S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, стр. 1–12 (2021) УДК 519.115.5
DOI 10.33048/semi.2021.18.xxx MSC 05C30

АНАЛОГИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ТОПОЛОГИЙ

В.И. РОДИОНОВ

Abstract. In the author's previous works published in this journal, a number of formulas are obtained related to the theme of enumeration of finite labeled topologies (partial orders). A formula is proved that reduces the calculation of the number $T_0(n)$ of all partial orders defined on the n-set to the calculation of the numbers $W(c_1,\ldots,c_k)$ of partial orders of a special form. Another direction of this theme is the study of the collection of numbers $\{T_0(n,m)\}$, where $T_0(n,m)$ is the number of labeled T_0-topologies defined on a set of n elements and having exactly m open sets. For each n, the function $p \to \sum_m T_0(n,m)m^p$ is defined, which allows to analyze the distribution of the number of open sets in the range from $n+1$ to 2^n. It is shown that these functions are computable through the functions $p \to W(p,c_1,\ldots,c_k)$. Families of the relationship equations between individual functions $p \to W(p,c_1,\ldots,c_k)$ are obtained, which have a recurrent character. Using these equations, explicit formulas for functions $p \to W(p,c_1,\ldots,c_k)$ are obtained for $c_1+\ldots+c_k \leqslant 5$ (without using a computer).

Keywords: graph enumeration, poset, finite topology.

1. Введение

Работа продолжает исследование чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$, определенных в [1] и фигурирующих в публикациях [2, 3, 4].

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве $X \doteq \{1,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{V}_0^0(X)$ всех помеченных

Rodionov, V.I., Analogs of generating functions in the problem of enumeration of finite topologies.

Поступила 14 мая 2021 г., опубликована 31 декабря 2021 г.

транзитивных орграфов, определенных на X; кроме того, существует взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{T}_0(X)$ всех помеченных T_0-топологий, определенных на X. Пусть $T_0(n) \doteq \operatorname{card} \mathcal{T}_0(X)$. Очевидно, $T_0(n) = \operatorname{card} \mathcal{V}_0(X) = \operatorname{card} \mathcal{V}_0^0(X)$. В работе [1] доказана формула

$$T_0(n) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} W(p_1,\ldots,p_k), \tag{1}$$

сводящая подсчет числа $T_0(n)$ всех частичных порядков (помеченных T_0-топологий), определенных на n-множестве, к вычислению чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$ частичных порядков специального вида. Суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k=n$ (другими словами, по всем разбиениям $(p_1,\ldots,p_k)$ числа n). Количество слагаемых в формуле (1) равно 2^{n-1}. Определение чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$ см. в § 2.

Согласно [2] для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$T_0(n) = n\,T_0(n-1) + \sum_{(p_1,\ldots,p_k)} (-1)^{n-1-k} \frac{n!}{(p_1+1)!\,p_2!\ldots p_k!}\, k\, p_1 W(p_1,\ldots,p_k), \tag{2}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k=n-1$. Понятно, что количество слагаемых в формуле (2) в два раза меньше, чем в формуле (1).

В работах [1, 2, 3] получено несколько семейств уравнений связи между отдельными числами $W(p_1,\ldots,p_k)$. В частности, в силу этих уравнений связи имеет место система, состоящая из 250 линейно независимых уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{p_1+\ldots+p_k \leqslant 8} A^i(p_1,\ldots,p_k)\, W(p_1,\ldots,p_k) = b^i, \\ \qquad\qquad\qquad i = 1,\ldots,250, \end{array} \right.$$

относительно 255 неизвестных величин $W(p_1,\ldots,p_k)$ таких, что $p_1+\ldots+p_k \leqslant 8$. (Явные выражения для коэффициентов $A^i(p_1,\ldots,p_k)$ и чисел b^i мы здесь не приводим.) Понятно, что общее решение системы допускает пятипараметрическое представление. Компьютерные вычисления позволяют найти значения этих параметров и вычислить, в конечном счете, все 255 неизвестных величин.

В рамках настоящей работы акцент сделан на изучение функций

$$p \to W(p, c_1,\ldots,c_k) \quad \text{и} \quad (p,q) \to W(p, c_1,\ldots,c_k, q), \tag{3}$$

определенных для произвольных разбиений $(c_1,\ldots,c_k)$. Аргументы p, q — натуральные числа, но функции допускают доопределение на случаи $p=0$, $q=0$.

2. Основные определения

Пусть $B \doteq \{0,1\}$ — булево множество, X — произвольное множество. Функции $X^2 \to B$ называем *характеристическими*. Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X, порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma\colon X^2 \to B, \qquad \chi_\sigma(x,y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x,y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее функцию $\chi_\sigma(\cdot,\cdot)$ обозначаем через $\sigma(\cdot,\cdot)$. С другой стороны, всякая функция $\chi: X^2 \to B$ порождает бинарное отношение $\sigma_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x,y) \in \sigma_\chi$, если $\chi(x,y)=1$. Отображение $\sigma \to \sigma(\cdot,\cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций. В силу этого обстоятельства мы называем подмножества $\sigma \subseteq X^2$ как отношениями, так и функциями (иногда орграфами). В случае $\operatorname{card} X < \infty$ характеристическую функцию можно интерпретировать как бинарную матрицу (матрицу, состоящую из 0 и 1). В работе применяется функциональное представление, позволяющее получать содержательные результаты в наиболее общей форме (см., например, родственные работы [5, 6, 7, 4], посвященные исследованию подграфов графа бинарных отношений).

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X. В терминах характеристических функций справедливо утверждение: *включение $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \sigma(x,x) = 1 \ \text{ для всех } x \in X, \\ \sigma(x,y)\,\sigma(y,z) \leqslant \sigma(x,z) \ \text{ для всех } x,y,z \in X, \\ \sigma(x,y)\,\sigma(y,x) = \delta_{xy} \ \text{ для всех } x,y \in X \ \text{(где } \delta_{xy} \text{ — символ Кронекера).} \end{gathered} \tag{4}$$

Далее полагаем $\operatorname{card} X < \infty$. Для любого частичного порядка $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ определено опорное множество

$$S(\sigma) \doteq \{\, y \in X \colon \sigma(x,y) = \delta_{xy} \ \text{ для всех } \ x \in X \,\} \neq \varnothing, \tag{5}$$

а если $\varnothing \neq Y \subseteq X$, то сужение $\sigma|_{Y^2}$ принадлежит $\mathcal{V}_0(Y)$ (есть частичный порядок на множестве Y). Неравенство $S(\sigma) \neq \varnothing$ доказано в [5] (предложение 2).

Пусть $(p_1,\dots,p_k) \in \mathbb{N}^k$, $n \doteq p_1 + \ldots + p_k$, $X \doteq \{\,1,\dots,n\,\}$. Набор $(p_1,\dots,p_k)$ называем *разбиением* числа n. Разбиению $(p_1,\dots,p_k)$ соответствует представление отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в блочном виде

$$\begin{Vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \ldots & \sigma^{1k} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \ldots & \sigma^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma^{k1} & \sigma^{k2} & \ldots & \sigma^{kk} \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

в котором на пересечении i-ой горизонтальной и j-ой вертикальной полос стоит блок σ^{ij} с p_i строками и p_j столбцами. Запись отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в виде (6) будем называть блочным представлением *типа* $(p_1,\dots,p_k)$.

Через $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_k)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (6) типа $(p_1,\dots,p_k)$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i = 1,\dots,k$, — единичные матрицы,

и пусть $W(p_1,\dots,p_k) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}(p_1,\dots,p_k)$.

Числа $W(p_1,\dots,p_k)$ и порожденные ими функции (3) являются основным объектом исследований настоящей работы (см. также [1, 2, 3, 4]).

Для любого $\sigma \in \mathcal{W}(p_1,\dots,p_k)$ справедливо блочное представление

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline e_{p_1} & & & \\ \hline 0 & \ddots & & \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots & \\ \hline 0 & \ddots & 0 & e_{p_k} \\ \hline \end{array}$$

(символ 0 означает, что все элементы блока равны нулю; в диагональных блоках e_{p_r}, $r = 1,\dots,k$, диагональные элементы равны 1, а остальные равны 0).

Замечание 1. Распространим определение чисел $W(p_1,\dots,p_k)$ на произвольные упорядоченные наборы $(p_1,\dots,p_k)$ целых неотрицательных аргументов. Полагаем по определению $W(0) \doteq 1$. Если $p_i = 0$ для некоторого i, то полагаем

$$W(p_1,\dots,p_k) \doteq W(p_1,\dots,p_{i-1},p_{i+1},\dots,p_k).$$

Полагаем также, что функции (3) определены при $p = 0$ и при $q = 0$.

3. Аналоги производящих функций

Зафиксируем целые $a < b$, и пусть $\mathcal{T}_0(S)$ — это совокупность всех помеченных T_0-топологий, определенных на множестве $S \doteq \{\, a,\dots,b\}$. В комментариях, предваряющих формулировку и доказательство леммы 5 в [1], определена биекция $\mathcal{V}_0(S) \to \mathcal{T}_0(S),\ \sigma \to \mathrm{T}^\sigma$. Показано, что замыканием точки $j \in S$ в топологии T^σ является множество $[\, j\,] \doteq \bigl\{\, i \in S\colon \sigma(i,j) = 1 \,\bigr\}$. Базой топологии T^σ является семейство $\bigl\{\, (\, i\,)\,\bigr\}_{i\in S}$ открытых множеств $(\, i\,) \doteq \bigl\{\, j \in S\colon \sigma(i,j) = 1 \,\bigr\}$.

Пусть, далее, $\mathcal{O}(\sigma)$ и $\mathcal{C}(\sigma)$ — это (равномощные) совокупности открытых и замкнутых множеств топологии T^σ, соответствующей отношению $\sigma \in \mathcal{V}_0(S)$.

Зафиксируем частичный порядок $\sigma \in \mathcal{V}_0(S)$. Через $\mathcal{N}(\sigma)$ и $\mathcal{M}(\sigma)$ обозначим совокупности всех тех строк $\xi = (\,\xi_a,\dots,\xi_b\,)$ (соответственно всех тех столбцов $\eta = (\,\eta_a,\dots,\eta_b\,)^\top$), состоящих из нулей и единиц, для которых отношения

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \xi \\ \hline \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \sigma \\ \hline \end{array}\ , \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline \sigma & \eta \\ \hline 0\ \cdots\ 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

являются частичными порядками. Пусть $N(\sigma) \doteq \operatorname{card}\mathcal{N}(\sigma)$, $M(\sigma) \doteq \operatorname{card}\mathcal{M}(\sigma)$.

В процессе доказательства леммы 5 в [1] установлено, что $N(\sigma) = \operatorname{card}\mathcal{O}(\sigma)$, $M(\sigma) = \operatorname{card}\mathcal{C}(\sigma)$. Так как $\operatorname{card}\mathcal{O}(\sigma) = \operatorname{card}\mathcal{C}(\sigma)$, то $N(\sigma) = M(\sigma)$.

Зафиксируем целые $p \geqslant 0$ и $n > 0$. Пусть $(c_1,c_2) \doteq (p,n)$, $X \doteq \{\,1,\dots,p+n\}$, $S \doteq \{\,p+1,\dots,p+n\}$. Зафиксируем частичный порядок $\sigma \in \mathcal{V}_0(S)$ и через $\mathcal{W}'(p,\sigma)$ обозначим совокупность всех тех отношений $\tau \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (6) типа (c_1,c_2)

1) блок τ^{21} состоит целиком из нулей;
2) диагональный блок τ^{11} — это единичная матрица порядка p;
3) $\tau^{22} = \sigma$,

и пусть $W'(p,\sigma) \doteq \operatorname{card}\mathcal{W}'(p,\sigma)$.

Другими словами, для частичного порядка τ имеет место представление

$$\tau = \begin{array}{|c|c|}\hline e_p & \\ \hline 0 & \sigma \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} c_1 = p \\ c_2 = n \end{array}$$

(заметим, что $\tau = \sigma$ при $p = 0$). Понятно, что в блоке τ^{12} строения $p\times n$ может располагаться любая строка $\xi \in \mathcal{N}(\sigma)$, следовательно, в силу общей комбинаторной теории имеет место равенство $W'(p,\sigma) = [\,N(\sigma)\,]^p$. Таким образом, для любого упорядоченного набора $(c_1,\dots,c_k)$ натуральных чисел справедливо

$$W(p,c_1,\dots,c_k) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}(c_1,\dots,c_k)} W'(p,\sigma) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}(c_1,\dots,c_k)} [\,N(\sigma)\,]^p. \tag{7}$$

Мы называем формулы (7) аналогами производящих функций (в отличие от обычных производящих функций, где суммируются мономы, в нашем случае суммируются показательные функции). Ниже приведены формулы для отдельных функций $p \to W(p, c_1, \ldots, c_k)$. Две первые формулы очевидны. Остальные формулы основаны на представлении (7) (см. также формулы (15) и (19) в [2]).

(8)

$W(p) = 1.$

$W(p, q) = 2^{pq}.$

$W(p, 1, 1) = 4^p + 3^p.$

$W(p, 2, 1) = W(p, 1, 2) = 8^p + 2 \cdot 6^p + 5^p.$

$W(p, 1, 1, 1) = 8^p + 3 \cdot 6^p + 2 \cdot 5^p + 4^p.$

Анализ формул показывает, что множество $\mathcal{W}(1, 1, 1)$, например, содержит один частичный порядок такой, что в соответствующей ему топологии имеется 8 открытых множеств, три частичных порядка (таких, что в топологии — 6 открытых множеств), два частичных порядка (в топологии — 5 открытых множеств), один частичный порядок (в топологии — 4 открытых множества):

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}.$$

В параграфах 6 и 7 мы продолжим перечисление формул вида (8).

4. Вспомогательные числа $W'(p, \sigma, q)$

Зафиксируем натуральное n и целые неотрицательные числа p и q. Пусть $(c_1, c_2, c_3) \doteq (p, n, q)$, $X \doteq \{1, \ldots, p+n+q\}$, $S \doteq \{p+1, \ldots, p+n\}$. Зафиксируем частичный порядок $\sigma \in \mathcal{V}_0(S)$ и через $\mathcal{W}'(p, \sigma, q)$ обозначим совокупность всех отношений $\tau \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (6) типа (c_1, c_2, c_3)

1) блоки τ^{21}, τ^{31}, τ^{32} состоят из нулей;

2) диагональные блоки τ^{11}, τ^{33} — единичные матрицы;

3) $\tau^{22} = \sigma$,

и пусть $W'(p, \sigma, q) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}'(p, \sigma, q)$.

Другими словами, для частичного порядка τ имеет место представление

$$\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline e_p & & \\ \hline 0 & \sigma & \\ \hline 0 & 0 & e_q \\ \hline\end{array}\quad\begin{array}{l} c_1 = p \\ c_2 = n \\ c_3 = q\,. \end{array}$$

Для любого $\sigma \in \mathcal{V}_0(S)$ полагаем

$$\nu \doteq N(\sigma) = M(\sigma) = \operatorname{card} \mathcal{N}(\sigma) = \operatorname{card} \mathcal{M}(\sigma) = \operatorname{card} \mathcal{O}(\sigma) = \operatorname{card} \mathcal{C}(\sigma).$$

Понятно, что в блоке τ^{12} строения $p \times n$ может располагаться любая строка $\xi \in \mathcal{N}(\sigma)$. Занумеруем эти строки (полагаем $\mathcal{N}(\sigma) = \{\xi^1, \ldots, \xi^\nu\}$). Через $\overline{p}$ обозначим упорядоченный набор $(p_1, \ldots, p_\nu)$, состоящий из целых неотрицательных чисел таких, что $p_1 + \ldots + p_\nu = p$. Через $\mathcal{U}'(\overline{p}, \sigma, q)$ обозначим множество всех тех $\tau \in \mathcal{W}'(p, \sigma, q)$, у которых блок τ^{12} содержит ровно p_i вхождений строки ξ^i (для всех $i = 1, \ldots, \nu$). Имеет место равенство

$$W'(p, \sigma, q) = \sum_{p_1 + \ldots + p_\nu = p} \operatorname{card} \mathcal{U}'(\overline{p}, \sigma, q). \tag{9}$$

Через $\mathcal{U}\,(\overline{p},\sigma,q)$ обозначим множество всех тех отношений $\tau\in\mathcal{U}\,'(\overline{p},\sigma,q)$, у которых строки $\xi^1,\ldots,\xi^\nu$ расположены в блоке τ^{12} специальным образом: сначала (сверху-вниз) идет строка ξ^1 в количестве p_1 штук, затем следует строка ξ^2 в количестве p_2 штук, и т.д. Для τ имеет место представление

$$\tau=\begin{array}{|c|c|c|l}\hline & \xi^1 & & p_1\\ e_p & \vdots & & \vdots\\ & \xi^\nu & & p_\nu\\ \hline & \sigma & & n\\ \cline{2-3} 0 & & e_q & q.\\ \hline\end{array}$$

В силу общей комбинаторной теории имеет место равенство

$$\operatorname{card}\mathcal{U}\,'(\overline{p},\sigma,q)=\frac{p!}{p_1!\ldots p_\nu!}\operatorname{card}\mathcal{U}\,(\overline{p},\sigma,q). \tag{10}$$

Понятно, что в блоке τ^{23} строения $n\times q$ может располагаться любой столбец $\eta\in\mathcal{M}(\sigma)$. Занумеруем эти столбцы (полагаем $\mathcal{M}(\sigma)=\{\,\eta^1,\ldots,\eta^\nu\}$). Через $\overline{q}$ обозначим упорядоченный набор $(q_1,\ldots,q_\nu)$, состоящий из целых неотрицательных чисел таких, что $q_1+\ldots+q_\nu=q$. Через $\mathcal{H}'(\overline{p},\sigma,\overline{q})$ обозначим множество всех тех $\tau\in\mathcal{U}\,(\overline{p},\sigma,q)$, у которых блок τ^{23} содержит ровно q_i вхождений столбца η^i (для всех $i=1,\ldots,\nu$). Имеет место равенство

$$\operatorname{card}\mathcal{U}\,(\overline{p},\sigma,q)=\sum_{q_1+\ldots+q_\nu=q}\operatorname{card}\mathcal{H}'(\overline{p},\sigma,\overline{q}). \tag{11}$$

Через $\mathcal{H}(\overline{p},\sigma,\overline{q})$ обозначим множество всех тех отношений $\tau\in\mathcal{H}'(\overline{p},\sigma,\overline{q})$, у которых столбцы $\eta^1,\ldots,\eta^\nu$ расположены в блоке τ^{23} специальным образом: сначала (слева-направо) идет столбец η^1 в количестве q_1 штук, затем следует столбец η^2 в количестве q_2 штук, и т.д. Для τ имеет место представление

$$\tau=\begin{array}{|c|c|ccc|l} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{n} & q_1 & \ldots & \multicolumn{1}{c}{q_\nu} & \\ \hline & \xi^1 & & & & p_1\\ e_p & \vdots & & & & \vdots\\ & \xi^\nu & & & & p_\nu\\ \hline & \sigma & \eta^1 & \ldots & \eta^\nu & n.\\ \cline{2-6} 0 & & & e_q & & \\ \hline\end{array} \tag{12}$$

В соответствии с общей комбинаторной теорией имеет место равенство

$$\operatorname{card}\mathcal{H}'(\overline{p},\sigma,\overline{q})=\frac{q!}{q_1!\ldots q_\nu!}\operatorname{card}\mathcal{H}(\overline{p},\sigma,\overline{q}), \tag{13}$$

а в силу формул (9), (10), (11), (13) справедливо

$$W'(p,\sigma,q)=\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_\nu=p\\ q_1+\ldots+q_\nu=q}}\frac{p!}{p_1!\ldots p_\nu!}\,\frac{q!}{q_1!\ldots q_\nu!}\operatorname{card}\mathcal{H}(\overline{p},\sigma,\overline{q}). \tag{14}$$

Для всех $i,j=1,\ldots,\nu$ определены скалярные произведения $\langle\,\xi^i,\eta^j\,\rangle$ векторов $\xi^i=(\xi^i_{p+1},\ldots,\xi^i_{p+n})$ и $\eta^j=(\eta^j_{p+1},\ldots,\eta^j_{p+n})$ (элементов пространства $\mathbb{R}^n$, состоящих лишь из чисел 0 и 1). Следовательно, определена билинейная форма

$$\Omega(\overline{p},\sigma,\overline{q}) \doteq \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\Omega^{ij}p_i q_j \tag{15}$$

от переменных $p_1,\dots,p_\nu$, $q_1,\dots,q_\nu$, где

$$\Omega^{ij} \doteq \Omega^{ij}_{\sigma} \doteq \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \langle\, \xi^i,\eta^j\,\rangle > 0, \\ 1, & \text{если} \quad \langle\, \xi^i,\eta^j\,\rangle = 0, \end{cases} \qquad i,j=1,\dots,\nu. \tag{16}$$

Если $\Omega^{ij}=0$ для некоторой пары (i,j), то существует индекс $k\in S$ такой, что $\xi^i_k = 1 = \eta^j_k$. В силу этого обстоятельства и в силу транзитивности отношения τ все элементы, расположенные в подблоке строения $p_i\times q_j$ блока τ^{13} в представлении (12), равны 1. Если же $\Omega^{ij}=1$ для некоторой пары (i,j), то $\xi^i_k\,\eta^j_k = 0$ для всех $k\in S$. В силу данного обстоятельства в подблоке строения $p_i\times q_j$ блока τ^{13} в представлении (12) может размещаться любая комбинация нулей и единиц (транзитивность отношения τ нарушена не будет). Количество вариантов размещения в этом случае (при $\Omega^{ij}=1$) равно

$$2^{\,p_i q_j} = 2^{\,\Omega^{ij}p_i q_j}.$$

Мы уже отметили, что в первом случае (при $\Omega^{ij}=0$) имеется единственный вариант размещения (и здесь имеет место равенство $1 = 2^{\,\Omega^{ij}p_iq_j}$). Следовательно, согласно общей комбинаторной теории для количества вариантов размещения нулей и единиц в блоке τ^{13} (для числа $\operatorname{card}\mathcal{H}(\overline{p},\sigma,\overline{q})$) справедливо равенство

$$\operatorname{card}\mathcal{H}(\overline{p},\sigma,\overline{q}) = \prod_{i=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{\nu} 2^{\,\Omega^{ij}p_iq_j} = 2^{\,\Omega(\overline{p},\sigma,\overline{q})}.$$

Формула (14) может быть записана в одном из трех вариантов:

$$W'(p,\sigma,q) = \sum_{\substack{p_1+\dots+p_\nu=p\\ q_1+\dots+q_\nu=q}} \frac{p!}{p_1!\dots p_\nu!}\,\frac{q!}{q_1!\dots q_\nu!}\,2^{\,\Omega(\overline{p},\sigma,\overline{q})} \tag{17}$$

$$= \sum_{q_1+\dots+q_\nu=q}\frac{q!}{q_1!\dots q_\nu!}\left[\,\sum_{i=1}^{\nu} 2^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}\Omega^{ij}_{\sigma}q_j}\,\right]^p = \sum_{p_1+\dots+p_\nu=p}\frac{p!}{p_1!\dots p_\nu!}\left[\,\sum_{j=1}^{\nu} 2^{\sum\limits_{i=1}^{\nu}\Omega^{ij}_{\sigma}p_i}\,\right]^q.$$

В формулах фигурируют числа (15) и (16); для получения двух последних выражений воспользовались полиномиальным аналогом бинома Ньютона. Очевидно, для любого упорядоченного набора $(c_1,\dots,c_k)$ натуральных чисел справедливо равенство (допускающее применение формул (17)):

$$W(p,c_1,\dots,c_k,q) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}(c_1,\dots,c_k)} W'(p,\sigma,q). \tag{18}$$

5. Примеры

1. Из формул (17), (18) с единых позиций получаются формулы (19) (их происхождение см. также в [2], формулы (15), (18), (19)). Формулы имеют вид

$$W(p,1,q) = \sum_{q_1+q_2=q}\frac{q!}{q_1!\,q_2!}\left[\,2^q + 2^{q_1}\,\right]^p, \tag{19}$$

$$W(p,2,q)=\sum_{q_1+\ldots+q_4=q}\frac{q!}{q_1!\ldots q_4!}\Big[\,2^{q}+2^{q_1+q_3}+2^{q_1+q_2}+2^{q_1}\,\Big]^{p},$$

$$W(p,1,1,q)-W(p,2,q)=\sum_{q_1+q_2+q_3=q}\frac{q!}{q_1!\,q_2!\,q_3!}\Big[\,2^{q}+2^{q_1+q_2}+2^{q_1}\,\Big]^{p}.$$

В этих трех случаях используются отношения $\sigma=|\,1\,|$, $\sigma=\left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right|$, $\sigma=\left|\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right|$:

$$\begin{array}{r}\mathcal{N}(\sigma)\\ \hookrightarrow\\ \sigma\to\end{array}
\begin{array}{|c|cc|}\hline 0 & & \\ 1 & & 1\\ \hline 1 & 0 & 1\\ \hline\end{array}
\begin{array}{l}\\ \mathcal{M}(\sigma),\\ \hookleftarrow\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\mathcal{N}(\sigma)\\ \hookrightarrow\\ \\ \\ \sigma\to\end{array}
\begin{array}{|cc|cccc|}\hline 0&0&&&&\\ 0&1&&1&&1\\ 1&0&&&1&1\\ 1&1&&1&1&1\\ \hline 1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ \hline\end{array}
\begin{array}{l}\\ \\ \mathcal{M}(\sigma),\\ \hookleftarrow\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\mathcal{N}(\sigma)\\ \hookrightarrow\\ \\ \sigma\to\end{array}
\begin{array}{|cc|ccc|}\hline 0&0&&&\\ 0&1&&&1\\ 1&1&&1&1\\ \hline 1&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ \hline\end{array}
\begin{array}{l}\\ \\ \mathcal{M}(\sigma).\\ \hookleftarrow\end{array}$$

(Ср. с представлением (12).) Матрицы $(\,\Omega_{\sigma}^{ij})$, $i,j=1,\ldots,\nu$, имеют вид

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

2. Применим формулу (17) еще для трех отношений:

$$\sigma_1=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}.$$

В каждом из этих случаев фрагменты представления (12) имеют вид

$$\begin{array}{c}q_1\ \ \cdots\ \ q_6\\
\begin{array}{|ccc|cccccc|}\hline 0&0&0&&&&&&\\ 0&0&1&&&1&&&1\\ 0&1&1&&1&1&&1&1\\ 1&0&0&&&&1&1&1\\ 1&0&1&&&1&1&1&1\\ 1&1&1&&1&1&1&1&1\\ \hline 1&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ \hline\end{array}\end{array}
\begin{array}{l}p_1\\ \vdots\\ p_6,\\ \\ \\ \end{array}
\quad
\begin{array}{c}q_1\ \ \cdots\ \ q_5\\
\begin{array}{|ccc|ccccc|}\hline 0&0&0&&&&&\\ 0&0&1&&&&&1\\ 0&1&1&&1&&1&1\\ 1&0&1&&&1&1&1\\ 1&1&1&&1&1&1&1\\ \hline 1&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&1\\ \hline\end{array}\end{array}
\begin{array}{l}p_1\\ \vdots\\ p_5,\\ \\ \\ \end{array}
\quad
\begin{array}{c}q_1\ldots q_4\\
\begin{array}{|ccc|cccc|}\hline 0&0&0&&&&\\ 0&0&1&&&&1\\ 0&1&1&&&1&1\\ 1&1&1&&1&1&1\\ \hline 1&1&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&1\\ \hline\end{array}\end{array}
\begin{array}{l}p_1\\ \vdots\\ p_4\\ \\ \\ \end{array}$$

соответственно. Матрицы $(\,\Omega_{\sigma}^{ij})$, $i,j=1,\ldots,\nu$, имеют вид

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу формул (17) справедливы равенства

(20) $\quad W'(p,\sigma_1,q)$

$$=\sum_{q_1+\ldots+q_6=q}\frac{q!}{q_1!\,\ldots\,q_6!}\Big[\,2^{q}+2^{q_1+q_2+q_4+q_5}+2^{q_1+q_4}+2^{q_1+q_2+q_3}+2^{q_1+q_2}+2^{q_1}\,\Big]^{p},$$

$$W'(p,\sigma_2,q)=\sum_{q_1+\ldots+q_5=q}\frac{q!}{q_1!\,\ldots\,q_5!}\Big[\,2^{q}+2^{q_1+q_2+q_3+q_4}+2^{q_1+q_3}+2^{q_1+q_2}+2^{q_1}\,\Big]^{p},$$

$$W'(p,\sigma_3,q)=\sum_{q_1+\ldots+q_4=q}\frac{q!}{q_1!\,\ldots\,q_4!}\Big[\,2^{q}+2^{q_1+q_2+q_3}+2^{q_1+q_2}+2^{q_1}\,\Big]^{p}.$$

(21)

$$W'(p,\sigma_2,q)=\sum_{p_1+\ldots+p_5=p}\frac{p!}{p_1!\,\ldots\,p_5!}\Big[\,2^{p}+2^{p_1+p_2+p_4}+2^{p_1+p_2+p_3}+2^{p_1+p_2}+2^{p_1}\,\Big]^{q}.$$

Формула (21) имеет самостоятельный характер (см. третий вариант формулы (17)). Можно было бы записать аналогичные формулы и для отношений σ_1 и σ_3, однако в этих двух случаях матрицы (Ω^{ij}) симметричны (то есть $\Omega^{ij} = \Omega^{ji}$ для всех $i, j = 1, \ldots, \nu$), поэтому получаются лишь формулы-дублеры (22):

$$\Omega(\overline{q}, \sigma, \overline{p}) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \Omega^{ij} q_i p_j = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \Omega^{ji} q_j p_i = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \Omega^{ij} p_i q_j = \Omega(\overline{p}, \sigma, \overline{q}),$$

$$W'(p, \sigma_1, q) = W'(q, \sigma_1, p), \qquad W'(p, \sigma_3, q) = W'(q, \sigma_3, p). \tag{22}$$

3. В данном пункте с единых позиций получены равенства (23) и (24) (использующие формулы (20)). Множество $\mathcal{W}(2,1)$ состоит из четырех отношений:

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}\,.$$

Следовательно, для целых неотрицательных чисел p и q справедливо

$$W(p, 2, 1, q) = W(p, 3, q) + 2W'(p, \sigma_1, q) + W'(p, \sigma_2, q). \tag{23}$$

Имеет место цепочка равенств (смысл множеств понятен):

$$\mathcal{W}(1,1,1) = \left\{\begin{matrix}1&&\\0&1&\\0&0&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1&0&\\0&1&\\0&0&1\end{matrix}\right\} \cup \left\{\begin{matrix}1&1&\\0&1&\\0&0&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1&0&\\0&1&\\0&0&1\end{matrix}\right\} \cup \left\{\begin{matrix}1&1&\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}\right\} \cup \left\{\begin{matrix}1&1&\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\}.$$

В предпоследнем множестве воспользуемся свойством транзитивности, а последнее представим в виде разности множеств:

$$\left\{\begin{matrix}1&&\\0&1&\\0&0&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1&0&\\0&1&\\0&0&1\end{matrix}\right\} \cup \left\{\begin{matrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{matrix}\right\} \cup \left\{\begin{matrix}1&&\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\} \setminus \left\{\begin{matrix}1&0&\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\}.$$

В правом верхнем углу последнего множества стоит либо 0, либо 1, поэтому для любых целых неотрицательных чисел p и q справедливо равенство

$$\begin{aligned} &W(p, 1, 1, 1, q) \\ &\quad = W(p, 2, 1, q) + W'(p, \sigma_3, q) + W(p, 1, 2, q) - W(p, 3, q) - W'(p, \sigma_1, q). \end{aligned} \tag{24}$$

6. Производящие функции $p \to W(p, c_1, \ldots, c_k)$ при $c_1 + \ldots + c_k = 4$

Наряду с формулами (19) далее мы применяем еще четыре формулы, полученные в предыдущих работах. В силу [1] (леммы 4 и 5) имеют место равенства

$$W(c_1, \ldots, c_k) = W(c_k, \ldots, c_1), \qquad W(p, c_1, \ldots, c_k) = W(c_1, \ldots, c_k, p), \tag{25}$$

справедливые для всех натуральных чисел p и $c_1, \ldots, c_k$. В силу замечания 1 они справедливы и для всех целых неотрицательных чисел. Это же замечание относится к формуле (26) (см. формулу (20) в [2]):

$$W(p, 1, q, 1) = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \left(2^{q-r}+1\right)^p W(p, r, 1) + \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} \left(2^{p-r}+1\right)^q W(r, q, 1). \tag{26}$$

В силу формулы (27) в [3] для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} &\sum_{q_1+\ldots+q_r = m+1} (-1)^{m+1-r} \frac{m!}{(q_1-1)!\, q_2! \ldots q_r!} W(p, q, q_1, \ldots, q_r) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^{(p-k)q} \sum_{l=0}^{q} \binom{q}{l} \sum_{q_1+\ldots+q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \ldots q_r!} W(k, l, q_1, \ldots, q_r). \end{aligned} \tag{27}$$

В дополнение к формулам (8) справедливы перечисленные ниже формулы (28).

(28)

$W(p,4)=16^p.$

$W(p,3,1)=W(p,1,3)=16^p+3\cdot 12^p+3\cdot 10^p+9^p.$

$W(p,2,2)=16^p+4\cdot 12^p+4\cdot 10^p+2\cdot 9^p+4\cdot 8^p+7^p.$

$W(p,2,1,1)=W(p,1,1,2)=16^p+5\cdot 12^p+6\cdot 10^p+3\cdot 9^p+6\cdot 8^p+3\cdot 7^p+6^p.$

$W(p,1,2,1)=16^p+5\cdot 12^p+6\cdot 10^p+4\cdot 9^p+4\cdot 8^p+4\cdot 7^p+6^p.$

$W(p,1,1,1,1)=16^p+6\cdot 12^p+8\cdot 10^p+5\cdot 9^p+9\cdot 8^p+7\cdot 7^p+3\cdot 6^p+5^p.$

Первая формула в (28) справедлива в силу второго равенства (8). Предпоследняя формула в (28) имеет место в силу (26). Промежуточные формулы в (28) справедливы в силу (19), причем в соответствии с (25) имеют место равенства

$$W(p,c_1,\ldots,c_k)=W(c_k,\ldots,c_1,p)=W(p,c_k,\ldots,c_1), \tag{29}$$

поэтому $W(p,3,1)=W(p,1,3)$ и $W(p,2,1,1)=W(p,1,1,2)$. Наконец, последняя формула в (28) справедлива в силу (24) и (20).

7. Производящие функции $p\to W(p,c_1,\ldots,c_k)$ при $c_1+\ldots+c_k=5$

Наряду с (8) и (28) справедливы перечисленные ниже формулы (30) и (31).

(30)

$W(p,5)=32^p.$

$W(p,4,1)=W(p,1,4)=32^p+4\cdot 24^p+6\cdot 20^p+4\cdot 18^p+17^p.$

$$W(p,3,2)=W(p,2,3)=32^p+6\cdot 24^p+9\cdot 20^p+8\cdot 18^p \\ +12\cdot 16^p+6\cdot 15^p+9\cdot 14^p+6\cdot 13^p+6\cdot 12^p+11^p.$$

$$W(p,3,1,1)=W(p,1,1,3)=32^p+7\cdot 24^p+12\cdot 20^p+11\cdot 18^p+17^p \\ +15\cdot 16^p+6\cdot 15^p+15\cdot 14^p+9\cdot 13^p+9\cdot 12^p+4\cdot 11^p+10^p.$$

$$W(p,1,3,1)=32^p+7\cdot 24^p+12\cdot 20^p+14\cdot 18^p+2\cdot 17^p \\ +9\cdot 16^p+6\cdot 15^p+18\cdot 14^p+6\cdot 13^p+9\cdot 12^p+6\cdot 11^p+10^p.$$

$$W(p,2,1,2)=32^p+8\cdot 24^p+14\cdot 20^p+14\cdot 18^p+24\cdot 16^p+12\cdot 15^p \\ +25\cdot 14^p+12\cdot 13^p+24\cdot 12^p+10\cdot 11^p+12\cdot 10^p+4\cdot 9^p+8^p.$$

Первая формула в (30) справедлива в силу второго равенства (8). Предпоследняя формула в (30) имеет место в силу (26), а последняя — в силу (23) и (20). Промежуточные формулы в (30) справедливы в силу (19) и (29).

(31)

$$W(p,2,2,1)=W(p,1,2,2)=32^p+8\cdot 24^p+14\cdot 20^p+16\cdot 18^p+17^p+20\cdot 16^p \\ +12\cdot 15^p+25\cdot 14^p+14\cdot 13^p+20\cdot 12^p+13\cdot 11^p+10\cdot 10^p+6\cdot 9^p+8^p.$$

$$W(p,2,1,1,1)=W(p,1,1,1,2)=32^p+9\cdot 24^p+17\cdot 20^p+19\cdot 18^p+17^p+29\cdot 16^p \\ +15\cdot 15^p+37\cdot 14^p+19\cdot 13^p+34\cdot 12^p+20\cdot 11^p+21\cdot 10^p+11\cdot 9^p+4\cdot 8^p+7^p.$$

$$W(p,1,2,1,1)=W(p,1,1,2,1)=32^p+9\cdot 24^p+17\cdot 20^p+21\cdot 18^p+2\cdot 17^p+25\cdot 16^p \\ +15\cdot 15^p+38\cdot 14^p+20\cdot 13^p+31\cdot 12^p+23\cdot 11^p+18\cdot 10^p+12\cdot 9^p+5\cdot 8^p+7^p.$$

$$W(p,1,1,1,1,1)=32^p+10\cdot 24^p+20\cdot 20^p+25\cdot 18^p+2\cdot 17^p+35\cdot 16^p+20\cdot 15^p \\ +53\cdot 14^p+28\cdot 13^p+50\cdot 12^p+36\cdot 11^p+36\cdot 10^p+24\cdot 9^p+12\cdot 8^p+4\cdot 7^p+6^p.$$

Дадим поясняющие комментарии к формулам (31).

В силу (23) при $p = 2$ имеет место равенство

$$W(2, 2, 1, q) = W(2, 3, q) + 2W'(2, \sigma_1, q) + W'(2, \sigma_2, q),$$

поэтому $W(q, 2, 2, 1) = W(q, 2, 3) + 2W'(q, \sigma_1, 2) + W'(2, \sigma_2, q)$ (дважды применили вторую формулу (25) и один раз — первую формулу (22)). Следовательно,

$$W(p, 1, 2, 2) = W(p, 2, 2, 1) = W(p, 2, 3) + 2W'(p, \sigma_1, 2) + W'(2, \sigma_2, p).$$

Первое равенство справедливо в силу (29). Все слагаемые правой части вычислимы (см. формулы (30), (20), (21)). В силу этого обстоятельства справедливы первые формулы в (31). При $(q, m) = (2, 2)$ формула (27) принимает вид

$$2W(p, 2, 1, 1, 1) - W(p, 2, 1, 2) - 2W(p, 2, 2, 1) + W(p, 2, 3) = \Sigma,$$

где $\Sigma \doteq 20^p + 6 \cdot 16^p + 8 \cdot 14^p + 4 \cdot 13^p + 10 \cdot 12^p + 5 \cdot 11^p + 10 \cdot 10^p + 6 \cdot 9^p + 5 \cdot 8^p + 2 \cdot 7^p$ — это правая часть (27) (для вычисления Σ применили формулы (8) и (28)). В силу этого обстоятельства справедливы вторые формулы в (31): следует лишь применить равенство $W(p, 2, 1, 1, 1) = W(p, 1, 1, 1, 2)$ (см. (29)), формулы для $W(p, 2, 3)$ и $W(p, 2, 1, 2)$ (см. (30)) и формулу для $W(p, 2, 2, 1)$ (см. (31)).

Последовательно придавая паре (q, m) в формуле (27) значения $(1, 3)$ и $(0, 4)$ соответственно, получаем два уравнения:

$$6W(p, 1, 1, 1, 1, 1) - 3W(p, 1, 1, 1, 2) - 3W(p, 1, 1, 2, 1) + W(p, 1, 1, 3)$$
$$-6W(p, 1, 2, 1, 1) + 3W(p, 1, 2, 2) + 3W(p, 1, 3, 1) - W(p, 1, 4) = \Sigma_1,$$
$$24W(p, 1, 1, 1, 1, 1) - 12W(p, 1, 1, 1, 2) - 12W(p, 1, 1, 2, 1) + 4W(p, 1, 1, 3)$$
$$-12W(p, 1, 2, 1, 1) + 6W(p, 1, 2, 2) + 4W(p, 1, 3, 1) - W(p, 1, 4)$$
$$-24W(p, 2, 1, 1, 1) + 12W(p, 2, 1, 2) + 12W(p, 2, 2, 1) - 4W(p, 2, 3)$$
$$+12W(p, 3, 1, 1) - 6W(p, 3, 2) - 4W(p, 4, 1) + W(p, 5) = \Sigma_2,$$

где $\Sigma_1 \doteq 18^p + 9 \cdot 14^p + 15 \cdot 12^p + 10 \cdot 11^p + 25 \cdot 10^p + 21 \cdot 9^p + 18 \cdot 8^p + 12 \cdot 7^p + 6 \cdot 6^p$,

$$\Sigma_2 \doteq 17^p + 12 \cdot 13^p + 24 \cdot 11^p + 20 \cdot 10^p + 48 \cdot 9^p + 54 \cdot 8^p + 36 \cdot 7^p + 24 \cdot 6^p.$$

Для вычисления Σ_1 и Σ_2 в (27) применили формулы (8) и (28). Неизвестные величины в уравнениях — это $W(p, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $W(p, 1, 2, 1, 1) = W(p, 1, 1, 2, 1)$ (см. (29)), все остальные величины известны (см. (30), (31)). Решив систему уравнений, получим заключительные формулы в (31).

8. Главные производящие функции

Зафиксируем целые числа $p \geqslant 0$ и $n > 0$. Полагаем $X \doteq \{ 1, \ldots, p + n\}$ и $S \doteq \{ p + 1, \ldots, p + n\}$. Через $\mathcal{W}(p; n)$ обозначим совокупность всех тех отношений $\tau \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (6) типа $(p_1, p_2) \doteq (p, n)$

1) блок τ^{21} состоит целиком из нулей;

2) диагональный блок τ^{11} — это единичная матрица порядка p,

и пусть $W(p; n) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}(p; n)$. Естественно считать, что $W(0; n) = T_0(n)$.

Для любого $\tau \in \mathcal{W}(p; n)$ имеет место блочное представление

$$\tau = \begin{array}{|c|c|} \hline e_p & \\ \hline 0 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 = p \\ p_2 = n, \end{array}$$

а по аналогии с (7) справедливо $W(p; n) = \sum\limits_{\sigma \in \mathcal{V}_0(S)} [\, N(\sigma) \,]^{\,p} \left(= \sum\limits_m T_0(n, m)\, m^p \right)$.

Функции $p \to W(p;n)$ мы называем главными производящими функциями. Через $T_0(n,m)$ обозначено количество помеченных T_0-топологий, определенных на n-множестве и имеющих ровно m открытых множеств. Например, $T_0(5,11) = 500$ (см. (33)). Из формулы (5) в [1] следует формула

$$W(p;n) = \sum_{c_1+\ldots+c_k=n} (-1)^{n-k}\,\frac{n!}{c_1!\ldots c_k!}\,W(p,c_1,\ldots,c_k). \tag{32}$$

Суммирование в ней ведется по всем разбиниям $(c_1,\ldots,c_k)$ числа n. При $p=0$ формула (32) превращается в (1). Приведенные ниже формулы (33) получены с помощью формул (32), (8), (28), (30), (31).

(33)

$$\begin{aligned}
&W(p;1) = 2^p,\\
&W(p;2) = 4^p + 2\cdot 3^p,\\
&W(p;3) = 8^p + 6\cdot 6^p + 6\cdot 5^p + 6\cdot 4^p,\\
&W(p;4) = 16^p + 12\cdot 12^p + 24\cdot 10^p + 20\cdot 9^p + 48\cdot 8^p + 54\cdot 7^p + 36\cdot 6^p + 24\cdot 5^p,\\
&W(p;5) = 32^p + 20\cdot 24^p + 60\cdot 20^p + 100\cdot 18^p + 10\cdot 17^p\\
&\qquad +180\cdot 16^p + 120\cdot 15^p + 390\cdot 14^p + 240\cdot 13^p + 540\cdot 12^p\\
&\qquad\qquad +500\cdot 11^p + 660\cdot 10^p + 600\cdot 9^p + 450\cdot 8^p + 240\cdot 7^p + 120\cdot 6^p.
\end{aligned}$$

9. Заключение

Таким образом, две серийные формулы (17) и (27) (позволяющие массово варьировать входящие в них параметры) и формула (26) порождают все производящие функции (8), (28), (30), (31). Формула (32) порождает все главные производящие функции (33).

Ссылки на современные публикации в рамках тематики см. в [3].

References

[1] V.I. Rodionov, *On enumeration of posets defined on finite set*, Siberian electr. Math. Reports, **13** (2016), 318–330. MR3506895, Zbl 1341.05127

[2] V.I. Rodionov, *On recurrence relation in the problem of enumeration of finite posets*, Siberian electr. Math. Reports, **14** (2017), 98–111. MR3610858, Zbl 1357.05061

[3] V.I. Rodionov, *On recursion relations in the problem of enumeration of posets*, Siberian electr. Math. Reports, **17** (2020), 190–207. MR4077605, Zbl 07180867

[4] Kh.Sh. Al' Dzhabri, V.I. Rodionov, *On support sets of acyclic and transitive digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **27**:2 (2017), 153–161. MR3678096, Zbl 1390.05080

[5] Kh.Sh. Al' Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of partial orders*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **4** (2013), 3–12. Zbl 1299.05169

[6] Kh.Sh. Al' Dzhabri, *The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **25**:1 (2015), 3–11. Zbl 1332.05072

[7] Kh.Sh. Al' Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of acyclic digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **25**:4 (2015), 441–452. Zbl 1364.05038

Vitalii Ivanovich Rodionov
Udmurt State University,
ul. Universitetskaya, 1,
426034, Izhevsk, Russia
E-mail address: rodionov@uni.udm.ru