

Итеративно регуляризованный метод Гаусса–Ньютона в обратной задаче радиозондирования ионосферы

Кокурин М.Ю., Недопекин А.Е.

Марийский государственный университет, г.Йошкар–Ола

Аннотация

Рассматривается задача реконструкции вертикального профиля электронной концентрации ионосферы по результатам измерения набега фазы зондирующего сигнала с движущегося спутника. Принята простейшая модель измерений с единственной точкой приема сигнала. Используемая модель учитывает искривление зондирующего луча при прохождение через неоднородную ионосферу. Задача сводится к нелинейному интегральному уравнению. Устанавливается, что полученное уравнение имеет неединственное решение. Для аппроксимации решения, ближайшего к выбранному начальному приближению, применяется итеративно регуляризованный метод Гаусса–Ньютона с проектированием на множество, определяемое априорными ограничениями на решение. Приводятся результаты численных экспериментов.

Abstract

The paper is concerned with the problem of reconstructing the vertical profile of the electron concentration of the ionosphere. The profile is reconstructed based on the results of measuring the incident phase of the probing signal from a moving satellite. The simplest measurement model with a single point of signal reception is adopted. The model under investigation takes into account the curvature of the probe beam when passing through the inhomogeneous ionosphere. The problem is reduced to a nonlinear integral equation. We prove that the resulting equation has a non-unique solution. To approximate the solution closest to the selected initial approximation, an iteratively regularized Gauss–Newton method is used with a projection on the set defined by a priori constraints on the solution. The results of numerical experiments are presented.

§1. Описание модели

Объектом исследования в работе является задача томографии ионосферы при помощи спутниковых радиосигналов. Ионосферой называют верхнюю часть атмосферы на высотах 60–2000 км, состоящую из ионизированного газа. Причинами ионизации являются солнечный ветер и солнечное излучение. Состав ионосферы различен по высоте, это обуславливает наличие областей разной ионизации, называемых слоями. Задача ионосферной томографии имеет разнообразные практические приложения, например, при оценке полного электронного содержания (ПЭС) и учете плазменных неоднородностей для коррекции работы радионавигационных систем на коротких волнах [1]. С подобной целью используют сигналы систем спутниковой навигации GPS и GLONASS.

Свободные электроны являются главными носителями зарядов в ионосфере, влияющими на прохождение через ионосферу электромагнитного излучения. Концентрация свободных электронов \mathcal{N} — один из важнейших параметров ионосферы. В статье предполагаем, что характеристики ионосферы зависят лишь от высоты z над поверхностью Земли. Зависимость электронной концентрации от высоты называется профилем электронной концентрации. На Рис.1 приведены примеры типичных профилей электронной концентрации $\mathcal{N} = \mathcal{N}(z)$ для дня (сплошная линия) и ночи (пунктирная линия). Ночью на профиле обычно наблюдается только один максимум, соответствующий ионосферному слою F2. В течение дня вместе с ростом солнечной активности растет и число максимумов, но максимум, соответствующий слою F2, остается самым большим по величине. В работе изучается задача реконструкции профиля $\mathcal{N}(z)$ по результатам измерения набега фазы при прохождении зондирующего сигнала через ионосферу. Основное внимание уделяется определению величины максимума электронной концентрации и его положения по высоте.

Ионосфера является случайно-неоднородной средой и обладает значительными дисперсионными свойствами, так что сигналы с разной частотой распространяются в ней с различной скоростью. Обозначим через c_0 и $c(z)$ скорости света в вакууме и в среде на высоте z соответственно. Отношение $n(z) = c(z)/c_0$ называется коэффициентом рефракции неоднородной среды. Сила трения и электромагнитная сила оказывают незначительное влияние на высокочастотные сигналы. В данной работе для сигнала частоты $\nu = 15.42$ МГц будем рассматривать коэффициент рефракции как величину, зависящую только от электростатической силы. Это позволяет записать представление [2], [3]

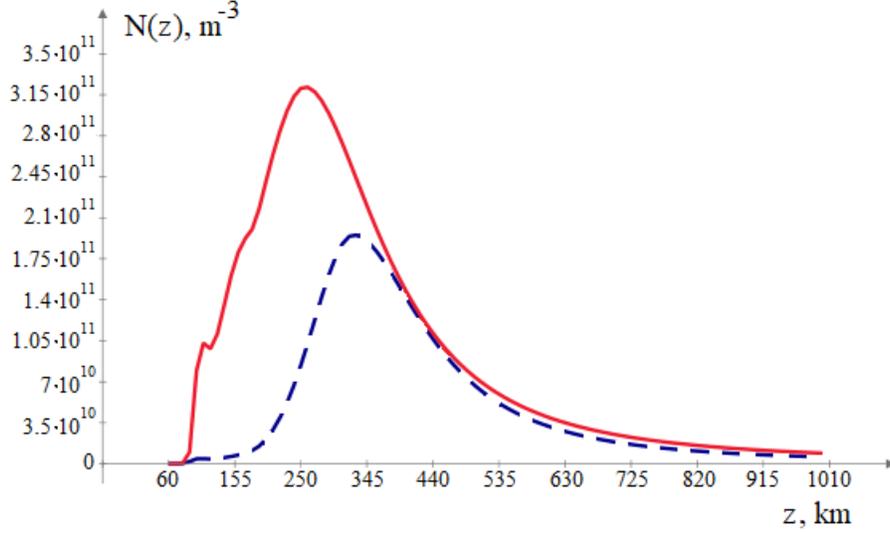


Рис 1. Примеры профилей электронной концентрации

$$n(z) = \sqrt{1 - \varepsilon \mathcal{N}(z)}, \quad \varepsilon = \frac{80.8}{\nu^2}. \quad (1.1)$$

Примем для простоты, что движущийся спутник и приемный пункт находятся в одной плоскости (x, z) . Приемник находится в точке $(0, 0)$, спутник имеет координаты (χ, h) , где $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$ — горизонтальная координата спутника, h — его высота над поверхностью Земли. Зондирующий сигнал со спутника распространяется из точки (χ, h) вдоль геодезической кривой $\gamma(\chi)$ в римановой метрике $d\sigma^2 = (dx^2 + dz^2)/n^2(z)$, соединяющей точки (χ, h) и $(0, 0)$. Удобно параметризовать геодезические углом наклона касательной в точке $(0, 0)$ по отношению к положительному направлению оси x . Всюду ниже считаем, что $c(0) = c_0$. Геодезическая, выходящая из $(0, 0)$ с единичным касательным вектором $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, определяется решением следующей системы дифференциальных уравнений относительно $(x(t), y(t), z(t); p_x(t), p_y(t), p_z(t))$ [4, §5.4]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c^2(z)p_x, \quad \dot{y} = c^2(z)p_y, \quad \dot{z} = c^2(z)p_z, \\ \dot{p}_x &= -c^{-1}(z)\frac{\partial c(z)}{\partial x} \equiv 0, \quad \dot{p}_y = -c^{-1}(z)\frac{\partial c(z)}{\partial y} \equiv 0, \\ \dot{p}_z &= -c^{-1}(z)\frac{\partial c(z)}{\partial z} = -c^{-1}(z)c'(z). \end{aligned}$$

Здесь t — физическое время движения сигнала, при этом вдоль геодезической $\gamma(\chi)$ имеем $x = x(t)$, $y(t) \equiv 0$, $z = z(t)$. Система решается вместе с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0;$$

$$p_x(0) = c_0^{-1} \cos \alpha, \quad p_y(0) = 0, \quad p_z(0) = c_0^{-1} \sin \alpha.$$

В силу записанных равенств, $p_x(t) \equiv c_0^{-1} \cos \alpha$, $p_y(t) \equiv 0$, поэтому исходная система упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c^2(z)c_0^{-1} \cos \alpha, \quad \dot{z} = c^2(z)p_z, \quad \dot{p}_z = -c^{-1}(z)c'(z); \\ x(0) &= 0, \quad z(0) = 0, \quad p_z(0) = c_0^{-1} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При всех $t \geq 0$ имеет место уравнение эйконала $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = c^{-2}(z)$. Таким образом,

$$(c_0^{-1} \cos \alpha)^2 + (p_z)^2 = c^{-2}(z),$$

откуда следует

$$p_z = \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{\cos^2 \alpha}{c_0^2}}.$$

Перед корнем взят знак плюс, поскольку функция $z(t)$ возрастает вдоль луча, см. уравнение $\dot{z} = c^2(z)p_z$ в (1.2). Из (1.2) получаем систему для $(x(t), z(t))$:

$$\dot{x} = c^2(z)c_0^{-1} \cos \alpha, \quad \dot{z} = c^2(z) \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{\cos^2 \alpha}{c_0^2}}. \quad (1.3)$$

Начальные условия для (1.3) имеют вид

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0. \quad (1.4)$$

Из (1.3) с учетом равенства $c(z) = c_0 n(z)$ получаем

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2(z) \cos^2 \alpha} - 1}}. \quad (1.5)$$

Поскольку согласно (1.4), $x = 0$ при $z = 0$, отсюда следует явное представление для геодезической $\gamma(\chi)$:

$$x = x(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{n^2(z) \cos^2 \alpha} - 1}}, \quad z \in [0, h].$$

Полагая здесь $z = h$, для горизонтальной координаты спутника получаем представление

$$\chi = x(h) = \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{n^2(z) \cos^2 \alpha} - 1}}. \quad (1.6)$$

Как известно из [5], для радиосигнала с длиной волны Λ фазовый набег определяется выражением

$$\Phi(\chi) = \kappa \int_{\gamma(\chi)} \mathcal{N} d\sigma, \quad \chi \in [\chi_1, \chi_2], \quad (1.7)$$

где $\kappa = \Lambda r_e$, r_e — стандартный радиус электрона. Из (1.1), (1.5) с учетом равенства

$$d\sigma = \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{n(z)} = \frac{1}{n(z)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz$$

получаем

$$\mathcal{N}(z) = \frac{1 - n^2(z)}{\varepsilon}, \quad d\sigma = \frac{dz}{n^2(z) \sqrt{\frac{1}{n^2(z)} - \cos^2 \alpha}}. \quad (1.8)$$

Из (1.7), (1.8) следует

$$\Phi(\chi) = \frac{\kappa}{\varepsilon} \int_0^h \left(\frac{1}{n^2(z)} - 1 \right) \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{n^2(z)} - \cos^2 \alpha}}. \quad (1.9)$$

Введем обозначение

$$\mu(z) = \frac{1}{n^2(z)} - 1, \quad (1.10)$$

тогда с учетом (1.8) имеет место

$$\mathcal{N}(z) = \frac{\mu(z)}{\varepsilon(1 + \mu(z))}. \quad (1.11)$$

Согласно (1.7), результатами измерений задана функция $\Psi(\chi) = \frac{\varepsilon}{\kappa} \Phi(\chi)$ при $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$. Из (1.9) и (1.10) получаем

$$\Psi(\chi) = \int_0^h \frac{\mu(z) dz}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}}. \quad (1.12)$$

Предположим, что угол α меняет значения на отрезке $[a_1, a_2]$ когда $\chi \in [\chi_1, \chi_2]$. Объединяя (1.6) и (1.12), приходим к следующему нелинейному интегральному уравнению для определения функции $\mu = \mu(z)$:

$$\int_0^h \frac{\mu(z)dz}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}} = \Psi \left(\cos \alpha \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}} \right), \quad \alpha \in [a_1, a_2].$$

Пусть H_0 и H есть соответственно нижняя и верхняя границы высот такие, что ниже H_0 и выше H электронная концентрация \mathcal{N} мало отличается от нуля, так что значения $\mu(z)$ при этих z дают незначительный вклад в интеграл. Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\int_{H_0}^H \frac{\mu(z)dz}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}} = \Psi \left(H_0 \operatorname{ctg} \alpha + \cos \alpha \int_{H_0}^H \frac{dz}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}} \right), \quad \alpha \in [a_1, a_2]. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) является основным объектом теоретического и численного анализа этой работы.

§2. Анализ математической модели

Переходя к исследованию уравнения (1.13), опишем класс функций μ , априори содержащий интересующие нас решения. Следуя обсуждению в §1, будем считать, что для некоторых $0 < H_j < H_{j+1}$, $0 \leq j \leq 4$, $H_5 = H$, функция $\mu \in C^l[H_0, H]$ выпукла на $[H_0, H_1]$, возрастает на $[H_1, H_2]$, вогнута на $[H_2, H_3]$, убывает на $[H_3, H_4]$ и выпукла на $[H_4, H_5]$, $l \geq 2$. Обозначим этот класс функций через \mathfrak{M} .

Отметим, что решение $\mu \in \mathfrak{M}$ уравнения (1.13) неединственно для любого $l \geq 2$. Пусть имеется решение $y = \mu(z)$, график которого на некотором отрезке $[a_0, a] \subset (H_2, H_3)$ таким, что $\mu(a_0) = \mu(a)$, имеет максимум в точке $z = z^* \in (a_0, a)$. Пусть

$$\bar{\mu} = \max_{z \in [a_0, a]} \mu''(z) < 0.$$

Ниже покажем, как из этого решения получить другое гладкое решение уравнения (1.13) с вогнутым на $[a_0, a]$ графиком и иным положением экстремума. При этом величина экстремума $M = \mu(z^*)$ останется неизменной. Не меняя функцию μ вне $[a_0, a]$, подвергнем ее на этом отрезке описываемому далее изменению. Пусть $M_0 = \mu(a_0) = \mu(a)$. Выберем произвольно гладкую монотонно возрастающую функцию $g : [M_0, M] \rightarrow [0, \tau]$

так, что

$$g(M_0) = g'(M_0) = \dots = g^{(l)}(M_0) = 0, \quad g(M) = \tau, \quad \tau \in (0, a - z^*). \quad (2.1)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{z \in [a_0, a]} |\mu'(z)|, \quad \lambda_2 = \max_{z \in [a_0, a]} |\mu''(z)|, \\ \eta_1 &= \max_{y \in [M_0, M]} g'(y), \quad \eta_2 = \max_{y \in [M_0, M]} |g''(y)|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Выберем функцию g так, что

$$\eta_1 \lambda_1 < 1, \quad \bar{\mu} + \frac{\lambda_1(\eta_1 \lambda_2 + \eta_2 \lambda_1^2)}{1 - \eta_1 \lambda_1} < 0. \quad (2.3)$$

Из (2.2) следует, что условия (2.3) обеспечиваются выбором функции g , имеющей на $[M_0, M]$ достаточно малые первую и вторую производные. Обозначим $\varphi(z) = z + g(\mu(z))$. В силу первого из условий (2.3),

$$\varphi'(z) = 1 + g'(\mu(z))\mu'(z) \geq 1 - \eta_1 \lambda_1 > 0, \quad z \in [a_0, a]. \quad (2.4)$$

Поэтому функция $\varphi(z) = z + g(\mu(z))$ монотонно возрастает на отрезке $[a_0, a]$ и отображает этот отрезок на себя. Следовательно, для любого $w \in [a_0, a]$ существует единственное решение $z = z[w]$ уравнения $\varphi(z) = w$. Рассмотрим функцию $\tilde{\mu}$, которая вне $[a_0, a]$ совпадает с μ , а на отрезке $[a_0, a]$ определяется равенством

$$\tilde{\mu}(w) = \mu(z[w]), \quad w \in [a_0, a]. \quad (2.5)$$

Символически запишем (2.5) в виде $\tilde{\mu} = \mathcal{F}_g(\mu)$. Равенство (2.5) означает, что график $y = \tilde{\mu}(z)$ строится следующим образом. Выбирается $y_0 \in [M_0, M]$ и на прямой $y = y_0$ отмечаются точки пересечения $(z_1, y_0), (z_2, y_0)$ с графиком $y = \mu(z)$. Затем на указанной прямой отмечаются точки, отстоящие вправо от этих точек на расстояние $g(y_0)$. Две полученные точки есть точки пересечения прямой $y = y_0$ с графиком $y = \tilde{\mu}(z)$. Ввиду условия (2.1) сохраняется гладкость стыковки графика $y = \tilde{\mu}(z)$ на $[a_0, a]$ к графику $y = \mu(z)$ вне $[a_0, a]$.

Нетрудно видеть, что оператор \mathcal{F}_g корректно определен также для любой выпуклой или вогнутой функции $\theta \in C^2[a_0, a]$, удовлетворяющей условиям

$$\theta(a_0) = \theta(a), \quad \eta_1 \max_{z \in [a_0, a]} |\theta'(z)| < 1 \quad (2.6)$$

и имеющей экстремум в интервале (a_0, a) .

Согласно (2.5), $\tilde{\mu}(\varphi(z)) = \mu(z)$ при $z \in [a_0, a]$. Дифференцируя это равенство дважды, получаем

$$\tilde{\mu}''(\varphi(z))(\varphi'(z))^2 + \tilde{\mu}'(\varphi(z))\varphi''(z) = \mu''(z). \quad (2.7)$$

Здесь

$$\varphi''(z) = g''(\mu(z))(\mu'(z))^2 + g'(\mu(z))\mu''(z), \quad \tilde{\mu}'(\varphi(z)) = \frac{\mu'(z)}{\varphi'(z)}.$$

Поэтому с учетом (2.2) и (2.4) выполняется

$$|\tilde{\mu}'(\varphi(z))| \leq \frac{\lambda_1}{1 - \eta_1 \lambda_1}, \quad |\varphi''(z)| \leq \eta_1 \lambda_2 + \eta_2 \lambda_1^2. \quad (2.8)$$

Из (2.7), (2.8) и второго условия в (2.3) следует

$$\tilde{\mu}''(\varphi(z))(\varphi'(z))^2 < 0, \quad z \in [a_0, a].$$

Тем самым $\tilde{\mu}''(\varphi(z)) < 0$ при всех $z \in [a_0, a]$. Поскольку функция φ взаимно однозначно отображает отрезок $[a_0, a]$ на себя, для всех $w \in [a_0, a]$ имеет место $\tilde{\mu}''(w) < 0$. Таким образом, построенная функция $\tilde{\mu}$ вогнута на $[a_0, a]$ наряду с μ .

Для функций

$$\theta_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}}, \quad \theta_2(z) = \frac{\mu(z)}{\sqrt{\mu(z) + \sin^2 \alpha}}$$

с использованием (2.2) нетрудно получить оценки

$$\max_{z \in [a_0, a]} |\theta_1'(z)| \leq \frac{\lambda_1}{2M_0^{3/2}}, \quad \max_{z \in [a_0, a]} |\theta_2'(z)| \leq \frac{\lambda_1}{\sqrt{M_0}}.$$

Кроме того, в силу равенства $\mu(a_0) = \mu(a)$ имеем $\theta_1(a_0) = \theta_1(a)$, $\theta_2(a_0) = \theta_2(a)$. Далее, функция θ_1 выпукла, а θ_2 вогнута на $[a_0, a]$. Из (2.6) следует, что при выполнении дополнительного условия

$$\eta_1 \lambda_1 \max \left\{ \frac{1}{2M_0^{3/2}}, \frac{1}{\sqrt{M_0}} \right\} < 1 \quad (2.9)$$

оператор \mathcal{F}_g определен для функций θ_1, θ_2 и мы имеем

$$\mathcal{F}_g(\theta_1)(z) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}(z) + \sin^2 \alpha}}, \quad \mathcal{F}_g(\theta_2)(z) = \frac{\tilde{\mu}(z)}{\sqrt{\tilde{\mu}(z) + \sin^2 \alpha}}.$$

Для любой положительной непрерывной на $[a_0, a]$ функции $h = h(z)$ выполняется [6, теорема 3.6.3]

$$\int_{a_0}^a h(z) dz = \int_0^\infty \text{meas}\{z \in [a_0, a] : h(z) > t\} dt.$$

Здесь $\text{meas}Q$ есть мера Лебега множества $Q \subset \mathbb{R}$. Поскольку по построению выполняется

$$\text{meas}\{z \in [a_0, a] : \mathcal{F}_g(\theta_j)(z) > t\} = \text{meas}\{z \in [a_0, a] : \theta_j(z) > t\},$$

справедливо равенство

$$\int_{a_0}^a \mathcal{F}_g(\theta_j)(z) dz = \int_{a_0}^a \theta_j(z) dz, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, если g удовлетворяет условиям (2.1), (2.3), (2.4), то функция $\tilde{\mu} = \mathcal{F}_g(\mu)$ является решением уравнения (1.13) в классе \mathfrak{M} . Мы видим, что уравнение (1.13) имеет континуальное семейство гладких решений.

§3. Конечномерная аппроксимация и итеративно регуляризованный метод Гаусса–Ньютона

С целью дискретизации уравнения (1.13) введем на $[H_0, H]$ и $[a_1, a_2]$ равномерные сетки $\{z_i\}_{i=0}^N$ и $\{\alpha_j\}_{j=0}^J$ с шагами $h_z = (H - H_0)/N$ и $h_\alpha = (a_2 - a_1)/J$ соответственно, $J \geq N$. Используя для аппроксимации интегралов в (1.13) схему прямоугольников, получаем систему нелинейных уравнений

$$h_z \sum_{i=0}^N \frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i + \sin^2 \alpha_j}} - \Psi \left(H_0 \text{ctg} \alpha_j + h_z \sum_{i=0}^N \frac{\cos \alpha_j}{\sqrt{\mu_i + \sin^2 \alpha_j}} \right) = 0, \quad 0 \leq j \leq J. \quad (3.1)$$

В (3.1) μ_i есть искомые аппроксимации для $\mu(z_i)$, $0 \leq i \leq N$. Отмеченное выше свойство неединственности решения задачи (1.12) естественным образом переносится на ее дискретную аппроксимацию (3.1). Нетрудно видеть, что наряду с любым ее решением (μ_0, \dots, μ_N) решением будет и любая из $(N + 1)! - 1$ перестановок значений (μ_0, \dots, μ_N) .

Для сужения множества принимаемых к рассмотрению решений необходимо уточнить априорную информацию о решениях, представляющих физический интерес. Будем считать, что известна нижняя оценка $b_0 > 0$ для величины $\min_{z \in [H_0, H_1]} \mu''(z)$, нижняя оценка $b_1 > 0$ для $\min_{z \in [H_1, H_2]} \mu'(z)$, верхняя оценка $b_2 < 0$ для $\max_{z \in [H_2, H_3]} \mu''(z)$, верхняя оценка $b_3 < 0$ для $\max_{z \in [H_3, H_4]} \mu'(z)$ и нижняя оценка $b_4 > 0$ для $\min_{z \in [H_4, H_5]} \mu''(z)$. Пусть кроме того известны функции $p(z) < q(z)$, $z \in (H_0, H)$ такие, что $p(z) \leq \mu(z) \leq q(z)$ при $z \in [H_0, H]$. В этом случае множество априорных ограничений \mathcal{D} в задаче (3.1) естественно определить следующим образом:

$$\mathcal{D} = \{(\mu_0, \dots, \mu_N) : p(z_i) \leq \mu_i \leq q(z_i), 0 \leq i \leq N;$$

$$\mu_{i-1} - 2\mu_i + \mu_{i+1} \geq b_0 h_z^2, 1 \leq i \leq K_1; \mu_{i+1} - \mu_i \geq b_1 h_z, K_1 \leq i \leq K_2;$$

$$\mu_{i-1} - 2\mu_i + \mu_{i+1} \leq b_2 h_z^2, K_2 \leq i \leq K_3; \quad (3.2)$$

$$\mu_{i+1} - \mu_i \leq b_3 h_z, K_3 \leq i \leq K_4, \mu_{i-1} - 2\mu_i + \mu_{i+1} \geq b_4 h_z^2, K_4 \leq i \leq K_5 - 1\}.$$

Здесь $H_j = H_0 + K_j h_z$, $K_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq 4$. Определяемое (3.2) множество есть выпуклый многогранник в \mathbb{R}^{N+1} .

Систему (3.1) с априорными ограничениями (3.2) удобно формализовать в виде операторного уравнения

$$F(u) = f, u \in D. \quad (3.3)$$

Здесь $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ — дифференцируемый по Фреше оператор, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства, D — выпуклое замкнутое множество в \mathcal{H}_1 , априори содержащее аппроксимируемое решение. Элемент f в (3.3) в общем случае задан приближенно, так что вместо него доступна аппроксимация \tilde{f} и уровень погрешности $\delta > 0$, так что $\|\tilde{f} - f\|_{\mathcal{H}_2} \leq \delta$. Дополнительно предполагается, что производная F' удовлетворяет в окрестности искомого решения $u^* \in D$ условию Липшица

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} \leq L \|u - v\|_{\mathcal{H}_1}, u, v \in \Omega_R(u^*),$$

где $\Omega_R(u^*) = \{u \in \mathcal{H}_1 : \|u - u^*\|_{\mathcal{H}_1} \leq R\}$. Через $\|\cdot\|_Z$ обозначаем норму гильбертова или банахова пространства Z , $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ есть пространство линейных непрерывных операторов, действующих из \mathcal{H}_1 в \mathcal{H}_2 . В наших условиях уравнение (3.3) является нерегулярным в том смысле, что непрерывная обратимость производной $F'(u)$ или симметризованной производной $F'^*(u)F'(u)$ для точек u из окрестности решения не гарантируется. Это обстоятельство препятствует применению к (3.3) стандартных итерационных процессов Ньютона–Канторовича и Гаусса–Ньютона [7],[8], реализация которых предполагает устойчивое обращение указанных операторов на каждой итерации. Методы градиентного типа [7],[9] в применении к (3.3) формально реализуемы, однако сходимость вырабатываемых ими приближений к решению удастся установить лишь при выполнении условия регулярности. В настоящей работе обратимся к группе итеративно регуляризованных методов типа Гаусса–Ньютона [10, гл.2] сходимость которых удастся обосновать без привлечения условия регулярности. Для решения системы (3.1) с ограничениями (3.2) используем итеративно регуляризованный метод Гаусса–Ньютона, который в применении к задаче (3.3) имеет вид [10, гл.2,§3]

$$u^{n+1} = P_D(\bar{u}^{n+1}), \quad (3.4)$$

$$\bar{u}^{n+1} = \xi - (F'^*(u^n)F'(u^n) + \alpha_n E_1)^{-1} F'^*(u^n)[F(u^n) - \tilde{f} - F'(u^n)(u^n - \xi)].$$

Здесь P_D — оператор метрического проектирования из \mathcal{H}_1 на D ,

$$P_D(u) \in D, \quad \|P_D(u) - u\|_{\mathcal{H}_1} = \min_{v \in D} \|v - u\|_{\mathcal{H}_1}; \quad u \in \mathcal{H}_1,$$

E_1 есть единичный оператор в пространстве \mathcal{H}_1 , $\xi \in \mathcal{H}_1$ — параметр метода, последовательность параметров регуляризации $\{\alpha_n\}$ выбирается из условий

$$0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sup_{n=0,1,\dots} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} < \infty.$$

Процесс (3.4) не предполагает однозначной разрешимости уравнения (3.3) и предназначен для аппроксимации решения u^* , удовлетворяющего совместно с управляющим параметром ξ условию истокопредставимости

$$u^* - \xi = F'^*(u^*)v, \quad v \in \mathcal{H}_2. \quad (3.5)$$

Обозначим через $\mathcal{R}(A)$ образ линейного непрерывного оператора A . Если выполняется условие $\mathcal{R}(F'(u^*)) = \mathcal{H}_2$, то (3.5) есть необходимое условие, которому удовлетворяет решение уравнения $F(u) = f$, ближайшее к ξ , т.е. решение задачи

$$\min\{\|u - \xi\|_{\mathcal{H}_1}^2 : F(u) = f, u \in \mathcal{H}_1\},$$

см., например, [11, §1.1].

Необходимые аппроксимационные свойства метода (3.4) обеспечиваются при использовании подходящих правил останова итераций. Наибольший практический интерес представляют апостериорные схемы останова, согласно которым итерации продолжают при $n = 0, 1, \dots, N(\delta, \tilde{f}) - 1$, при этом момент останова $N = N(\delta, \tilde{f})$ определяется непосредственно в ходе вычислений. Зафиксируем положительный параметр m и будем предполагать, что начальное приближение u^0 в (3.4) удовлетворяет условию

$$\|F(u^0) - \tilde{f}\|_{\mathcal{H}_2}^2 > m\delta.$$

Следуя [10, гл.2,§4], определим момент останова апостериорным правилом

$$\begin{aligned} \|F(u^{N(\delta, \tilde{f})}) - \tilde{f}\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\leq m\delta < \|F(u^n) - \tilde{f}\|_{\mathcal{H}_2}^2, \\ n &= 0, 1, \dots, N(\delta, \tilde{f}) - 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При выполнении ряда дополнительных условий на элементы задачи (3.3) и параметры процесса (3.4) устанавливается, что условие (3.6) корректно определяет конечный номер $N(\delta, \tilde{f})$. При этом для получаемого приближения $u^{N(\delta, \tilde{f})}$ имеет место оценка точности [10, гл.2,§4,теорема 3]

$$\|u^{N(\delta, \tilde{f})} - u^*\|_{\mathcal{H}_1} \leq l\sqrt{\alpha_{N(\delta, \tilde{f})}}.$$

Здесь u^* — решение задачи (3.3), удовлетворяющее условию (3.5).

Запишем систему (3.1) в виде (3.3), положив $u = \hat{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_N)$, $f = 0$, $F(\hat{\mu}) = (F_j(\hat{\mu}))_{j=0}^J$, где $F_j(\hat{\mu})$ есть левая часть уравнения (3.1). При этом

$$\begin{aligned} F'(\hat{\mu}) &= \left(\frac{\partial F_j(\hat{\mu})}{\partial \mu_k} \right)_{j,k=0}^{J,N}, \quad \frac{\partial F_j(\hat{\mu})}{\partial \mu_k} = \\ &= h_z(\mu_k + \sin^2 \alpha_j)^{-3/2} \left[(\mu_k/2 + \sin^2 \alpha_j) + \frac{1}{2} \Psi' \left(H_0 \operatorname{ctg} \alpha_j + h_z \sum_{i=0}^N \frac{\cos \alpha_j}{\sqrt{\mu_i + \sin^2 \alpha_j}} \right) \cos \alpha_j \right], \end{aligned}$$

$$0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq k \leq N.$$

При проведении численных экспериментов полагаем

$$\tilde{f} = (\tilde{f}_j)_{j=0}^J, \quad \tilde{f}_j = (2\zeta_j - 1)\Delta,$$

где ζ_j есть независимые равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины, Δ — уровень шума во входных данных. Полагаем

$$\delta = \left(\frac{1}{J} \sum_{j=0}^J (\tilde{f}_j - f_j)^2 \right)^{1/2} = \Delta \left(\frac{1}{J} \sum_{j=0}^J (2\zeta_j - 1)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.7)$$

Численное моделирование процесса измерения сигнала, принимаемого в точке $(0, 0)$ со спутника, движущегося на высоте h , состоит в том, что фиксируется подлежащая реконструкции плотность электронной концентрации $\mathcal{N}(z) = \mathcal{N}^*(z)$. По ней в силу (1.11) определяется искомое решение $\mu^*(z) = \varepsilon \mathcal{N}^*(z) / (1 - \varepsilon \mathcal{N}^*(z))$ уравнения (1.13). Для симуляции функции наблюдения $\Psi = \Psi(\chi)$, на подходящей сетке

$$\chi_j = H_0 \operatorname{ctg} \alpha_j + h_z \sum_{i=0}^N \frac{\cos \alpha_j}{\sqrt{\mu^*(z_i) + \sin^2 \alpha_j}}, \quad j = j_0, \dots, j_s$$

в соответствии с (3.1) находятся соответствующие значения

$$\eta_j = h_z \sum_{i=0}^N \frac{\mu^*(z_i)}{\sqrt{\mu^*(z_i) + \sin^2 \alpha_j}},$$

так что

$$\Psi(\chi_j) = \eta_j, \quad j = j_0, \dots, j_s. \quad (3.8)$$

В расчетах полагаем $\Psi(\chi) = P_s(\chi)$, где P_s есть интерполяционный полином степени s , построенный по условиям (3.8). Перейдем к описанию результатов численного эксперимента.

§4. Численный эксперимент

Использовалась дискретизированная задача (3.1), (3.2), при этом принималось $J = N = 50$. При реализации итераций (3.4) полагали $\hat{\mu}^0(z_i) = \xi(z_i) = p(z_i)$, $0 \leq i \leq N$, останов итераций производился по критерию (3.6) с $t = 160$. Последовательность параметров регуляризации $\{\alpha_n\}$

определялась по правилу $\alpha_n = 0.9^n \alpha_0$ при $\alpha_0 = 100$. Уровень шума δ , определяемый согласно (3.7), был порядка единицы.

Для генерации модельной функции наблюдения $\Psi(\chi)$ был использован реальный профиль электронной концентрации $\mathcal{N}(z)$, полученный по международной справочной модели ионосферы IRI-2016, которая доступна по ссылке https://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/models/iri2016_vitmo.php. В (3.8) положили $s = 14$, массив точек интерполяции $\{\chi_{jk}\}_{k=0}^{14}$ был выбран в виде $\{5, 23, 40, 58, 76, 93, 111, 129, 146, 164, 181, 198, 215, 232, 248\}$. Полученная функция наблюдения показана на Рис.2.

При построении множества ограничений (3.2), функции p и q , априори ограничивающие искомый профиль, определялись формулами $p(z) = 2 \cdot 10^{-5}(z - H_0)(H - z) + 0.25\mu^*(z_1)$ и $q(z) = 10^{-4}(z - H_0)(H - z) + 0.25\mu^*(z_1)$ соответственно. Полагали $H = 700$, $\{H_j\}_{j=0}^4 = \{50, 200, 250, 400, 510\}$, значения указаны в км. Константы b_j , определяющие априорные ограничения производных и вторых производных искомого решения, были выбраны в виде $b_j = \epsilon b_j^*$, где b_j^* есть значение минимума или максимума необходимой производной для точной функции μ^* на соответствующем интервале, $0 \leq j \leq 4$. Параметр $\epsilon \in (0, 1)$ характеризует степень доступности указанной информации при обработке результатов наблюдения. В расчетах были использованы значения $\epsilon = 0.32$, $\epsilon = 0.45$, $\epsilon = 0.5$. Количество итераций, определяемых критерием (3.6), во всех случаях оказалось равным 3. Результаты расчетов с приведенными значениями ϵ даны на Рис.3. При моделировании процессов распространения радиоволн в ионосфере значительный интерес представляет точка локализации и величина максимума электронной концентрации. В примере погрешность определения локализации точки максимума функции \mathcal{N} составляет около 9% и слабо зависит от параметра ϵ . С другой стороны, точность аппроксимации величины максимума растет с увеличением ϵ и достигает около 2% при $\epsilon = 0.5$, см. Рис.3в).

§5. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-11-20085). Авторы признательны А.В.Семенову за помощь в проведении расчетов.

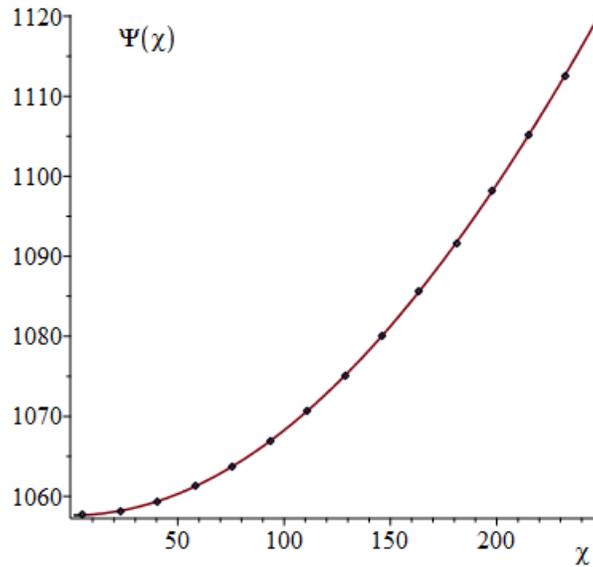


Рис 2. Модельная функция наблюдения Ψ

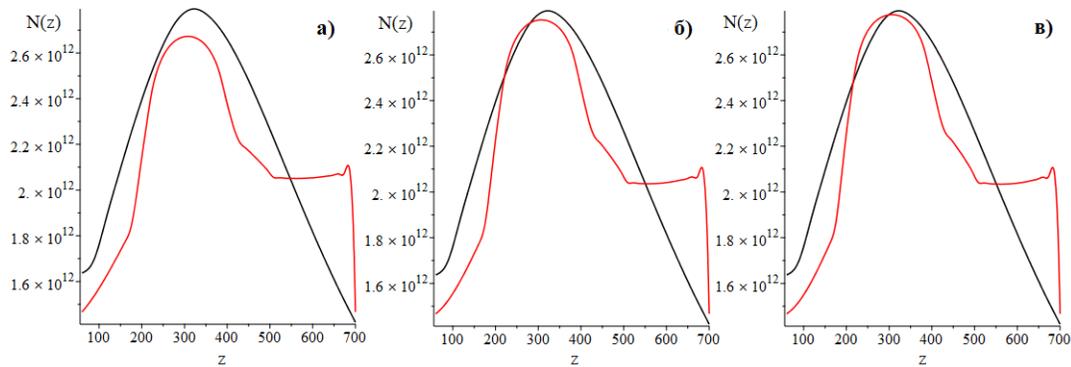


Рис 3. Примеры восстановленного профиля электронной концентрации (плавная линия) на фоне истинного (ломаная линия): а) $\epsilon=0.32$, б) $\epsilon=0.45$, в) $\epsilon=0.5$

Список литературы

- [1] Романов А.А., Романов А.А., Трусов С.В., Урличич Ю.М. Спутниковая радиотомография ионосферы. Физматлит, 2013.

- [2] Черный Ф.Б. Распространение радиоволн. М., 1972.
- [3] Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М.: Мир, 1973.
- [4] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2008.
- [5] Куницын В.Е., Терещенко Е.Д. Томография ионосферы. М.: Наука, 1991.
- [6] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. Университетский курс. М., 2011.
- [7] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рutiцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [8] Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной минимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
- [9] Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения нерегулярных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2006.
- [10] Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2012.
- [11] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.