УДК 517.53

В.А. Степаненко, Д.П. Федченко[1]

О следе в неассоциативной алгебре

Аннотация

В работе вводится понятие следа в неассоциативной алгебре. В качестве примера взята гиперкомплексная система октонионов (алгебра Кэли).

Введение

Алгебраические структуры с неассоциативным законом композиции давно перешли из разряда математического курьеза в отдельное активно развивающееся направление современной геометрической алгебры. Важнейшим примером здесь являются октонионы, которые образуют вещественную неассоциативную алгебру с делением, получающуюся с помощью процедуры удвоения Кэли—Диксона. В данной статье мы вводим довольно абстрактный оператор следа, см., например, [1] и изучаем поведение этого оператора в конкретной ситуации алгебры октонионов.

Умножение октонионных мнимых единиц приведено в таблице 1.

Таблица 1

	1	$\imath$	J	$\imath J$	$\mathcal{J}$	$\imath\mathcal{J}$	$J\mathcal{J}$	$\imath J\mathcal{J}$
1	1	$\imath$	J	$\imath J$	$\mathcal{J}$	$\imath\mathcal{J}$	$J\mathcal{J}$	$\imath J\mathcal{J}$
$\imath$	$\imath$	-1	$\imath J$	$-J$	$\imath\mathcal{J}$	$-\mathcal{J}$	$-\imath J\mathcal{J}$	$J\mathcal{J}$
J	J	$-\imath J$	-1	$\imath$	$J\mathcal{J}$	$\imath J\mathcal{J}$	$-\mathcal{J}$	$-\imath\mathcal{J}$
$\imath J$	$\imath J$	J	$-\imath$	-1	$\imath J\mathcal{J}$	$-J\mathcal{J}$	$\imath\mathcal{J}$	$-\mathcal{J}$
$\mathcal{J}$	$\mathcal{J}$	$-\imath\mathcal{J}$	$-J\mathcal{J}$	$-\imath J\mathcal{J}$	-1	$\imath$	J	$\imath J$
$\imath\mathcal{J}$	$\imath\mathcal{J}$	$\mathcal{J}$	$-\imath J\mathcal{J}$	$J\mathcal{J}$	$-\imath$	-1	$-\imath J$	J
$J\mathcal{J}$	$J\mathcal{J}$	$\imath J\mathcal{J}$	$\mathcal{J}$	$-\imath\mathcal{J}$	$-J$	$\imath J$	-1	$-\imath$
$\imath J\mathcal{J}$	$\imath J\mathcal{J}$	$-J\mathcal{J}$	$\imath\mathcal{J}$	$\mathcal{J}$	$-\imath J$	$-J$	$\imath$	-1

Здесь

$$\imath^2 = J^2 = \mathcal{J}^2 = -1;$$
$$Jz = z^* J;$$
$$h(q\mathcal{J}) = (qh)\mathcal{J},\ (h\mathcal{J})q = (hq^*)\mathcal{J},\ (h\mathcal{J})(q\mathcal{J}) = -q^* h,$$

где z — произвольное комплексное число, а h и q — кватернионы. Также z^* и q^* — сопряженные величины, см., например, [2].

[1] Дата: 13.03.2021

Электронная почта: fdp@bk.ru

Ключевые слова: след, неассоциативная C^*-алгебра; Keywords: trace, nonassociative C^*-algebra

1 Оператор следа

В статье мы будем рассматривать алгебры над полем $\mathbb{R}$. Алгеброй $\mathcal{A}$ мы назовем вещественное векторное пространство, наделенное бинарной операцией $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Инволюцией (операцией $*$) на $\mathcal{A}$ мы назовем линейное отображение $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ со свойствами

- $a^{**} = a$;
- $(ab)^* = b^* a^*$.

Типичными примерами инволюций служат транспонирование матриц и взятие кватернионного сопряжения.

Нормированную алгебру $\mathcal{A}$ с инволюцией назовем C^*-алгеброй, если для всех элементов $a \in \mathcal{A}$ выполняется $*$-тождество

$$\|a^* a\| = \|a^*\| \|a\|.$$

Составим из элементов C^*-алгебры $\mathcal{A}$ матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Множество таких матриц обозначим через $\mathcal{M}$. Введем на $\mathcal{M}$ закон композиции, учитывающий некоммутативность умножения в $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + b_{21}a_{12} & b_{12}a_{11} + a_{12}b_{22} \\ b_{11}a_{21} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что ассоциатор $(A, B, C) := (AB)C - A(BC)$, вообще говоря, не равен нулю.

Оператором следа в $\mathcal{M}$ назовем отображение $\mathrm{Sp} : A \mapsto a_{11} + a_{22}$. Обозначим через $[A, B] := AB - BA$ коммутатор матриц (корректнее было бы называть их квазиматрицами) A, B.

Лемма 1.

$$\mathrm{Sp}[A, B] = [a_{11}, b_{11}] - [a_{22}, b_{22}].$$

Доказательство. Перемножая матрицы, получаем выражение для коммутатора:

$$[A, B] = \begin{pmatrix} [a_{11}, b_{11}] + b_{21}a_{12} - a_{21}b_{12} & b_{12}a_{11} - a_{12}b_{11} + a_{12}b_{22} - b_{12}a_{22} \\ b_{11}a_{21} - a_{11}b_{21} + a_{22}b_{21} - b_{22}a_{21} & a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} + [b_{22}, a_{22}] \end{pmatrix}.$$

□

2 Октонионы

Если в качестве $\mathcal{A}$ рассмотреть тело кватернионов $\mathbb{H}$, а матрицы из $\mathcal{M}$ организовать следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix},$$

то мы получим структуру аналитической C^*-лупы Муфанг $\mathbb{O}$, см., например, [3]. Здесь звездочкой мы обозначили кватернионное сопряжение.

Лемма 2.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a^* & b \\ -b^* & a \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}(a + b\mathcal{J})^* &= a^* + (b\mathcal{J})^* \\ &= a^* + \mathcal{J}^* b^* \\ &= a^* - \mathcal{J} b^* \\ &= a^* - b\mathcal{J}.\end{aligned}$$

Остается понять почему $\mathcal{J}b^* = b\mathcal{J}$. Это следует из тождества $(1\mathcal{J})b = (1b^*)\mathcal{J}$ для октонионной мнимой единицы. □

Лемма 3. *В случае* $\mathcal{M} = \mathbb{O}$ *получаем, что* $\mathrm{Sp}[A, B] = 0$.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}[A, B] &= [a_{11}, b_{11}] - [a_{11}^*, b_{11}^*] \\ &= [a_{11}, b_{11}] - [b_{11}, a_{11}]^* \\ &= a_{11}b_{11} - b_{11}a_{11} - a_{11}^* b_{11}^* + b_{11}^* a_{11}^* \\ &= (a_{11}b_{11} + (a_{11}b_{11})^*) - (b_{11}a_{11} + (b_{11}a_{11})^*) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Лемма 4. *Для произвольных октонионов* $A = a + b\mathcal{J}$ *и* $X = x + y\mathcal{J}$ *ассоциатор* (A^*, X, A) *равен нулю.*

Доказательство. Вычислим сперва $(A^*X)A$:

$$\begin{aligned}(A^*X)A = &\\ &= \begin{pmatrix} a^*x + y^*b & -ya^* + bx^* \\ -xb^* + ay^* & b^*y + x^*a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^*xa + y^*ba - b^*ya^* + b^*bx^* & -ba^*x - by^*b - ya^*a^* + bx^*a^* \\ -axb^* + aay^* + b^*yb^* + x^*ab^* & xb^*b - ay^*b + a^*b^*y + a^*x^*a \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}A^*(XA) = &\\ &= \begin{pmatrix} a^* & b \\ -b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa - b^*y & -bx - ya^* \\ ay^* + x^*b^* & -y^*b + a^*x^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^*xa - a^*b^*y + ay^*b + x^*b^*b & -bxa^* - ya^*a^* - by^*b + ba^*x^* \\ -xab^* + b^*yb^* + aay^* + ax^*b^* & b^*bx + b^*ya^* - y^*ba + a^*x^*a \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

В силу того, что b^*b, $x^* + x \in \mathbb{R}$ и $[a, b]^* = [b^*, a^*]$ получаем выражение для ассоциатора

$$(A^*, X, A) = \begin{pmatrix} [y^*b, a] + [y^*b, a]^* & b[x^* + x, a^*] \\ [x^* + x, a]\, b^* & [y^*b, a] + [y^*b, a]^* \end{pmatrix},$$

которое есть тождественный ноль. □

Пусть $\|p\| = 1$, тогда преобразование $g_p : o \mapsto p^{-1}op$ является изометрией (часто говорят движением) пространства $\mathbb{R}^7$. Действительно, в силу тождества восьми квадратов,

$$\begin{aligned}
\|p^{-1}op\| &= \|p^{-1}(op)\| \\
&= \|p^{-1}\|\|op\| \\
&= \|p^{-1}\|\|o\|\|p\| \\
&= \|o\|.
\end{aligned}$$

Заметим, что при условии нормировки $p^{-1} = p^*$.

Лемма 5.

$$Sp(A^*XA) = \|A\|^2\, SpX.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}(A^*XA) &= a^*xa - a^*b^*y + ay^*b + x^*b^*b + b^*bx + b^*ya^* - y^*ba + a^*x^*a \\
&= (a^*a + b^*b)(x + x^*) + [a, y^*b] + [a, y^*b]^* \\
&= \|A\|^2 \mathrm{Sp}X.
\end{aligned}$$

□

В заключение параграфа мы хотим ввести скалярное произведение в $\mathbb{R}^7$. Рассмотрим для этого частный случай формы Киллинга. Пусть $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^8$, тогда

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= -1/2\, \mathrm{Sp}UV \\
&= -u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_7v_7,
\end{aligned}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u_0 + u_1\imath + u_2J + u_3\imath J & -u_4 - u_5\imath - u_6J - u_7\imath J \\ u_4 - u_5\imath - u_6J - u_7\imath J & u_0 - u_1\imath - u_2J - u_3\imath J \end{pmatrix},$$

а

$$V = \begin{pmatrix} v_0 + v_1\imath + v_2J + v_3\imath J & -v_4 - v_5\imath - v_6J - v_7\imath J \\ v_4 - v_5\imath - v_6J - v_7\imath J & v_0 - v_1\imath - v_2J - v_3\imath J \end{pmatrix}.$$

Если u_0 и v_0 равны нулю, то форма $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ задает скалярное произведение семимерных векторов.

3 Структурные константы алгебры Кэли

Пусть $\mathcal{A} = \mathbb{H}$, а $\mathcal{M} = \mathbb{O}$. Обозначим через $e_0 = 1, e_1 = \imath, \ldots, e_7 = \imath J\mathcal{J}$ единичные орты в $\mathbb{R}^8$, тогда

$$e_je_k = \sum_{i=0}^{7} a^i_{j,k} e_i,$$

где $j, k = 0, 1, \ldots, 7$, см., например, [4].

Скаляры $a^i_{j,k}$ будем называть структурными константами алгебры октонионов. Они определяют умножение в алгебре:

$$\left(\sum_{j=0}^{7} y^j e_j\right)\left(\sum_{k=0}^{7} z^k e_k\right) = \sum_{i=0}^{7}\left(\sum_{j,k=0,\dots,7} a^i_{j,k} y^j z^k\right) e_i.$$

Функцию y на открытом множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^8$ со значениями в $\mathbb{O}$ зададим как

$$y(x) = \sum_{j=0}^{7} y^j(x) e_j,$$

где y^j – вещественнозначная функция на $\mathcal{X}$.

Выражение

$$D = \sum_{j=0}^{7} e_j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1}$$

назовем оператором Дирака, ассоциированным с алгеброй $\mathbb{O}$, который естественно действует на $\mathbb{O}$–значные функции следующим образом:

$$Dy = \sum_{j,k=0}^{7}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} y^k\right) e_j e_k = \sum_{i=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}\left(\sum_{j=0}^{7} a^i_{j,k}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) y^k e_i.$$

Если трактовать y как столбец вещественных функций, то действие оператора D можно представить матрицей

$$A = \left(\sum_{j=0}^{7} a^i_{j,k}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{i,k=0,\dots,7}. \tag{2}$$

В системе первого порядка $Ay = 0$ количество уравнений совпадает с количеством неизвестных функций и количеством независимых переменных.

Матрица оператора Дирака

$$D = 1\frac{\partial}{\partial x^0} + \imath\frac{\partial}{\partial x^1} + J\frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \imath J\mathcal{J}\frac{\partial}{\partial x^7}$$

в $\mathbb{O}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial x^0} & -\frac{\partial}{\partial x^1} & -\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} & -\frac{\partial}{\partial x^4} & -\frac{\partial}{\partial x^5} & -\frac{\partial}{\partial x^6} & -\frac{\partial}{\partial x^7} \\
\frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^0} & -\frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^5} & \frac{\partial}{\partial x^4} & \frac{\partial}{\partial x^7} & -\frac{\partial}{\partial x^6} \\
\frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^0} & -\frac{\partial}{\partial x^1} & -\frac{\partial}{\partial x^6} & -\frac{\partial}{\partial x^7} & \frac{\partial}{\partial x^4} & \frac{\partial}{\partial x^5} \\
\frac{\partial}{\partial x^3} & -\frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^0} & -\frac{\partial}{\partial x^7} & \frac{\partial}{\partial x^6} & -\frac{\partial}{\partial x^5} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\
\frac{\partial}{\partial x^4} & \frac{\partial}{\partial x^5} & \frac{\partial}{\partial x^6} & \frac{\partial}{\partial x^7} & \frac{\partial}{\partial x^0} & -\frac{\partial}{\partial x^1} & -\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} \\
\frac{\partial}{\partial x^5} & -\frac{\partial}{\partial x^4} & \frac{\partial}{\partial x^7} & -\frac{\partial}{\partial x^6} & \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^3} & -\frac{\partial}{\partial x^2} \\
\frac{\partial}{\partial x^6} & -\frac{\partial}{\partial x^7} & -\frac{\partial}{\partial x^4} & \frac{\partial}{\partial x^5} & \frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} \\
\frac{\partial}{\partial x^7} & \frac{\partial}{\partial x^6} & -\frac{\partial}{\partial x^5} & -\frac{\partial}{\partial x^4} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^0}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix}.$$

4 Алгебра мнимых октонионов

Рассмотрим множество мнимых единичных октонионов, представимых в виде матриц

$$U = \begin{pmatrix} u_1\imath + u_2 J + u_3\imath J & -u_4 - u_5\imath - u_6 J - u_7\imath J \\ u_4 - u_5\imath - u_6 J - u_7\imath J & -u_1\imath - u_2 J - u_3\imath J \end{pmatrix},$$

для которых $\operatorname{Sp} U = 0$.

Лемма 6.

$$\begin{aligned}1/2[U,V] &= (u_2v_3 - v_2u_3 + u_4v_5 - v_4u_5 + u_7v_6 - v_7u_6)\imath \\ &+ (u_3v_1 - v_3u_1 + u_4v_6 - v_4u_6 + u_5v_7 - v_5u_7)J \\ &+ (u_1v_2 - v_1u_2 + u_4v_7 - v_4u_7 + u_6v_5 - v_6u_5)\imath J \\ &+ (u_5v_1 - v_5u_1 + u_6v_2 - v_6u_2 + u_7v_3 - v_7u_3)\mathcal{J} \\ &+ (u_1v_4 - v_1u_4 + u_3v_6 - v_3u_6 + u_7v_2 - v_7u_2)\imath\mathcal{J} \\ &+ (u_1v_7 - v_1u_7 + u_2v_4 - v_2u_4 + u_5v_3 - v_5u_3)J\mathcal{J} \\ &+ (u_2v_5 - v_2u_5 + u_3v_4 - v_3u_4 + u_6v_1 - v_6u_1)\imath J\mathcal{J}.\end{aligned}$$

Доказательство. Следует из непосредственного вычисления коммутатора мнимых октонионов. □

Заметим, что компоненты мнимого октониона в лемме 6 естественно считать компонентами векторного произведения векторов из $\mathbb{R}^7$. Очень близкой по духу (но гораздо более продвинутой с алгебраической точки зрения) нам представляется работа [5], посвященная мультиоператорным алгебрам.

Многими авторами отмечено невыполнение тождества Якоби для октонионов. Нам показалась правдоподобной гипотеза о том, что данное тождество справедливо в алгебре мнимых октонионов. Однако, компьютерные вычисления показали несостоятельность гипотезы. Мы реализовали октонионную арифметику на языке программирования python.

Сопоставим мнимому октониону A его список коэффициентов $[0, a_1, a_2, \dots, a_7]$. Написанная нами функция $\mathrm{jacobi}(A, B, C)$ получает на входе три списка и возвращает список коэффициентов октониона $[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B]$. Нами получены следующие результаты:

$$\begin{aligned}&A = [0,1,2,3,4,5,6,7],\\ &B = [0,3,3,3,3,3,3,3],\\ &C = [0,15,16,17,18,19,20,21],\\ &\mathrm{jacobi}(A,B,C) \to [0,0,0,0,0,0,0,0];\\ &A = [0,1,2,3,4,5,6,7],\\ &B = [0,3,3,3,3,3,3,3],\\ &C = [0,21,20,19,18,17,16,15],\\ &\mathrm{jacobi}(A,B,C) \to [0,0,0,0,0,0,0,0];\\ &A = [0,0,0,1,1,1,1,1],\\ &B = [0,0,2,2,2,2,2,2],\\ &C = [0,3,3,3,3,3,3,3],\\ &\mathrm{jacobi}(A,B,C) \to [0,0,0,0,72,-72,72,-72].\end{aligned}$$

На этом пути могут быть получены примеры неассоциативных алгебр Ли.

Список литературы

[1] Федосов Б. В. *Теорема периодичности в алгебре символов* //Математический сборник. – 1978. – Т. 105. – №. 3. – С. 431-462.

[2] Джекобсон Н. (1964). *Алгебры Ли.* Издательство Мир.

[3] Мальцев, А. И. (1955). *Аналитические лупы.* Математический сборник, 36(3), 569-576.

[4] Osetrova T. A., Tarkhanov N. N. *Algebraic Analysis of Differential Equations* //Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». – 2008. – Т. 1. – №. 4. – С. 391-398.

[5] Филиппов В. Т. *n-Лиевы алгебры* //Сибирский математический журнал. – 1985. – Т. 26. – №. 6. – С. 126-140.