5,\,k+1.5)}(r^2)$.

Этот факт доказывается перегруппировкой слагаемых в представлении из Леммы 1.

Пользуясь Леммой 3, вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
J :&= \left(\mathbf{T}_{k_1l_1n_1}, \mathbf{T}_{k_2l_2n_2}\right)_{L_2(S^2(B))}\\
&= \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\sum_{i,j=1}^{3}(T_{k_1l_1n_1})_{ij}(r,\theta,\varphi)(T_{k_2l_2n_2})_{ij}(r,\theta,\varphi)\right)r^2\sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr.
\end{aligned}$$

Для краткости обозначим

$$\begin{aligned}
&A_\alpha := A_{ij}(k_\alpha,l_\alpha), \qquad B_\alpha := B_{ij}(k_\alpha,l_\alpha),\\
&C_\alpha := C_{ij}(k_\alpha,l_\alpha), \qquad F_\alpha := (1-r^2)^2P_{n_\alpha}^{(k_\alpha+3.5,k_\alpha+1.5)}(r^2), \qquad \alpha=1,2.
\end{aligned}$$

Далее индексы суммирования (ij) опускаем, но суммирование подразумевается. Введем обозначение $k = k_1 + k_2$. Тогда

$$J = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(A_1 r^{k_1+2} F_1'' + B_1 r^{k_1} F_1' + C_1 r^{k_1-2} F_1\right) \cdot \left(A_2 r^{k_2+2} F_2'' + B_2 r^{k_2} F_2' + C_2 r^{k_2-2} F_2\right) r^2 \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(A_1 A_2 r^{k+5} F_1'' F_2'' + B_1 A_2 r^{k+3} F_1' F_2'' + C_1 A_2 r^{k+1} F_1 F_2'' + A_1 B_2 r^{k+3} F_1'' F_2' + B_1 B_2 r^{k+1} F_1' F_2' + C_1 B_2 r^{k-1} F_1 F_2' + A_1 C_2 r^{k+1} F_1'' F_2 + B_1 C_2 r^{k-1} F_1' F_2 + C_1 C_2 r^{k-3} F_1 F_2\right) \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr^2.$$

Рассмотрим отдельно интегралы по r^2

$$\int\limits_0^1 B_1 A_2 r^{k+3} F_1' F_2''\, dr^2 = \int\limits_0^1 B_1 A_2 r^{k+3} F_1' (F_2')'\, dr^2$$

$$= B_1 A_2 r^{k+3} F_1' F_2' \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(B_1 A_2 \frac{k+3}{2} r^{k+1} F_1 F_2' + B_1 A_2 r^{k+3} F_1'' F_2'\right) dr^2$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-B_1 A_2 \frac{k+3}{2} r^{k+1} F_1' F_2' - B_1 A_2 r^{k+3} F_1'' F_2'\right) dr^2.$$

Аналогично имеем

$$\int\limits_0^1 C_1 A_2 r^{k+1} F_1 F_2''\, dr^2 = \int\limits_0^1 \left(-C_1 A_2 \frac{k+1}{2} r^{k-1} F_1 F_2' - C_1 A_2 r^{k+1} F_1' F_2'\right) dr^2,$$

$$\int\limits_0^1 A_1 C_2 r^{k+1} F_1'' F_2\, dr^2 = \int\limits_0^1 \left(-A_1 C_2 \frac{k+1}{2} r^{k-1} F_1' F_2 - A_1 C_2 r^{k+1} F_1' F_2'\right) dr^2.$$

Поэтому

$$J = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \Bigg(A_1 A_2 r^{k+5} F_1'' F_2'' + (A_1 B_2 - B_1 A_2) r^{k+3} F_1'' F_2' + \left(C_1 B_2 - C_1 A_2 \frac{k+1}{2}\right) r^{k-1} F_1 F_2' + \left(B_1 C_2 - A_1 C_2 \frac{k+1}{2}\right) r^{k-1} F_1' F_2 + \left(B_1 B_2 - C_1 A_2 - A_1 C_2 - B_1 A_2 \frac{k+3}{2}\right) r^{k+1} F_1' F_2' + C_1 C_2 r^{k-3} F_1 F_2\Bigg) \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr^2.$$

Поскольку

$$\int_0^1 r^{k-1}F_1F_2'\,dr^2 = r^{k-1}F_1F_2\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{k-1}{2}r^{k-3}F_1F_2 + r^{k-1}F_1'F_2\right)\,dr^2$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{k-1}{2}r^{k-3}F_1F_2 - r^{k-1}F_1'F_2\right)\,dr^2,$$

получаем

$$J = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Bigg(A_1A_2r^{k+5}F_1''F_2'' + (A_1B_2 - B_1A_2)r^{k+3}F_1''F_2'$$
$$+ \left(B_1B_2 - C_1A_2 - A_1C_2 - B_1A_2\frac{k+3}{2}\right)r^{k+1}F_1'F_2'$$
$$+ \left(B_1C_2 - A_1C_2\frac{k+1}{2} - C_1B_2 + C_1A_2\frac{k+1}{2}\right)r^{k-1}F_1'F_2$$
$$+ \left(C_1C_2 - C_1B_2\frac{k-1}{2} + C_1A_2\frac{k^2-1}{4}\right)r^{k-3}F_1F_2\Bigg)\sin\theta d\theta\,d\varphi\,dr^2.$$

Непосредственно вычисляя значение A_1A_2, получим $A_1A_2 = 16Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2}$. Тогда

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A_1A_2r^{k+5}F_1''F_2''\sin\theta d\theta\,d\varphi dr^2 = 16\int_0^1 r^{k+5}F_1''F_2''dr^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2}\sin\theta d\theta d\varphi = 0$$

в силу ортогональности сферических функций Y_{kl} при $k_1 \neq k_2$ или $l_1 \neq l_2$. Аналогичным образом, вычисляя значение A_1B_2, A_2B_1, A_2C_1 и A_1C_2, получим

$$A_1B_2 = 16k_2Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2}, \qquad A_1C_2 = 4k_2(k_2-1)Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2},$$
$$A_2B_1 = 16k_1Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2}, \qquad A_2C_1 = 4k_1(k_1-1)Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2}.$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A_1B_2\sin\theta d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A_2B_1\sin\theta d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A_1C_2\sin\theta d\theta\,d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A_2C_1\sin\theta d\theta\,d\varphi = 0$$

и

$$J = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Big(B_1B_2r^{k+1}F_1'F_2' + (B_1C_2 - C_1B_2)\,r^{k-1}F_1'F_2$$
$$+ \left(C_1C_2 - C_1B_2\frac{k-1}{2}\right)r^{k-3}F_1F_2\Big)\sin\theta d\theta\,d\varphi\,dr^2.$$

Вычисляя C_1B_2, получим

$$C_1B_2 = (4k_1k_2(k_2-1) + 2k_2(k_2+1))Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2} + 2(1+\operatorname{ctg}^2\theta)Y''_{k_1l_1,\varphi\varphi}Y_{k_2l_2}$$
$$+ 2\operatorname{ctg}\theta Y'_{k_1l_1,\theta}Y_{k_2l_2} + 2Y''_{k_1l_1,\theta\theta}Y_{k_2l_2} + 4(k_1-1)(1+\operatorname{ctg}^2\theta)Y'_{k_1l_1,\varphi}Y'_{k_2l_2,\varphi}$$
$$+ 4(k_1-1)Y'_{k_1l_1,\theta}Y'_{k_2l_2,\theta}.$$

Проинтегрировав первое слагаемое $(4k_1k_2(k_2-1) + 2k_2(k_2+1))Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2}$ по θ и φ получим 0 в силу ортогональности сферических функций. Поскольку $Y_{kl} = L_{kl}(\cos\theta)\cos l\varphi$ и при $l_1 \neq l_2$ имеет место

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos l_1\varphi \cos l_2\varphi \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin l_1\varphi \sin l_2\varphi \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sin l_1\varphi \cos l_2\varphi \, d\varphi = 0, \tag{6}$$

для случая $l_1 \neq l_2$, имеем $C_1B_2 = 0$. Далее при рассмотрении C_1B_2 считаем, что $l_1 = l_2 = l$.

Лемма 4 *Имеет место равенство*

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (Y'_{k_1l,\theta}Y'_{k_2l,\theta} + (1+\operatorname{ctg}^2\theta)Y'_{k_1l,\varphi}Y'_{k_2l,\varphi}) \sin\theta d\theta\, d\varphi = 0.$$

Доказательство. Представив сферические функции через присоединенные полиномы Лежандра, проинтегрировав по φ и сделав замену $t = \cos\theta$, получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (Y'_{k_1l,\theta}Y'_{k_2l,\theta} + (1+\operatorname{ctg}^2\theta)Y'_{k_1l,\varphi}Y'_{k_2l,\varphi}) \sin\theta d\theta\, d\varphi$$
$$= -\pi \int\limits_{-1}^{1} \left(L'_{k_1l}(t)L'_{k_2l}(t)(1-t^2) + L_{k_1l}(t)L_{k_2l}(t)\frac{l^2}{1-t^2} \right) dt$$
$$= -\pi L_{k_1l}(t)L'_{k_2l}(t)(1-t^2)\Big|_{-1}^{1}$$
$$-\pi \int\limits_{-1}^{1} \left(-L_{k_1l}(t)\left(L'_{k_2l}(t)(1-t^2)\right)' + L_{k_1l}(t)L_{k_2l}(t)\frac{l^2}{1-t^2} \right) dt$$
$$\overset{(5)}{=} -\pi \int\limits_{-1}^{1} L_{k_1l}(t) \left(-\left(L'_{k_2l}(t)(1-t^2)\right)' + L_{k_2l}(t)\frac{l^2}{1-t^2} \right) dt$$
$$\overset{(3)}{=} -\pi \int\limits_{-1}^{1} L_{k_1l}(t)\left(k_2(k_2+1)L_{k_2l}(t)\right) dt = 0$$

в силу ортогональности присоединенных полиномов Лежандра. □

Используя результат Леммы 4, получаем

$$C_1B_2 = 2(1+\operatorname{ctg}^2\theta)Y''_{k_1l_1,\varphi\varphi}Y_{k_2l_2} + 2\operatorname{ctg}\theta Y'_{k_1l_1,\theta}Y_{k_2l_2} + 2Y''_{k_1l_1,\theta\theta}Y_{k_2l_2}.$$

Представим сферические функции через присоединенные полиномы Лежандра, проинтегрируем по φ и сделаем замену $t = \cos\theta$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} C_1 B_2 \sin\theta d\theta\, d\varphi \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(2(1+\operatorname{ctg}^2\theta) Y''_{k_1 l_1,\varphi\varphi} Y_{k_2 l_2} + 2\operatorname{ctg}\theta Y'_{k_1 l_1,\theta} Y_{k_2 l_2} + 2Y''_{k_1 l_1,\theta\theta} Y_{k_2 l_2}\right) \sin\theta d\theta\, d\varphi \\
&= -\pi \int\limits_{-1}^{1} \left(-\frac{2l^2}{1-t^2} L_{k_1 l} L_{k_2 l} - 2t L'_{k_1 l} L_{k_2 l} + 2L''_{k_1 l} L_{k_2 l}(1-t^2) - 2t L'_{k_1 l} L_{k_2 l}\right) dt \\
&= -\pi \int\limits_{-1}^{1} 2L_{k_2 l} \left(-\frac{l^2}{1-t^2} L_{k_1 l} - 2t L'_{k_1 l} + L''_{k_1 l}(1-t^2)\right) dt \\
&= -\pi \int\limits_{-1}^{1} 2L_{k_2 l} \left(-\frac{l^2}{1-t^2} L_{k_1 l} + (L'_{k_1 l}(1-t^2))'\right) dt \\
&\overset{(3)}{=} -\pi \int\limits_{-1}^{1} 2L_{k_2 l} \left(-k_1(k_1+1) L_{k_1 l}\right) dt = 0
\end{aligned}$$

в силу ортогональности присоединенных полиномов Лежандра. Аналогично для $l_1 \neq l_2$ или $k_1 \neq k_2$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} B_1 C_2 \sin\theta d\theta\, d\varphi = 0$$

и, следовательно, имеем

$$J = \int\limits_0^{1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(B_1 B_2 r^{k+1} F'_1 F'_2 + C_1 C_2 r^{k-3} F_1 F_2\right) \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr^2.$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
B_1 B_2 =& (16k_1k_2 + 8(k_1+k_2) + 12) Y_{k_1 l_1} Y_{k_2 l_2} + 8(1+\operatorname{ctg}^2\theta) Y'_{k_1 l_1,\varphi} Y'_{k_2 l_2,\varphi} \\
&+ 8Y'_{k_1 l_1,\theta} Y'_{k_2 l_2,\theta}.
\end{aligned}$$

В силу ортогональности сферических функций и Леммы 4

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} B_1 B_2 \sin\theta d\theta\, d\varphi = 0.$$

Осталось показать, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} C_1 C_2 \sin\theta d\theta\, d\varphi = 0.$$

Вычисляя значение C_1C_2, получаем

$$\begin{aligned}
C_1C_2 &= k_1k_2(k_1k_2-k_1-k_2+3)Y_{k_1l_1}Y_{k_2l_2}\\
&+2(\operatorname{ctg}^2\theta+1)(\operatorname{ctg}^2\theta+k_1k_2-k_1-k_2+1)Y'_{k_1l_1,\varphi}Y'_{k_2l_2,\varphi}\\
&+(2(k_1k_2-k_1-k_2+1)+\operatorname{ctg}^2\theta)Y'_{k_1l_1,\theta}Y'_{k_2l_2,\theta}+(\operatorname{ctg}^2\theta+1)^2Y''_{k_1l_1,\varphi\varphi}Y''_{k_2l_2,\varphi\varphi}\\
&+2(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y''_{k_1l_1,\varphi\theta}Y''_{k_2l_2,\varphi\theta}+Y''_{k_1l_1,\theta\theta}Y''_{k_2l_2,\theta\theta}+k_1\operatorname{ctg}\theta\,Y_{k_1l_1}Y'_{k_2l_2,\theta}\\
&+k_2\operatorname{ctg}\theta\,Y'_{k_1l_1,\theta}Y_{k_2l_2}+k_1(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y_{k_1l_1}Y''_{k_2l_2,\varphi\varphi}\\
&+k_2(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y''_{k_1l_1,\varphi\varphi}Y_{k_2l_2}+k_1Y_{k_1l_1}Y''_{k_2l_2,\theta\theta}+k_2Y''_{k_1l_1,\theta\theta}Y_{k_2l_2}\\
&+(-2\operatorname{ctg}\theta(\operatorname{ctg}^2\theta+1))Y'_{k_1l_1,\varphi}Y''_{k_2l_2,\varphi\theta}+(-2\operatorname{ctg}\theta(\operatorname{ctg}^2\theta+1))Y''_{k_1l_1,\varphi\theta}Y'_{k_2l_2,\varphi}\\
&+\operatorname{ctg}\theta(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y''_{k_1l_1,\varphi\varphi}Y'_{k_2l_2,\theta}+\operatorname{ctg}\theta(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y'_{k_1l_1,\theta}Y''_{k_2l_2,\varphi\varphi}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что при $l_1\neq l_2$ в силу (6)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}C_1C_2\sin\theta d\theta\,d\varphi=0.$$

Далее полагаем $l_1=l_2=l$ и $k_1\neq k_2$. В силу ортогональности сферических функций, а также используя Лемму 4, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(k_1k_2(k_1k_2-k_1-k_2+3)Y_{k_1l}Y_{k_2l}\\
&\qquad+2(\operatorname{ctg}^2\theta+1)(\operatorname{ctg}^2\theta+k_1k_2-k_1-k_2+1)Y'_{k_1l,\varphi}Y'_{k_2l,\varphi}\\
&\qquad+(2(k_1k_2-k_1-k_2+1)+\operatorname{ctg}^2\theta)Y'_{k_1l,\theta}Y'_{k_2l,\theta}\Big)\sin\theta d\theta\,d\varphi\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\big(2\operatorname{ctg}^2\theta(\operatorname{ctg}^2\theta+1)Y'_{k_1l,\varphi}Y'_{k_2l,\varphi}+\operatorname{ctg}^2\theta\,Y'_{k_1l,\theta}Y'_{k_2l,\theta}\big)\sin\theta d\theta\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Представляя сферические функции через присоединенные полиномы Лежандра, делаем замену $t=\cos\theta$ и интегрируем по φ:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}C_1C_2\sin\theta d\theta\,d\varphi\\
&=-\pi\int_{-1}^{1}\Big(\frac{2l^2t^2}{(1-t^2)^2}L_{k_1l}L_{k_2l}+t^2L'_{k_1l}L'_{k_2l}+\frac{l^4}{(1-t^2)^2}L_{k_1l}L_{k_2l}+2l^2L'_{k_1l}L'_{k_2l}\\
&\qquad+(1-t^2)^2L''_{k_1l}L''_{k_2l}-t(1-t^2)L'_{k_1l}L''_{k_2l}-t(1-t^2)L''_{k_1l}L'_{k_2l}+t^2L'_{k_1l}L'_{k_2l}\\
&\qquad-k_1tL_{k_1l}L'_{k_2l}-k_2tL'_{k_1l}L_{k_2l}-\frac{k_1l^2}{1-t^2}L_{k_1l}L_{k_2l}-\frac{k_2l^2}{1-t^2}L_{k_1l}L_{k_2l}\\
&\qquad+k_1(1-t^2)L_{k_1l}L''_{k_2l}-k_1tL_{k_1l}L'_{k_2l}+k_2(1-t^2)L''_{k_1l}L_{k_2l}-k_2tL'_{k_1l}L_{k_2l}\\
&\qquad+\frac{2l^2t}{1-t^2}L_{k_1l}L'_{k_2l}+\frac{2l^2t}{1-t^2}L'_{k_1l}L_{k_2l}+\frac{l^2t}{1-t^2}L_{k_1l}L'_{k_2l}+\frac{l^2t}{1-t^2}L'_{k_1l}L_{k_2l}\Big)\,dt.
\end{aligned}$$

Группируя слагаемые с множителем k_1 и используя уравнение Лежандра, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} k_1 L_{k_1 l} \left((1-t^2) L''_{k_2 l} - 2t L'_{k_2 l} - \frac{l^2}{1-t^2} L_{k_2 l} \right) dt$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} k_1 L_{k_1 l} \left(-k_2(k_2+1) L_{k_2 l} \right) dt = 0$$

в силу ортогональности присоединенных полиномов Лежандра. Аналогично интеграл от слагаемых с множителем k_2 равен нулю.

Имеет место равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} \left((1-t^2) L''_{k_1 l} - 2t L'_{k_1 l} - \frac{l^2}{1-t^2} L_{k_1 l} \right) \left((1-t^2) L''_{k_2 l} - 2t L'_{k_2 l} - \frac{l^2}{1-t^2} L_{k_2 l} \right) dt$$

$$\overset{(3)}{=} \int\limits_{-1}^{1} k_1(k_1+1) k_2(k_2+1) L_{k_1 l} L_{k_2 l} \, dt = 0.$$

Поэтому, вычитая из $C_1 C_2$ подынтегральное выражение первого интеграла, получим

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} C_1 C_2 \sin\theta d\theta \, d\varphi$$

$$= -\pi \int\limits_{-1}^{1} \Big(\frac{2l^2 t^2}{(1-t^2)^2} L_{k_1 l} L_{k_2 l} - 2t^2 L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} + 2l^2 L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} + t(1-t^2) L'_{k_1 l} L''_{k_2 l}$$

$$+ t(1-t^2) L''_{k_1 l} L'_{k_2 l} + \frac{l^2 t}{1-t^2} L_{k_1 l} L'_{k_2 l} + \frac{l^2 t}{1-t^2} L'_{k_1 l} L_{k_2 l}$$

$$+ l^2 L''_{k_1 l} L_{k_2 l} + l^2 L_{k_1 l} L''_{k_2 l} \Big) dt$$

$$= -\pi \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{2l^2 t^2}{(1-t^2)^2} L_{k_1 l} L_{k_2 l} - 2t^2 L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} + l^2 (L_{k_1 l} L_{k_2 l})'' \right.$$

$$\left. + t(1-t^2)(L'_{k_1 l} L'_{k_2 l})' + \frac{l^2 t}{1-t^2} (L_{k_1 l} L_{k_2 l})' \right) dt$$

$$= -\pi \left(l^2 (L_{k_1 l} L_{k_2 l})' + t(1-t^2) L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} + \frac{l^2 t}{1-t^2} L_{k_1 l} L_{k_2 l} \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$-\pi \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{2l^2 t^2}{(1-t^2)^2} L_{k_1 l} L_{k_2 l} - 2t^2 L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} - (t(1-t^2))' L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{l^2 t}{1-t^2} \right)' L_{k_1 l} L_{k_2 l} \right) dt$$

$$= -\pi \left(l^2 (L_{k_1 l} L_{k_2 l})' + t(1-t^2) L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} + \frac{l^2 t}{1-t^2} L_{k_1 l} L_{k_2 l} \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$
$$- \pi \int_{-1}^{1} \left(-\frac{l^2}{(1-t^2)} L_{k_1 l} L_{k_2 l} - (1-t^2) L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} \right) dt.$$

Вычислим отдельно последний интеграл

$$\int_{-1}^{1} \left(-\frac{l^2}{(1-t^2)} L_{k_1 l} L_{k_2 l} - (1-t^2) L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} \right) dt$$
$$= - (1-t^2) L'_{k_1 l} L_{k_2 l} \Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \left(-\frac{l^2}{(1-t^2)} L_{k_1 l} L_{k_2 l} + \left((1-t^2) L'_{k_1 l} \right)' L_{k_2 l} \right) dt$$
$$\overset{(5),(3)}{=} \int_{-1}^{1} \left(-\frac{l^2}{(1-t^2)} L_{k_1 l} L_{k_2 l} + \left(-k_1(k_1+1) L_{k_1 l} + \frac{l^2}{1-t^2} L_{k_1 l} \right) L_{k_2 l} \right) dt$$
$$= \int_{-1}^{1} -k_1(k_1+1) L_{k_1 l} L_{k_2 l} \, dt = 0.$$

Получили, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} C_1 C_2 \sin\theta d\theta \, d\varphi = -\pi \left(l^2 (L_{k_1 l} L_{k_2 l})' + t(1-t^2) L'_{k_1 l} L'_{k_2 l} + \frac{l^2 t}{1-t^2} L_{k_1 l} L_{k_2 l} \right) \Bigg|_{-1}^{1}.$$

Если $l = 0$, то в силу того, что производные полиномов Лежандра не имеют неопределенностей при $t = \pm 1$, очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} C_1 C_2 \sin\theta d\theta \, d\varphi = 0.$$

Если $l = 1$, то, учитывая, что

$$L_{k1} = \sqrt{1-t^2} L'_k, \qquad L'_{k1} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} L'_k + (1-t^2)^{1/2} L''_k,$$

имеем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} C_1 C_2 \sin\theta d\theta \, d\varphi$$
$$= -\pi \left(((1-t^2) L'_{k_1} L'_{k_2})' + t(1-t^2) \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} L'_{k_1} + \sqrt{1-t^2} L''_{k_1} \right) \right.$$
$$\left. \cdot \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} L'_{k_2} + (1-t^2)^{1/2} L''_{k_2} \right) + \frac{t}{1-t^2} (1-t^2) L'_{k_1} L'_{k_2} \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$
$$= -\pi \left(-2t L'_{k_1} L'_{k_2} + t^3 L'_{k_1} L'_{k_2} + t L'_{k_1} L'_{k_2} \right) \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Если $l \geqslant 2$, то в каждом слагаемом будет присутствовать множитель $(1-t^2)$, а значит вся сумма для $t = \pm 1$ будет равна нулю.

Таким образом, ортогональность в случае $l_1 \neq l_2$ или $k_1 \neq k_2$ доказана.

Вычисление нормы базисных полей.

Для построения ортонормированного базиса в исходном пространстве осталось вычислить норму базисных полей

$$\|\mathbf{T}_{kln}\|^2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(\sum_{i,j=1}^{3} (T_{kln})^2_{ij}(r,\theta,\varphi) \right) r^2 \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr.$$

Используя Лемму 1, формулы

$$\|P_n\|^2 = \int\limits_0^1 r^{2k+1}(1-r^2)^2 P_n P_n\, dr^2, \qquad \|P'_n\|^2 = \int\limits_0^1 r^{2k+3}(1-r^2)^3 P'_n P'_n\, dr^2,$$

$$\|P''_n\|^2 = \int\limits_0^1 r^{2k+5}(1-r^2)^4 P''_n P''_n\, dr^2, \qquad \|Y_{kl}\|^2 = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} Y_{kl} Y_{kl} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

и преобразования, аналогичные использованным при доказательстве ортогональности, получим

$$\|\mathbf{T}_{kln}\|^2 = 16(k+1.5)(k+2.5)\|P_n\|^2\|Y_{kl}\|^2 + 32(k+2.5)\|P'_n\|^2\|Y_{kl}\|^2 + 8\|P''_n\|^2\|Y_{kl}\|^2.$$

Используя формулы для нормы (1) и производных (2) полиномов Якоби, несложно показать, что

$$\begin{aligned}
\left\|P_n\right\|^2 &= \frac{n!\,(\Gamma(k+1.5))^2\Gamma(n+3)}{\Gamma(k+n+1.5)\Gamma(k+n+3.5)(k+2n+3.5)},\\
\left\|P'_n\right\|^2 &= \frac{n(n+k+3.5)^2 n!\,(\Gamma(k+2.5))^2\Gamma(n+3)}{(k+1.5)^2\Gamma(k+n+1.5)\Gamma(k+n+4.5)(k+2n+3.5)},\\
\|P''_n\|^2 &= \frac{n(n-1)(n+k+3.5)^2(n+k+4.5)^2 n!\,(\Gamma(k+3.5))^2\Gamma(n+3)}{(k+1.5)^2(k+2.5)^2\Gamma(k+n+1.5)\Gamma(k+n+4.5)(k+2n+5.5)}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\|\mathbf{T}_{kln}\|^2 = \frac{8((n+2)!)^2(\Gamma(k+1.5))^2\|Y_{kl}\|^2}{(\Gamma(n+k+1.5))^2(k+2n+3.5)}.$$

Таким образом, Теорема 1 доказана.

5. Заключение

В работе построено сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона, действующего на трехмерное симметричное 2-тензорное поле.

References

[1] V.A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields*, VSP, Utrecht, 1994.

[2] E.Yu. Derevtsov, I.E. Svetov, *Tomography of tensor fields in the plain*, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, **3** (2015), 24–68.

[3] M. Defrise, G.T. Gullberg, *3D reconstruction of tensors and vectors*, LBNL, Berkeley, 2005. (Technical Report № LBNL-54936)

[4] I.E. Svetov, *The method of approximate inverse for the Radon transform operator acting on functions and for the normal Radon transform operators acting on vector and symmetric 2-tensor fields in* $\mathbb{R}^3$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 1073–1087. (in Russian)

[5] A.M. Cormack, *Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. I*, J. Appl. Phys., **34** (1963), 2722–2727.

[6] A.M. Cormack, *Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. II*, J. Appl. Phys., **35** (1964), 195–207.

[7] M. Davison, *A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidean space*, Numer. Funct. Anal. Optim., **3** (1981), 231–240.

[8] E.T. Quinto, *Singular value decomposition and inversion methods for the exterior Radon transform and the spherical transform*, J. Math. Analysis and Applications, **95**:2 (1983), 437–448.

[9] A.K. Louis, *Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform*, Society for industrial and applied mathematics, **15**:3 (1984), 621–633.

[10] P. Maass, *Singular value decomposition for Radon transform*, Mathematical Methods in Tomography, Springer-Verlag, (1990), 6–14.

[11] P. Maass, *The X-ray transform: Singular value decomposition and resolution*, Inverse problems, **3**:4 (1987), 727–741.

[12] E.Yu. Derevtsov, A.V. Efimov, A.K. Louis, T. Schuster, *Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **19**:4–5 (2011), 689–715.

[13] E.Yu. Derevtsov, A.P. Polyakova, *Solution of the Integral Geometry Problem for 2-Tensor Fields by the Singular Value Decomposition Method*, Journal of Mathematical Sciences, **202**:1 (2014), 50–71.

[14] A. Polyakova, *Reconstruction of potential part of 3D vector field by using singular value decomposition*, Journal of Physics: Conference Series, **410** (2013), 012015.

[15] A.P. Polyakova, *Reconstruction of a vector field in a ball from its normal Radon transform*, Journal of Mathematical Sciences, **205**:3 (2015), 418–439.

[16] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, *Comparison of two algorithms for the numerical solution of two-dimensional vector tomography* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 90–108. (in Russian)

[17] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, *Approximate solution of two-dimensional 2-tensor tomography problem using truncated singular value decomposition*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 480–499. (in Russian)

[18] A.P. Polyakova, I.E. Svetov, *Numerical Solution of the Problem of Reconstructing a Potential Vector Field in the Unit Ball from Its Normal Radon Transform*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **9**:4 (2015), 547-558.

[19] A.P. Polyakova, I.E. Svetov, *Numerical solution of reconstruction problem of a potential symmetric 2-tensor field in a ball from its normal Radon transform*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 154–174. (in Russian)

[20] S.G. Kazantsev, A.A. Bukhgeim, *Singular value decomposition for 2D fan-beam Radon transform of tensor fields*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **12**:3 (2004), 245–278.

[21] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, Teubner Verlag, Stuttgart, 1986.

Anna Petrovna Polyakova
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: anna.polyakova@ngs.ru