

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 12, стр. 144–144 (2015)

DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx

УДК 519.17

MSC 05C25

## ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ $Q$ -ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ

И.Н. Белоусов

**АБСТРАКТ.** Let  $\Gamma$  be a distance-regular  $Q$ -polynomial graph of diameter 3 with strongly regular graphs  $\Gamma_2$  and  $\Gamma_3$ . Then  $\Gamma$  has intersection array  $\{t(c_2 + 1) + a_3, tc_2, a_3 + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$  where either  $a_3 = 0, t = 1$  and  $\Gamma$  is Taylor graph or  $(c_2 + 1) = a_3(a_3 + 1)/(t^2 - a_3 - 1)$ . We say that  $\Gamma$  – graph of type (I) if  $c_2 + 1$  divides  $a_3$ , graph of type (II) if  $c_2 + 1$  divides  $a_3 + 1$ , graph of type (III) if  $c_2 + 1$  does not divide  $a_3$  and  $a_3 + 1$ .

In this paper we investigate  $Q$ -polynomial extremal graphs from this classes: graphs with maximal possible  $c_2$ .

**Keywords:** distance-regular graph,  $Q$ -polynomial graph, triple intersection numbers.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $a$ , то есть, подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Положим  $[a] = \Gamma_1(a)$ ,  $a^\perp = \{a\} \cup [a]$ .

Пусть  $\Gamma$  — граф диаметра  $d$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, d\}$ . Граф  $\Gamma_i$  имеет то же самое множество вершин, и вершины  $u, w$  смежны в  $\Gamma_i$ , если  $d_\Gamma(u, w) = i$ .

Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (через  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  ( $\Gamma_{i-1}(u)$ ) с  $[w]$ . Граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений*  $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ , если значения  $b_i(u, w)$  и  $c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$  на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  для любого  $i = 0, \dots, d$ . Положим  $a_i = k - b_i - c_i$ . Заметим, что для дистанционно регулярного графа  $b_0$  — это

BELOUSOV, I.N., ON EXTREMAL  $Q$ -POLYNOMIAL DISTANCE-REGULAR GRAPHS.

© 2021 БЕЛОУСОВ И.Н..

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований-ГФЕН Китая (проект № 20-51-53013).

Поступила 28 марта 2021 г., опубликована ?? мая 2021 г.

степень графа,  $a_1$  — это степень окрестности вершины. Далее, через  $p_{ij}^l(x, y)$  обозначим число вершин в подграфе  $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$  для вершин  $x, y$ , находящихся на расстоянии  $l$  в графе  $\Gamma$ . В дистанционно регулярном графе числа  $p_{ij}^l(x, y)$  не зависят от выбора вершин  $x, y$ , обозначаются  $p_{ij}^l$  и называются числами пересечений графа  $\Gamma$  [1].

Пусть для дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  диаметра 3 графы  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  сильно регулярны. Такие графы изучались в [2].

Пусть  $\Gamma$  является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3. Если графы  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  сильно регулярны, то  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{t(c_2 + 1) + a_3, tc_2, a_3 + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ ,  $a_2 = (t - 1)(c_2 + 1)$ ,  $a_1 = a_3 + t - 1$ ,  $k_2 = kt$ ,  $k_3 = k(a_3 + 1)/(c_2 + 1)$ ,  $p_{33}^1 = a_3(a_3 + 1)/(c_2 + 1) = \mu(\Gamma_3)$  и граф  $\Gamma_3$  является псевдогеометрическим для  $pG_{t(c_2+1)}(t(c_2 + 1) + a_3, t)$ .

Положим  $a = a_3$ . Скажем, что  $\Gamma$  — граф типа (I), если  $c_2 + 1$  делит  $a$ , — граф типа (II), если  $c_2 + 1$  делит  $a + 1$ , — граф типа (III), если  $c_2 + 1$  не делит  $a$  и не делит  $a + 1$ .

В [3] получен следующий результат.

Дистанционно регулярный граф  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$  является Q-полиномиальным тогда и только тогда, когда  $(t^2 - a - 1)c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)$  и либо  $a = 0, t = 1$  и  $\Gamma$  — граф Тэйлора, либо  $(c_2 + 1) = a(a + 1)/(t^2 - a - 1)$ .

Отсюда для примитивного Q-полиномиального дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$  выполняется одно из следующих утверждений (теорема 1 из [3]):

(1)  $\Gamma$  — граф типа (I),  $a = w(c_2 + 1)$  и  $t^2 = wc_2(w + 1) + (w + 1)^2$ , либо

(i)  $w + 1 = s^2$ ,  $t^2 = s^2((s^2 - 1)c_2 + s^2)$ ,  $(s^2 - 1)c_2 + s^2$  является квадратом некоторого целого числа  $u$ ,  $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 - 1)$ ,  $t = su$ ,  $a = u^2 - 1$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{(s^2 + su - 1)(u^2 - 1)}{s^2 - 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 - 1}, u^2; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 - 1}, \frac{su^3 - su}{s^2 - 1} \right\},$$

либо

(ii)  $c_2 = s(w + 1)$ ,  $t^2 = (w + 1)^2(ws + 1)$ ,  $ws + 1$  является квадратом некоторого целого числа  $u$ ,  $c_2 = (w + 1)(u^2 - 1)/w$ ,  $t = (w + 1)u$ ,  $a = u^2w + u^2 - 1$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{(u^2w + u^2 - 1)(uw + u + w)}{w}, \frac{(u^2 - 1)u(w + 1)^2}{w}, u^2(w + 1); 1, \frac{(w + 1)(u^2 - 1)}{w}, \frac{(u^2w + u^2 - 1)u(w + 1)}{w} \right\};$$

(2)  $\Gamma$  — граф типа (II),  $a + 1 = w(c_2 + 1)$  и  $t^2 = w(w(c_2 + 1) + c_2)$ , либо

(i)  $w = s^2$ ,  $t^2 = s^2(s^2(c_2 + 1) + c_2)$ ,  $(s^2(c_2 + 1) + c_2)$  является квадратом некоторого целого числа  $u$ ,  $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 + 1)$ ,  $t = su$ ,  $a = (u^2s^2 - 1)/(s^2 + 1)$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{u^3s + u^2s^2 + us - 1}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)s^2}{s^2 + 1}; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)su}{s^2 + 1} \right\},$$

либо

(ii)  $c_2 = sw$ ,  $t^2 = w^2(sw + 1 + s)$ ,  $sw + 1 + s$  является квадратом некоторого целого числа  $u$ ,  $c_2 = (u^2 - 1)w/(w + 1)$ ,  $t = uw$ ,  $a = (u^2w^2 - 1)/(w + 1)$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{u^3w^2 + u^2w^2 + uw - 1}{w + 1}, \frac{(u^2 - 1)uw^2}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)w}{w + 1}; 1, \frac{(u^2 - 1)w}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)uw}{w + 1} \right\};$$

(3)  $\Gamma$  – граф типа (III).

В данной работе изучены экстремальные графы из этого списка (графы с максимальным возможным значением параметра  $c_2$ ).

**Предложение 1.** Пусть  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ , где  $(c_2 + 1) = a(a + 1)/(t^2 - a - 1)$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1)  $c_2 > 4$ ;
- (2) если  $c_2 + 1 = a$ , то  $\Gamma$  – граф типа (Iii),  $c_2 = (t^2 - 4)/2$ ,  $t = 2u$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{(2u^2 - 1)(2u + 1), 4(u^2 - 1)u, 2u^2; 1, 2(u^2 - 1), (2u^2 - 1)2u\}$ ;
- (3) если  $c_2 = a$ , то  $\Gamma$  – граф типа (II),  $t^2 = 2c_2 + 1 = u^2$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\left\{ \frac{u^3 + u^2 + u - 1}{2}, \frac{(u^2 - 1)u}{2}, \frac{u^2 + 1}{2}; 1, \frac{u^2 - 1}{2}, \frac{(u^2 + 1)u}{2} \right\}$ ;
- (4) число  $c_2 + 1$  не равно  $a(a + 1)$ .

В [4] доказано, что графы с массивами пересечений  $\{(2u^2 - 1)(2u + 1), 4(u^2 - 1)u, 2u^2; 1, 2(u^2 - 1), (2u^2 - 1)2u\}$  (графы из пункта (2) заключения предложения 1) не существуют.

В [5] доказано, что графы с массивами пересечений  $\left\{ \frac{u^3 + u^2 + u - 1}{2}, \frac{(u^2 - 1)u}{2}, \frac{u^2 + 1}{2}; 1, \frac{u^2 - 1}{2}, \frac{(u^2 + 1)u}{2} \right\}$  (графы из пункта (3) заключения предложения 1) не существуют.

**Предложение 2.** Пусть  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ , где  $(c_2 + 1) = a(a + 1)/(t^2 - a - 1)$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если  $c_2 + 1 = a/2$ , то  $t = 3(2w + 1)$ ,  $a = 12w^2 + 12w + 2$ ,  $c_2 = 6w^2 + 6w$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{(6w + 5)(6w^2 + 6w + 1), 18(2w + 1)(w^2 + w), 12w^2 + 12w + 3; 1, 6w^2 + 6w, 3(2w + 1)(6w^2 + 6w + 1)\}$ ;
- (2) если  $c_2 + 1 = (a + 1)/2$ , то  $t = 6w + 4$ ,  $a = 12w^2 + 16w + 5$ ,  $c_2 = 6w^2 + 8w + 2$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{(6w + 4)(6w^2 + 8w + 3) + 12w^2 + 16w + 5, (6w + 4)(6w^2 + 8w + 2), 12w^2 + 16w + 6; 1, 6w^2 + 8w + 2, (6w + 4)(6w^2 + 8w + 3)\}$ ;
- (3) число  $c_2 + 1$  не равно  $a(a + 1)/2$ .

В работе решена проблема существования графов наименьшей степени из заключения предложения 2.

**Теорема 1.** Дистанционно регулярный граф  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$  не существует.

По [6, лемма 3] граф  $\Gamma_3$  является псевдогеометрическим для  $pG_2(11, 26)$ .

**Теорема 2.** Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{203, 160, 34; 1, 16, 170\}$  не существует.

По [6, лемма 3] граф  $\bar{\Gamma}_3$  является псевдогеометрическим для  $pG_{170}(203, 10)$ .

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1

Пусть  $\Gamma$  —  $Q$ -полиномиальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$  с  $t \neq 1$ . Тогда  $t^2 - a - 1 \neq 0$  и  $c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)/(t^2 - a - 1)$ . Далее,  $c_2 + 1 = \frac{a^2 - t^2 + 2a + 1}{t^2 - a - 1} + 1 = \frac{a(a + 1)}{t^2 - a - 1}$  и  $c_2 + 1$  делит  $a(a + 1)$ .

**Лемма 1.** *Верно неравенство  $c_2 > 4$ .*

*Доказательство.* Если  $c_2 = 1$ , то  $a^2 - t^2 + 2a + 1 = t^2 - a - 1$  и  $a^2 + 3a + 2 = 2t^2$ , противоречие.

Если  $c_2 = 2$ , то  $a^2 - t^2 + 2a + 1 = 2t^2 - 2a - 2$  и  $a^2 + 4a + 3 = 3t^2$ . Отсюда  $a = 5, t = 4$ ,  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{17, 8, 6; 1, 2, 12\}$  и граф  $\bar{\Gamma}_3$  является псевдогеометрическим для  $pG_{12}(17, 4)$ . Противоречие с тем, что  $a_1 = 8$  и окрестность вершины в  $\Gamma$  — кореберно регулярный граф с параметрами  $(17, 8, 1)$ .

Если  $c_2 = 3$ , то  $a^2 - t^2 + 2a + 1 = 3t^2 - 3a - 3$  и  $a^2 + 5a + 4 = 4t^2$ . Отсюда либо  $a = 4s$  и  $4s^2 + 5s + 1 = t^2$ , либо  $a = 4s - 1$  и  $4s^2 + 3s = t^2$ . В случае  $a = 4s$  число  $(2s + 1)^2 + s$  не является квадратом, а в случае  $a = 4s - 1$  число  $(2s + 1)^2 - s - 1$  не является квадратом.

Если  $c_2 = 4$ , то  $a^2 - t^2 + 2a + 1 = 4t^2 - 4a - 4$  и  $a^2 + 6a + 5 = 5t^2$ . Отсюда либо  $a = 5s - 1$  и  $5s^2 + 4s - t^2 = 0$ , либо  $a = 5s$  и  $5s^2 + 6s + 1 - t^2 = 0$ .

В случае  $a = 5s$  имеем  $s = (-3 + \sqrt{4 + 5t^2})/5$ , а в случае  $a = 5s - 1$  имеем  $s = (-2 + \sqrt{4 + 5t^2})/5$ . Получаем решение  $a = 4, t = 3$ ,  $\Gamma$  — граф с массивом пересечений  $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$ .

В [4] доказано, что этот граф не существует. □

Если  $c_2 + 1 = a$ , то  $\Gamma$  — граф типа  $(Iii)$ ,  $c_2 = (t^2 - 4)/2$ ,  $t = 2u$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{(2u^2 - 1)(2u + 1), 4(u^2 - 1)u, 2u^2; 1, 2(u^2 - 1), (2u^2 - 1)2u\}$ .

Если  $c_2 = a$ , то  $\Gamma$  — граф типа  $(II)$ ,  $t^2 = 2c_2 + 1 = u^2$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{\frac{u^3 + u^2 + u - 1}{2}, \frac{(u^2 - 1)u}{2}, \frac{u^2 + 1}{2}; 1, \frac{u^2 - 1}{2}, \frac{(u^2 + 1)u}{2}\}$ .

Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ . Покажем, что  $c_2 + 1$  не равно  $a(a + 1)$ .

Если  $c_2 + 1 = a(a + 1)$ , то  $t^2 = a + 2$ , граф  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{ta(a + 1) + a, t(a(a + 1) - 1), a + 1; 1, a(a + 1) - 1, ta(a + 1)\}$ ,  $\Gamma_3$  имеет неглавные собственные значения  $t, -(a + 1)$ . Потому для  $\lambda = \lambda(\Gamma_3)$  выполняется равенство  $\lambda - 1 + (t + a + 1) = 2t$  и  $\lambda = t - a < 0$ , противоречие.

Предложение 1 доказано.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2

Пусть  $\Gamma$  —  $Q$ -полиномиальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$  с  $t \neq 1$ . Тогда  $t^2 - a - 1 \neq 0$  и  $c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)/(t^2 - a - 1)$ . Далее,  $c_2 + 1 = \frac{a(a + 1)}{t^2 - a - 1}$  и  $c_2 + 1$  делит  $a(a + 1)$ .

**Лемма 2.** *Если  $c_2 + 1 = a/2$ , то  $t = 3(2w + 1)$ ,  $a = 12w^2 + 12w + 2$ ,  $c_2 = 6w^2 + 6w$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{(6w + 5)(6w^2 + 6w + 1), 18(2w + 1)(w^2 + w), 12w^2 + 12w + 3; 1, 6w^2 + 6w, 3(2w + 1)(6w^2 + 6w + 1)\}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $c_2 + 1 = a/2$ . Тогда  $c_2 + 1 = \frac{a(a+1)}{t^2 - a - 1} = a/2$  и  $3a + 3 = t^2$ . Отсюда  $t = 3(2w + 1)$ ,  $a = 12w^2 + 12w + 2$ ,  $c_2 = 6w^2 + 6w$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{(6w+5)(6w^2+6w+1), 18(2w+1)(w^2+w), 12w^2+12w+3; 1, 6w^2+6w, 3(2w+1)(6w^2+6w+1)\}$ .  $\square$

**Лемма 3.** Если  $c_2 + 1 = (a + 1)/2$ , то  $t = 6w + 4$ ,  $a = 12w^2 + 16w + 5$ ,  $c_2 = 6w^2 + 8w + 2$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{(6w+4)(6w^2+8w+3)+12w^2+16w+5, (6w+4)(6w^2+8w+2), 12w^2+16w+6; 1, 6w^2+8w+2, (6w+4)(6w^2+8w+3)\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $c_2 + 1 = (a + 1)/2$ . Тогда  $c_2 + 1 = \frac{a(a+1)}{t^2 - a - 1} = (a + 1)/2$  и  $3a + 1 = t^2$ . Отсюда  $t = 6w + 4$ ,  $a = 12w^2 + 16w + 5$ ,  $c_2 = 6w^2 + 8w + 2$  и  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{(6w+4)(6w^2+8w+3)+12w^2+16w+5, (6w+4)(6w^2+8w+2), 12w^2+16w+6; 1, 6w^2+8w+2, (6w+4)(6w^2+8w+3)\}$ .  $\square$

**Лемма 4.** Число  $c_2 + 1$  не равно  $a(a + 1)/2$ .

*Доказательство.* Пусть  $c_2 + 1 = a(a + 1)/2$ . Тогда  $c_2 + 1 = \frac{a(a+1)}{t^2 - a - 1} = a(a + 1)/2$  и  $a + 3 = t^2$ . Отсюда  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{ta(a+1)/2 + a, t(a^2 + a - 2)/2, a + 1; 1, a(a + 1)/2 - 1, ta(a + 1)/2\}$ ,  $\Gamma_3$  имеет неглавные собственные значения  $t, -(a + 1)$ . Поэтому для  $\lambda = \lambda(\Gamma_3)$  выполняется равенство  $\lambda - 2 + (t + a + 1) = 2t$  и  $\lambda = t - a + 1 = t + 4 - t^2$ . Отсюда  $t = 2$ ,  $a = 1$ , противоречие.  $\square$

Предложение 2 доказано.

### 3. ТРОЙНЫЕ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

В работе используются тройные числа пересечений [5].

Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф диаметра  $d$ . Если  $u_1, u_2, u_3$  — вершины графа  $\Gamma$ ,  $r_1, r_2, r_3$  — неотрицательные целые числа, не большие  $d$ , то  $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$  — множество вершин  $w \in \Gamma$  таких, что  $d(w, u_i) = r_i$ ,  $\left[ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right] = \left| \left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\} \right|$ . Числа  $\left[ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$  называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин  $u_1, u_2, u_3$  вместо  $\left[ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$  будем писать  $[r_1 r_2 r_3]$ . К сожалению, для чисел  $[r_1 r_2 r_3]$  нет общих формул. Однако, в [5] предложен метод вычисления некоторых чисел  $[r_1 r_2 r_3]$ .

Пусть  $u, v, w$  — вершины графа  $\Gamma$ ,  $W = d(u, v)$ ,  $U = d(v, w)$ ,  $V = d(u, w)$ . Так как имеется точно одна вершина  $x = u$  такая, что  $d(x, u) = 0$ , то число  $[0jh]$  равно 0 или 1. Отсюда  $[0jh] = \delta_{jW} \delta_{hV}$ . Аналогично,  $[i0h] = \delta_{iW} \delta_{hU}$  и  $[ij0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$ .

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из  $\{u, v, w\}$ , и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей, получим:

$$\sum_{l=1}^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \sum_{l=1}^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h], \sum_{l=1}^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0] (+).$$

При этом некоторые тройки исчезают. При  $|i - j| > W$  или  $i + j < W$  имеем  $p_{ij}^W = 0$ , поэтому  $[ijh] = 0$  для всех  $h \in \{0, \dots, d\}$ .

Положим  $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$ . Если параметр Крейна  $q_{ij}^h = 0$ , то  $S_{ijh}(u, v, w) = 0$ .

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  диаметра 3 и положим  $\{ijh\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$ ,  $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ ,  $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$ ,  $[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$  и  $[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} wvu \\ hji \end{bmatrix}$ . В случаях  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$  или  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$  вычисление чисел  $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$ ,  $[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$  и  $[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} wvu \\ hji \end{bmatrix}$  (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

4. ГРАФ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ  $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$ .

Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$ . Тогда  $\Gamma$  имеет  $1 + 143 + 1287 + 297 = 1728$  вершин, спектр  $143^1, 35^{143}, -1^{1287}, -13^{297}$  и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 143 & 1287 & 297 \\ 1 & 35 & -9 & -27 \\ 1 & -1 & -9 & 9 \\ 1 & -13 & 39 & -27 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 5.** Числа пересечений графа  $\Gamma$  равны

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 34, p_{21}^1 = 108, p_{32}^1 = 243, p_{22}^1 = 936, p_{33}^1 = 54; \\ p_{11}^2 &= 12, p_{12}^2 = 104, p_{13}^2 = 27, p_{22}^2 = 966, p_{23}^2 = 216, p_{33}^2 = 54; \\ p_{12}^3 &= 117, p_{13}^3 = 26, p_{22}^3 = 936, p_{23}^3 = 234, p_{33}^3 = 36. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Прямые вычисления. □

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  графа  $\Gamma$  и положим  $\{ijh\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$ ,  $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ .

Положим  $\Omega = \Gamma_3(u)$ ,  $\Sigma = \Omega_2$ . Тогда  $\Sigma$  — регулярный граф степени 234 на 297 вершинах.

**Лемма 6.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} (1) \quad & [122] = -r_6/2 + 117, [123] = [132] = r_6/2, [133] = -r_6/2 + 26; \\ (2) \quad & [211] = -r_6/6 + 36, [212] = [221] = r_6/6 + 81, [222] = 4r_6/3 + 612, [223] = \\ & [232] = -3r_6/2 + 243, [233] = 3r_6/2 - 9; \\ (3) \quad & [311] = r_6/6 - 2, [312] = [321] = -r_6/6 + 27, [322] = -5r_6/6 + 207, [323] = \\ & [332] = r_6, [333] = -r_6 + 36, \\ & \text{где } r_6 \in \{12, 18, \dots, 36\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Упрощение формул (+). □

По лемме 5 имеем  $177 \leq [322] = -5r_6/6 + 207 \leq 197$ .

**Лемма 7.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 2$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} (1) \quad & [122] = -r_{15} + 117, [123] = [132] = r_{15}, [133] = -r_{15} + 26; \\ (2) \quad & [211] = (r_{15} - r_{16})/4 + 36, [212] = [221] = r_{16}, [222] = 4r_{15} - 4r_{16} + 936, \\ & [223] = [232] = -4r_{15} + 3r_{16}, [233] = (15r_{15} - 9r_{16})/4 + 153; \end{aligned}$$

(3)  $[311] = (r_{15} + r_{16})/4 - 24$ ,  $[312] = [321] = -r_{16} + 104$ ,  $[322] = -3r_{15} + 4r_{16} - 87$ ,  
 $[331] = (-r_{15} + 3r_{16})/4 - 54$ ,  $[323] = [332] = 3r_{15} - 3r_{16} + 216$ ,  $[333] = (-11r_{15} + 9r_{16})/4 - 126$ ,

где  $r_{15} \in \{12, 13, \dots, 26\}$ ,  $r_{16} \in \{78, 79, \dots, 98\}$  и  $r_{15} + r_{16}$  делится на 4.

*Доказательство.* Упрощение формул (+).  $\square$

По лемме 6 имеем  $147 \leq [322] = -3r_{15} + 4r_{16} - 87 \leq 269$ . Так как  $\{v, w\} \cup \Sigma(v) \cup \Sigma(w)$  содержит  $470 - [322]$  вершин, то  $173 \leq [322] \leq 233$ .

**Лемма 8.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

(1)  $[122] = (r_{17} + 468)/7$ ,  $[123] = [132] = (-r_{17} + 351)/7$ ,  $[133] = (r_{17} - 169)/7$ ;

(2)  $[213] = (-r_{17} + 351)/7$ ,  $[212] = [221] = (r_{17} + 468)/7$ ,  $[222] = (-8r_{17} + 6084)/7$ ,  $[223] = [232] = r_{17}$ ,  $[233] = (-6r_{17} + 1287)/7$ ;

(3)  $[313] = [331] = (r_{17} - 169)/7$ ,  $[312] = [321] = (-r_{17} + 351)/7$ ,  $[322] = r_{17}$ ,  
 $[323] = [332] = (-6r_{17} + 1287)/7$ ,  $[333] = (5r_{17} - 873)/7$ ,

где  $r_{17} \in \{176, 183, \dots, 211\}$ .

*Доказательство.* Упрощение формул (+).  $\square$

По лемме 7 имеем  $176 \leq [322] = r_{17} \leq 211$ .

Пусть  $d(u, v) = 3$ . Подсчитаем число пар  $e$  вершин  $y, z$  на расстоянии 3, где  $y \in \{uv\}$ ,  $z \in \{uv\}$ . Напомним, что  $p_{32}^3 = 234$ ,  $p_{33}^3 = 36$ , по лемме 7 имеем  $[333] = (5r_{17} - 873)/7$ , где  $r_{17} \in \{176, 183, \dots, 211\}$ . Отсюда  $36 \leq e = \sum_i r_{33}^i \leq 36 \cdot 26 = 8736$ . С другой стороны, по лемме 6 имеем  $[323] = 3r_{15} - 3r_{16} + 216$ , где  $r_{15} \in \{12, 13, \dots, 26\}$ ,  $r_{16} \in \{78, 79, \dots, 98\}$  и  $r_{15} + r_{16}$  делится на 4. Отсюда  $36 \leq e = 3 \sum_i (r_{15}^i - r_{16}^i) + 50544 \leq 8736$ ,  $13936 \leq \sum_i (r_{16}^i - r_{15}^i) \leq 16836$  и  $59.55 \leq \sum_i (r_{16}^i - r_{15}^i)/234 \leq 71.95$

Подсчитаем число ребер  $g$  между  $\Sigma(v)$  и  $\Sigma_2(v)$ . Имеем  $p_{13}^3 = 26$ ,  $p_{33}^3 = 36$  и ввиду лемм 5, 7 имеем  $10974 = 26 \cdot 177 + 36 \cdot 176 \leq g \leq 26 \cdot 197 + 36 \cdot 211 = 12718$ . С другой стороны,  $g = 234(233 - \lambda)$ , где  $\lambda$  – среднее значение параметра  $\lambda(\Sigma)$ , поэтому  $46.897 \leq 233 - \lambda \leq 54.351$  и  $178.649 \leq \lambda \leq 186.103$ .

Наконец, по лемме 6 имеем  $[322] = -3r_{15} + 4r_{16} - 87$ , поэтому  $178.649 \leq \sum_i (3r_{16}^i - 3r_{15}^i + r_{16}^i)/234 - 87 \leq 186.103$ . Противоречие с тем, что  $211.98 \leq 3 \sum_i (r_{16}^i - r_{15}^i)/234 \leq 215.85$ .

Теорема 1 доказана.

##### 5. ГРАФ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{203, 160, 34; 1, 16, 170\}$ .

Пусть  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{203, 160, 34; 1, 16, 170\}$ . Тогда  $\Gamma$  имеет  $1 + 203 + 2030 + 406 = 2640$  вершин, спектр  $203^1, 43^{203}, -1^{2030}, -17^{406}$  и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 203 & 2030 & 406 \\ 1 & 43 & -10 & -34 \\ 1 & -1 & -10 & 10 \\ 1 & -17 & 50 & -34 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 9.** Числа пересечений графа  $\Gamma$  равны

$p_{11}^1 = 42$ ,  $p_{21}^1 = 160$ ,  $p_{32}^1 = 340$ ,  $p_{22}^1 = 1530$ ,  $p_{33}^1 = 66$ ;

$p_{11}^2 = 16$ ,  $p_{12}^2 = 153$ ,  $p_{13}^2 = 34$ ,  $p_{22}^2 = 1570$ ,  $p_{23}^2 = 306$ ,  $p_{33}^2 = 66$ ;

$p_{12}^3 = 170$ ,  $p_{13}^3 = 33$ ,  $p_{22}^3 = 1530$ ,  $p_{23}^3 = 330$ ,  $p_{33}^3 = 42$ .

*Доказательство.* Прямые вычисления.  $\square$

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  графа  $\Gamma$  и положим  $\{ijh\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$ ,  $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ .

Положим  $\Omega = \Gamma_3(u)$ ,  $\Sigma = \Omega_2$ . Тогда  $\Sigma$  — регулярный граф степени 330 на 406 вершинах.

**Лемма 10.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1)  $[122] = 4r_{23}/7 + 146$ ,  $[123] = [132] = -4r_{23}/7 + 24$ ,  $[133] = 4r_{23}/7 + 9$ ;
- (2)  $[211] = 16r_{23}/77 + 414/11$ ,  $[212] = [221] = -16r_{23}/77 + 1456/11$ ,  $[222] = -15r_{23}/11 + 12360/11$ ,  $[223] = [232] = 11r_{23}/7 + 274$ ,  $[233] = -11r_{23}/7 + 56$ ;
- (3)  $[311] = -16r_{23}/77 + 48/11$ ,  $[312] = [321] = 16r_{23}/77 + 304/11$ ,  $[322] = 61r_{23}/77 + 2864/11$ ,  $[323] = [332] = -r_{23} + 42$ ,  $[333] = r_{23}$ ,  
где  $r_{23} \in \{0, 7, 14, 21\}$ .

*Доказательство.* Упрощение формул (+).  $\square$

По лемме 9 имеем  $261 \leq [322] = 61r_{23}/77 + 2864/11 \leq 277$ .

**Лемма 11.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 2$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1)  $[122] = (11r_{32} - 15r_{33})/4 - 514$ ,  $[123] = [132] = (-11r_{32} + 15r_{33})/4 + 684$ ,  
 $[133] = (11r_{32} - 15r_{33}r_{50})/4 - 651$ ;
- (2)  $[211] = 11r_{32} - 15r_{33}$ ,  $[212] = [221] = (-149r_{32} + 225r_{33})/44 + 10260/11$ ,  
 $[213] = [231] = (7r_{32} - 11r_{33})/4 - 386$ ,  $[222] = (105r_{32} - 225r_{33})/44 + 6570/11$ ,  
 $[223] = [232] = r_{32}$ ,  $[233] = (-11r_{32} + 11r_{33})/4 + 716$ ;
- (3)  $[311] = (-18r_{32} + 26r_{33} + 4320)/11$ ,  $[312] = [321] = (149r_{32} - 225r_{33})/44 - 8577/11$ ,  
 $[313] = [331] = (-7r_{32} + 11r_{33})/4 + 420$ ,  $[322] = (-113r_{32} + 195r_{33})/22 + 16354/11$ ,  
 $[323] = [332] = (7r_{32} - 15r_{33})/4 - 378$ ,  $[333] = r_{33}$ ,  
где  $r_{32} \in \{237, 238, \dots, 289\}$ ,  $r_{33} \in \{0, 1, \dots, 34\}$ ,  $r_{32} - r_{33}$  делится на 4,  $r_{32} + r_{33} + 2$  делится на 11.

*Доказательство.* Упрощение формул (+).  $\square$

По лемме 10 имеем  $3 \leq [322] = (-113r_{32} + 195r_{33})/22 + 16354/11 \leq 571$ . Так как  $\{v, w\} \cup \Sigma(v) \cup \Sigma(w)$  содержит  $660 - [322]$  вершин, то  $254 \leq [322] \leq 329$ .

**Лемма 12.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

- (1)  $[122] = (2r_{34} + 1275)/13$ ,  $[123] = [132] = (-2r_{34} + 935)/13$ ,  $[133] = (2r_{34} - 506)/13$ ;
- (2)  $[212] = [221] = (2r_{34} + 1275)/13$ ,  $[213] = [231] = (-2r_{34} + 935)/13$ ,  $[222] = (-15r_{34} + 18615)/13$ ,  
 $[223] = [232] = r_{34}$ ,  $[233] = (-11r_{34} + 3355)/13$ ;
- (3)  $[312] = [321] = (-2r_{34} + 935)/13$ ,  $[313] = [331] = (2r_{34} - 506)/13$ ,  $[322] = r_{34}$ ,  
 $[323] = [332] = (-11r_{34} + 3355)/13$ ,  $[333] = (9r_{34} - 2316)/13$ ,  
где  $r_{34} \in \{266, 279, 292, 305\}$ .

*Доказательство.* Упрощение формул (+).  $\square$

По лемме 11 имеем  $266 \leq [322] = r_{34} \leq 305$ .

Пусть  $d(u, v) = 3$ . Подсчитаем число пар  $e$  вершин  $y, z$  на расстоянии 2, где  $y \in \begin{Bmatrix} uv \\ 32 \end{Bmatrix}$ ,  $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 33 \end{Bmatrix}$ . Напомним, что  $p_{32}^3 = 330$ ,  $p_{33}^3 = 42$ . С одной стороны, по

лемме 11 имеем  $[322] = r_{34}$ , где  $r_{34} \in \{266, 279, 292, 305\}$ , и  $11172 \leq e = \sum_i r_{34}^i \leq 12810$ . С другой стороны, по лемме 10 имеем  $[332] = (7r_{32} - 15r_{33})/4 - 378$ , где  $r_{32} \in \{237, 238, \dots, 289\}$ ,  $r_{33} \in \{0, 1, \dots, 34\}$ ,  $r_{32} - r_{33}$  делится на 4 и  $r_{32} + r_{33} - 20$  делится на 11. Отсюда  $11172 \leq e = \sum_i (7r_{32}^i - 15r_{33}^i)/4 - 124740 \leq 12810$ ,  $135912 \leq \sum_i (7r_{32}^i - 15r_{33}^i) \leq 137550$  и  $411.85 \leq \sum_i (7r_{32}^i - 15r_{33}^i)/330 \leq 416.82$ . Противоречие с тем, что  $1149 = 7 \cdot 237 - 15 \cdot 34 \leq 7r_{32} - 15r_{33}$ .

Теорема 2 доказана.

## REFERENCES

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [2] M.S. Nirova, *On distance-regular graphs  $\Gamma$  with strongly regular graphs  $\Gamma_2$  and  $\Gamma_3$* , Sib. electron. math. reports, **15** (2018), 175–185.
- [3] Belousov I.N., Makhnev A.A., Nirova M.S. *On  $Q$ -polynomial distance-regular graphs  $\Gamma$  with strongly regular graphs  $\Gamma_2$  and  $\Gamma_3$* , Sib. electron. math. reports, **16** (2019), 1358–1365.
- [4] A. Jurishich, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65** (2012), 29–47.
- [5] K. Coolsaet, A. Jurishich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Series A, **115** (2008), 1086–1095.
- [6] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *Distance-regular Shilla graphs with  $b_2 = c_2$* , Matem. Notes., **103:5** (2018), 730–748.

IVAN NIKOLAEVICH BELOUSOV  
 N.N. KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS OF THE URAL BRANCH OF  
 THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,  
 STR. S.KOVALEVSKAYA, 16,  
 620990, YEKATERINBURG, RUSSIA  
*Email address:* i\_belousov@mail.ru