S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 510.5

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 03D45

РАВНОМЕРНЫЕ m-ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И НУМЕРАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н.Х. КАСЫМОВ, Р.Н. ДАДАЖАНОВ, С.К. ДЖАВЛИЕВ

Abstract. We study some of the algorithmic properties of the enumerations of classical algebraic systems.

Keywords: uniform m-equivalence, group, lattice, field.

Введение

В данной статье мы обсуждаем алгоритмические свойства нумераций классических систем, таких как группы, решетки, кольца и поля.

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1, 2].

Под словом эквивалентность понимается эквивалентность на множестве натуральных чисел ω.

Для нумерации ν через $ker(\nu)$ будем обозначать нумерационную эквивалентность, которую, для краткости, назовем ядром ν.

Определение 1. *Универсальная алгебра называется представимой над эквивалентностью η, если существует ее нумерация с ядром η.*

В работе рассматриваются, в основном, вопросы существования представлений классических алгебраических систем над эквивалентностями различных типов.

Kasymov N.Kh., Dadazhanov R.N., Zhavliev S.K., Uniform m-equivalencies and enumerations of classical systems.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

Определение 2. *Эквивалентность η называется m-эквивалентностью (равномерной m-эквивалентностью), если существует такое семейство F вычислимых функций (перечислимое семейство F вычислимых функций), индуцирующих перестановки фактор-множества ω/η, что для всякой пары натуральных чисел x, y найдется такая функция $f \in F$, которая m-сводит класс $\{x\}/\eta$ к классу $\{y\}/\eta$.*

Тривиальными примерами равномерных m-эквивалентностей являются разрешимые эквивалентности.

1. Группы

Теорема 1. *Если (G, ν) – нумерованная группа, то ядро $ker(\nu)$ ее нумерации – равномерная m-эквивалентность.*

Доказательство. Пусть $a, b \in G, a = \nu(k), b = \nu(l)$. Обозначим через η ядро $ker(\nu)$. Очевидно, что отображение $\pi_{a,b} = \lambda x.[ba^{-1}x]$ – перестановка на основном множестве группы G, переводящая элемент a в b. Рассмотрим вычислимую функцию $f = \lambda x.[l * (k)^{-1} * x]$, где $*$ обозначает вычислимую операцию, представляющую в нумерации ν операцию умножения в группе G, а $()^{-1}$ – вычислимую операцию, поддерживающую операцию взятия обратного элемента в группе G. Ясно, что функция f поддерживает перестановку $\pi_{a,b}$ на ν-номерах (т.е. $\pi_{a,b}\nu = \nu f$) и m-сводит класс $\{k\}/\eta$ к классу $\{l\}/\eta$. Чтобы показать равномерность достаточно сопоставить каждой паре $\langle k, l\rangle \in \omega^2$ функцию $f_{k,l} = \lambda x.[l * (k)^{-1} * x]$. □

Замечание 1. Мы работаем в сигнатуре $\langle \cdot, ^{-1} \rangle$, которая обеспечивает равномерность. В сигнатуре с одной бинарной групповой операцией $\langle \cdot \rangle$ теорема 1 верна в той части, которая утверждает, что ядро нумерации – m-эквивалентность.

Отметим, что вычислимые перестановки, определяемые семейством F, не обязательно образуют группу, т.к. обратная перестановка может и не поддерживаться вычислимой на номерах функцией. Для позитивных нумераций это множество будет группой. Но уже в случае негативных нумераций можно указать вычислимые перестановки, обратные к которым вычислимыми не будут и потому эта оценка неулучшаема в иерархии Клини-Мостовского (см. [3]).

В обзоре [4] ставился вопрос: "существует ли конечно-определенная алгебра (в частности группа), нумерационная эквивалентность стандартной нумерации которой предполная?".

Следствие 1. *Ни над какой предполной эквивалентностью не представима никакая группа.*

Доказательство. Перестановка $\pi_{a,b}$ на G из теоремы 1 имеет неподвижную точку тогда и только тогда, когда $a = b$ (в этом случае она будет единичной), т.е. соответствующая представляющая вычислимая функция в случае $a \neq b$ не имеет неподвижных точек по модулю ядра представления и потому ядро не может быть предполной эквивалентностью. □

Таким образом, не только не существует конечно-определенной группы с предполным позитивным ядром (т.к. необходимым условием конечной определенности алгебры является позитивность ее стандартной нумерации), но и предполно нумерованной группы любой алгоритмической сложности.

Теорема 1 порождает два естественных вопроса:

– насколько велик класс равномерных m-эквивалентностей?

– является ли условие равномерности для m-эквивалентности достаточным для представимости над ней группы?

Семейство F вычислимых функций назовем m-сводящим для эквивалентности η, если оно удовлетворяет условиям определения 2.

Пусть f – вычислимая перестановка на ω. Обозначим $F_f = \{f^n | n \in Z\}$, где Z множество целых чисел и $f^0(x) = x$ $(x \in \omega), f^{-k} = (f^k)^{-1}$ $(k \in \omega)$. Покажем, что класс равномерных m-эквивалентностей довольно велик.

Предложение 1. *Для любой вычислимой перестановки f без конечных циклов, разбивающей ω на бесконечное число орбит, существует континуум таких равномерных m-эквивалентностей, для которых вычислимое семейство F_f является m-сводящим.*

Доказательство. По условию перестановка f разбивает ω на множество орбит $O_f(x) = \{f^k(x) | k \in Z\}$. Определим $a_0 = 0, a_{n+1} = \min\{y | y \notin O_f(a_0) \cup \dots \cup O_f(a_n)\}$ (т.е. a_k – наименьшее число из своей орбиты) и $\leqslant_f$-упорядочим f-орбиты так, что все элементы орбиты a_i предшествуют всем элементам орбиты a_j, если $a_i < a_j$. Внутри каждой орбиты полагаем $x \leqslant_f y \Leftrightarrow \exists k \geq 0 (f^k(x) = y)$. Пусть $A = \{a_0 < a_1 < \dots\}$. Построим эквивалентность η_0, задав ее классами η_0-эквивалентности следующим образом: $M_0 = A, M_{n+1} = f^{n+1}M_0, M_{-n-1} = f^{-n-1}M_0, n \in \omega$. Очевидно, что вычислимое семейство F_f является m-сводящим для η_0. Будем строить семейство эквивалентностей, используя бинарное дерево, исходя из η_0. Неформально, эквивалентности $\eta_{01}, \eta_{10}, \eta_{11}$ строятся из $\eta_0 = \eta_{00}$ путем "сдвига" всех f-орбит относительно f-орбиты a_0 на одну позицию вправо, если в индексе η стоит 1, т.е. $a_0 = a_1 \wedge a_1 = f^{-1}(a_2)$ $(\mathrm{mod}\ \eta_{01})$ и соответствующей "склейкой" всех образов и прообразов относительно f. Аналогично, $a_0 = f^{-1}(a_1)a_1 \wedge a_1 = a_2$ $(\mathrm{mod}\ \eta_{10})$ и $a_0 = f^{-1}(a_1) \wedge a_1 = f^{-1}(a_2)$ $(\mathrm{mod}\ \eta_{11})$. Таким образом, если орбита $O_f(a_k)$ сдвигается относительно a_{k-1} на одну позицию вправо, то все орбиты $O_f(a_l), l > k$ также сдвигаются ровно на одну позицию вправо. Опишем эту конструкцию строго.

Пусть $E = \{\overline{\varepsilon} = \varepsilon_0\varepsilon_1 \dots | \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$ – множество всех счетно-бесконечных последовательностей из нулей и единиц и $\overline{\varepsilon} \in E$. Построим отображение из $\varphi : E \longrightarrow \Theta$, где Θ – множество всех эквивалентностей на ω так, что для $i \in \omega$

$$\begin{cases} \varepsilon_i = 0 \Rightarrow a_i = a_{i+1} \quad (\mathrm{mod}\ \varphi(\overline{\varepsilon})), \\ \varepsilon_i = 1 \Rightarrow a_i = f^{-1}(a_{i+1}) \quad (\mathrm{mod}\ \varphi(\overline{\varepsilon})). \end{cases}$$

При этом, если $x = y$ $(\mathrm{mod}\ \varphi(\overline{\varepsilon}))$, то все соответствующие f-образы и f-прообразы x, y также будут равны по модулю $\varphi(\overline{\varepsilon})$ и $\varphi(\overline{\varepsilon})$ – наименьшая эквивалентность с этим свойством.

На языке ε-последовательностей $\eta_0 = \varphi(00\dots), \eta_1 = \varphi(10\dots)$ и т.д. Для эквивалентности $\varphi(11\dots)$ (в последовательности все единицы) $\forall i \in \omega(a_i = f^{-1}(a_{i+1})$ $(\mathrm{mod}\ \varphi(11\dots)))$.

Покажем, что φ инъективно. Если $\overline{\varepsilon}^1 \neq \overline{\varepsilon}^2$, то существует наименьшее k, для которого $\varepsilon_k^1 \neq \varepsilon_k^2$. Пусть, для определенности $\varepsilon_k^1 = 0, \varepsilon_k^2 = 1$. Тогда $\langle a_k, a_{k+1} \rangle \in \overline{\varepsilon}^1 \setminus \overline{\varepsilon}^2$. Аналогично рассматривается случай $\varepsilon_k^1 = 1, \varepsilon_k^2 = 0$.

По построению семейство F_f является m-сводящим для любой эквивалентности из $\{\varphi(\overline{\varepsilon}) | \overline{\varepsilon} \in E\}$. Из инъективности φ следует континуальность последнего множества. $\square$

Предложение 2. *Если все классы эквивалентности η разрешимы, то она является m-эквивалентностью.*

Доказательство. Если классы $\alpha = \{p\}/\eta$ и $\beta = \{q\}/\eta$ совпадают, то m-сведение осуществляет тождественная функция. Если же они различны, то вычислимая функция, отображающая класс α в точку q, класс β в точку p и тождественная на $\omega \setminus (\alpha \cup \beta)$ – искомая. $\square$

Предложение 3. *Если равномерная m-эквивалентность имеет хотя бы один разрешимый класс, то она разрешима.*

Доказательство. Пусть η – равномерная m-эквивалентность и η-класс β разрешим. По условию существует перечислимое семейство F m-сводящих функций. Очевидно, $x = y \pmod{\eta} \Leftrightarrow \exists f \in F[f(x) \in \beta \wedge f(y) \in \beta]$, т.е. η позитивна. Аналогично, $x \neq y \pmod{\eta} \Leftrightarrow \exists f \in F[f(x) \in \beta \wedge f(y) \notin \beta]$, что обеспечивает негативность η. $\square$

Следствие 2. *Если неразрешимая эквивалентность имеет хотя бы один разрешимый смежный класс, то над ней не представима никакая группа*

Следствие 3. *Если равномерная m-эквивалентность неразрешима, то все ее смежные классы невычислимы.*

Пусть η – эквивалентность. Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η-замкнутым, если $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \Rightarrow y \in \alpha$.

Определение 3. *Эквивалентность η называется вычислимо отделимой (отделимой), если для всяких различных по модулю η натуральных чисел x, y существует такое η-замкнутое вычислимое (перечислимое) множество α, что $x \in \alpha$ и $y \notin \alpha$ $((x \in \alpha \wedge y \notin \alpha) \vee (x \notin \alpha \wedge y \in \alpha))$.*

Рассмотрим следующие примеры эквивалентностей (см. [1], с.58, 174-175):
(1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1\rangle, \langle 2x+1, 2x\rangle | x \in \alpha\} \cup id\,\omega, \alpha \subseteq \omega$;
(2) $\eta_\alpha = \{\langle x, y\rangle | x, y \in \alpha\} \cup id\,\omega, \alpha \subseteq \omega$;
(3) $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle | \gamma_x \triangle \gamma_y \subseteq \alpha\}, \alpha \subseteq \omega$ (γ – каноническая нумерация конечных множеств).

Предложение 4. *Для всякого $\alpha \subseteq \omega$ имеет место:*

1. η^α – m-эквивалентность. При этом, ее равномерность равносильна разрешимости α.

2. η_α является m-эквивалентностью тогда и только тогда, когда α разрешимо.

Доказательство. 1. По предложению 2 для всякого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность η^α – m-эквивалентность, а по предложению 3 ее равномерность влечет разрешимость.

2. Очевидно, что для η_α вычислимая отображаемость класса α в любой другой класс требует разрешимости α, т.к. все η_α-классы (кроме, возможно, класса α) одноэлементны. $\square$

Следствие 4. *Над η^α (как и над η_α) представима группа тогда и только тогда, когда α разрешимо.*

Предложение 5. *Всякая пара смежных классов ядра неразрешимой позитивной нумерации любой группы является вычислимо изоморфной (т.е. для любой пары смежных классов ядра существует вычислимая перестановка на ω, индуцирующая перестановку фактор-множества ω/η, переводящая один из этих классов на другой). При этом, существует равномерно эффективно зависящая от x, y процедура построения характеристического индекса вычислимого изоморфизма на ω, являющегося перестановкой на ω/η и переводящего $\{x\}/\eta$ в $\{y\}/\eta$.*

Доказательство. Пусть η – ядро неразрешимой позитивной нумерации группы. Согласно теореме 1 η – равномерная m-эквивалентность, а по следствию 3 все η-классы невычислимы. Для данных x, y найдем перестановку $f_0 \in F$, осуществляющую m-сведение $\{x\}/\eta$ к $\{y\}/\eta$ и построим инъективную функцию g_0, совпадающую с f_0 по модулю η, следующим образом:

Шаг 0. $g_0(0) = f_0(0)$;

Шаг $s+1$. Если $f_0(s+1) \notin \{g_0(0), g_0(1), \ldots, g_0(s)\}$, то определим $g_0(s+1) = f_0(s+1)$. В противном случае, перечисляя класс $\{f_0(s+1)\}/\eta$ ищем первое z отличное от всех $g_0(i)$ $(0 \leqslant i \leqslant s)$ и η-эквивалентное $f_0(s+1)$ (а такое z обязательно найдется в силу бесконечности класса $\{f_0(s+1)\}/\eta$) и полагаем $g_0(s+1) = z$. Конец шага $s+1$.

Следовательно, класс $\{x\}/\eta$ 1-сводится к $\{y\}/\eta$ функцией g_0. Аналогично, найдем $f_1 \in F$, m-сводящую $\{y\}/\eta$ к $\{x\}/\eta$ и построим для нее соответствующую инъективную вычислимую функцию g_1, совпадающую с f_1 по модулю η. Тогда g_1 1-сводит $\{y\}/\eta$ к $\{x\}/\eta$ и, таким образом, классы $\{x\}/\eta$ и $\{y\}/\eta$ лежат в одной 1-степени.

Теперь, опираясь на челночный метод доказательства теоремы Майхилла о вычислимой изоморфности 1-эквивалентных множеств, который в нашем случае существенно упрощает позитивная бесконечность всех η-классов, будем строить по шагам конечные множества соответствий вида $\{\langle u_0, v_0\rangle, \ldots, \langle u_s, v_s\rangle\}$ так, что $u_i = u_j \pmod{\eta} \Leftrightarrow v_i = v_j \pmod{\eta}$ и $\forall n \in \omega \exists k, l (n = u_k \wedge n = v_l)$, используя на четных шагах функцию g_0 и на нечетных – g_1. Детали опускаем.

Очевидно, что все построения, приведенные в данном доказательстве равномерно зависят от x, y. □

В заключении раздела отметим, что в случае существования группы, представимой над эквивалентностью η, имеется много различных способов задания группы над η. В частности, любой класс эквивалентности может быть интерпретирован как единичный элемент подходящей группы, представимой над η.

Предложение 6. *Если над η представима группа, то для любого η-класса существует такое представление над η подходящей группы, для которого данный класс будет единицей.*

Доказательство. Пусть задана группа $\mathfrak{G} = \langle G; \cdot, ^{-1} \rangle$ с единицей e. Определим трансляцию $\varphi_d = \lambda x.[x \cdot d]$, где d – произвольный фиксированный элемент $d \neq e$. Очевидно, что трансляция φ_d биективна на G. На множестве G определим некоторую структуру с одной бинарной $*$ и одной унарной операцией $[]^{-1*}$ следующим образом: $a * b = ad^{-1}b$; $[a]^{-1*} = da^{-1}d$. Тогда $\mathfrak{G}^* = \langle G; *, []^{-1*}\rangle$ – группа с единицей d, изоморфная $\mathfrak{G}$, причем φ_d осуществляет изоморфизм из $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}^*$. Действительно, по определению $a*b = ad^{-1}b$, но $\varphi_d^{-1}(a) = ad^{-1}, \varphi_d^{-1}(b) =$

bd^{-1} и $\varphi_d((ad^{-1})(bd^{-1})) = ad^{-1}bd^{-1}d = ad^{-1}b = a*b$. Аналогично, т.к. $\varphi_d^{-1}(a) = ad^{-1}$, то $\varphi_d((ad^{-1})^{-1}) = \varphi_d(da^{-1}) = da^{-1}d = [a]^{-1*}$.

Пусть группа $\langle G; \cdot\rangle$ с единицей e представима над η, т.е. имеет такую нумерацию ν, ядро которой есть η. Зафиксируем любой отличный от единицы элемент $d \in G$ и некоторые ν-номера этого элемента и обратного к d элемента, скажем $\nu(n_0) = d, \nu(n_1) = d^{-1}$. Теперь определим вычислимую функцию $f_d = \lambda x.[x \cdot n_0]$, зададим нумерацию ν_d основного множества группы $\langle G; \cdot\rangle$ такую, что $\nu_d = \nu f_d$, и определим вычислимые операции $* : \nu_d(x)*\nu_d(y) = \nu_d(x \cdot n_1 \cdot y)$ и $[\nu_d(x)]^{-1*} = \nu(n_0 \cdot x^{-1} \cdot n_0)$. Очевидно, что d – единица группы $\langle G; *\rangle$, заданной нумерацией ν_d с ядром η. □

2. Вычислимо прошиваемые множества

Рассмотрим более подробно равномерные m-эквивалентности, всякие пары смежных классов которых вычислимо изоморфны (т.е. переводятся друг в друга вычислимыми перестановками на ω).

Определение 4. *Множество назовается вычислимо прошиваемым, если существует вычислимая перестановка без конечных циклов с бесконечным числом орбит, в каждой из которых содержится ровно один элемент этого множества.*

Заметим, что согласно определению вычислимо прошиваемое множество как бесконечно, так и кобесконечно.

Если множество α содержит ровно по одному элементу в каждой орбите вычислимой перестановки без циклов f с бесконечным числом орбит, то будем говорить, что f прошивает α (или, что α прошивается f). Для множества α, прошиваемого вычислимой перестановкой f, через $\eta_{\alpha,f}$ обозначим эквивалентность

$$x = y \pmod{\eta_{\alpha,f}} \Leftrightarrow \exists n \in Z(f^n(x) \in \alpha \wedge f^n(y) \in \alpha),$$

которая очевидно является равномерной m-эквивалентностью, любая пара смежных классов которой вычислимо изоморфна.

Предложение 7. *Всякая вычислимая перестановка без циклов с бесконечным числом орбит является прошивающей для континуума множеств.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 1. □

Предложение 8. *Всякое вычислимо прошиваемое множество является смежным классом подходящей равномерной m-эквивалентности, всякая пара смежных классов которой вычислимо изоморфна.*

Доказательство. Пусть α прошивается вычислимой перестановкой f. Тогда семейство множеств $\{f^n\alpha | n \in Z\}$ – классы однозначно определенной равномерной m-эквивалентности $\eta_{\alpha,f}$. □

Используя неэффективную диагонализацию легко показать существование вычислимо непрошиваемых множеств.

Предложение 9. *Если перечислимое множество α прошивается вычислимой функцией f, то эквивалентность $\eta_{\alpha,f}$ разрешима.*

Доказательство. Действительно, $x = y \pmod{\eta_{\alpha,f}} \Leftrightarrow \exists n \in Z(f^n(x) \in \alpha \wedge f^n(y) \in \alpha)$. □

Следствие 5. *Перечислимое множество вычислимо прошиваемо тогда и только тогда, когда оно бесконечное, кобесконечное и разрешимое.*

Доказательство. Вычислимая прошиваемость бесконечного, кобесконечного и разрешимого множества очевидна. Обратное следует из предложения 8. □

Назовем эквивалентность η вычислимо прошиваемой, если существуют такой ее η-класс α и вычислимая перестановка f, что $\eta_{\alpha,f} = \eta$.

Следствие 6. *Если (G, ν) – неразрешимая позитивная группа, то ядро $ker(\nu)$ не является вычислимо прошиваемым.*

Доказательство. По следствию 5 в случае вычислимой прошиваемости ядра нумерации оно разрешимо. □

Характеристической трансверсалью эквивалентности η будем называть множество всех натуральных чисел, являющихся наименьшими в содержащих их η-классах (в обозначениях $tr(\eta) = \{x | \forall y (x = y \pmod{\eta} \Rightarrow x \leqslant y)\}$).

Предложение 10. *Всякое бесконечное, кобесконечное и коперечислимое множество вычислимо прошиваемо.*

Доказательство. Пусть α – бесконечное коперечислимое множество с бесконечным дополнением. Рассмотрим такую позитивную эквивалентность η с бесконечными смежными классами, характеристическая трансверсаль которой есть α (о существовании таких эквивалентностей и общих методах их построения см., например, [1], с. 296). Используя алгоритм перечисления для η можно построить по шагам через конечные аппроксимации такую вычислимую перестановку f на ω, которая тождественна по модулю η и каждый η-класс является f-орбитой. Приведем алгоритм вычисления графика G_f функции f с умеренной степенью детализации.

Через η^s будем обозначать часть эквивалентности η, построенную за s шагов некоторого фиксированного эффективного пересчета η.

Шаг 0. $G_f^0 = \emptyset$, $\eta^0 = \emptyset$.

Шаг s+1. Пусть $C_0, \ldots, C_m$ все нетривиальные классы эквивалентности η^s, каждый из которых является цепью η^s-эквивалентных чисел вида $a_0, f(a_0), \ldots, f^n(a_0)$ (где число a_0 не имеет f-прообраза, а $f^n(a_0)$ не имеет f-образа на шаге s). При этом, число a_0 назовем началом цепи, а $f^n(a_0)$ – ее концом. Упорядочим цепи по их началам. Расширим классы $C_0, \ldots, C_m$ по модулю эквивалентности η^{s+1}. Если цепи были различны на шаге s, а на шаге $s+1$ пересеклись (т.е. какие-то их элементы стали η^{s+1}эквивалентными), то для этих цепей расширяем график G_f^s до G_f^{s+1} так, что концы меньших цепей отображаются функцией f на начала больших (на четных шагах) и концы больших – в начала меньших (на нечетных шагах). Конец шага s+1.

Положим
$$G_f = \bigcup_{s \in \omega} G_f^s.$$
Очевидно, что f – вычислимая перестановка, прошивающая множество α. □

Покажем, что свойство "быть равномерной m-эквивалентностью" не является достаточным для представимости над эквивалентностью группы.

Пееред формулировкой следующего утверждения введем некоторые понятия. В соответствии с определением 3 для заданной эквивалентности η построим топологическое пространство $[\eta]_{comp}$, базой открытых множеств которого является семейство всех η-замкнутых перечислимых множеств. Эту топологию будем называть отделимой (T_1-отделимой, хаусдорфовой, регулярной и т.д.), если таковым является пространство $[\eta]_{comp}$. Замечательным свойством этой топологии является тот факт, что если универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ представима над η, то все ее операции, поддерживаемые подходящими вычислимыми функциями в естественной проектирующей нумерации $\nu(x) = \{x\}/\eta$, непрерывны в этой топологии. Для одноместных операций это очевидно, т.к. прообразы перечислимых множеств перечислимы, так же как и то, что морфизм двух нумерованных систем является непрерывным отображением. Непрерывность в общем случае показана в [5].

Если вычислимо прошиваемая эквивалентность позитивна, то по предложению 9 она разрешима и над ней, очевидно, представима группа. Покажем, что существует вычислимо прошиваемая эквивалентность низкой алгоритмической сложности, над которой не представима никакая группа.

Теорема 2. *Существует вычислимая перестановка, являющаяся m-сводящей для такой равномерной m-эквивалентности, над которой не представима никакая группа.*

Доказательство. В [6] построен пример такого множества α, вычислимо прошиваемого подходящей вычислимой перестановкой f на ω, что топологическое пространство $[\eta_{\alpha,f}]_{comp}$ является T_1-отделимым, но не хаусдорфовым. Более того, не существует двух непустых непересекающихся перечислимых $\eta_{\alpha,f}$-замкнутых множеств. Хорошо известно, что если топологическая группа T_1-отделима, то она T_2-отделима, т.е. хаусдорфова. Поэтому, если бы над $\eta_{\alpha,f}$ была представима группа, то пространство $[\eta_{\alpha,f}]_{comp}$ было бы хаусдорфовым (заметим, что ключевым моментом является непрерывность групповых операций относительно введенной топологии). Таким образом, над неразрешимой равномерной m-эквивалентностью $\eta_{\alpha,f}$ не представима никакая группа. □

Отметим, что алгоритмическая сложность эквивалентности $\eta_{\alpha,f}$ из теоремы 2 находится в классе Π^0_2; более точно, она является эффективно T_1-отделимой, т.е. существует такое эффективное семейство S перечислимых $\eta_{\alpha,f}$-замкнутых множеств, что для любых $x \neq y \pmod{\eta_{\alpha,f}}$ найдутся такие $\sigma_0, \sigma_1 \in S$, что $\{x\}/\eta_{\alpha,f} \subseteq \sigma_0 \wedge \{y\}/\eta_{\alpha,f} \cap \sigma_0 = \emptyset$ и $\{y\}/(\eta_{\alpha,f}) \subseteq \sigma_1 \wedge \{x\}/(\eta_{\alpha,f}) \cap \sigma_1 = \emptyset$.

3. Решетки

Напомним (см. раздел 1), что $\eta^*_\alpha = \{\langle x,y\rangle | \gamma_x \triangle \gamma_y \subseteq \alpha\}, \alpha \subseteq \omega$ (γ – каноническая нумерация конечных множеств).

Теорема 3. *Для всякого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность η^*_α является вычислимо отделимой m-эквивалентностью, любая пара смежных классов которой вычислимо изоморфна. При этом, если α коперечислимо, то эквивалентность η^*_α является негативной и равномерной.*

Доказательство. Обозначим через $\Gamma_{x,y}$ множество γ-номеров всех конечных расширений множества γ_x вне $\gamma_y \setminus \gamma_x$, т.е. $\Gamma_{x,y} = \{z | \gamma_x \subseteq \gamma_z \wedge (\gamma_y \setminus \gamma_x) \cap \gamma_z = \emptyset\}$. Например, $\Gamma_{x,0}$, где $\gamma_x \neq \emptyset, \gamma_0 = \emptyset$ – есть совокупность канонических индексов всех конечных расширений множества γ_x, а $\Gamma_{0,x}$ – множество номеров всех конечных множеств, не пересекающихся с γ_x.

Покажем, что η^*_α вычислимо отделима для любого α. Действительно, если $x \neq y \pmod{\eta^*_\alpha}$, то легко проверить, что $\Gamma_{x,y}$ – η^*_α-замкнутое вычислимое множество, содержащее x и не содержащее y.

Перейдем к построению требуемой перестановки $f_{x,y}$. Для данных $x \neq y \pmod{\eta^*_\alpha}$ таких, что $\gamma_x, \gamma_y \subseteq \omega \setminus \alpha$, построим множества (их характеристические индексы) $\Gamma_{x,y}, \Gamma_{y,x}$ и установим вычислимое взаимно однозначное соответствие между ними следующим образом. Для каждого $z \in \Gamma_{x,y}$ найдем такое u, что $\gamma_u = \gamma_z \setminus \gamma_x$ и определим $\gamma_v = \gamma_u \cup \gamma_y$. Тогда $v \in \Gamma_{y,x}$. Полагаем $f_{x,y}(z) = v$ и $f_{x,y}(v) = z$. На всех числах из $\omega \setminus (\Gamma_{x,y} \cup \Gamma_{y,x})$ положим $f_{x,y}$ тождественной.

Покажем, что $f_{x,y}$ есть функция, согласованная с η^*_α, действующая как бесконечное множество циклов длины 2 на $\Gamma_{x,y} \cup \Gamma_{y,x}$. Пусть $z_1 \in \Gamma_{x,y}$ и $f_{x,y}(z_1) = p_1$. Тогда однозначно определено такое u_1, что $\gamma_{u_1} = \gamma_{z_1} \setminus \gamma_x$ и $\gamma_{p_1} = \gamma_y \cup \gamma_{u_1}$, причем множество γ_{u_1} не пересекается с γ_y. Для $z_2 \in \Gamma_{x,y}$ существуют однозначно определенные соответствующие u_2, p_2. Теперь, если $z_1 = z_2 \pmod{\eta^*_\alpha}$, то $\gamma_{z_1} \setminus \alpha = \gamma_{z_2} \setminus \alpha$, т.е. $\gamma_{u_1} \setminus \alpha = \gamma_{u_2} \setminus \alpha$. Поэтому $p_1 = p_2 \pmod{\eta^*_\alpha}$. Инъективность $f_{x,y}$ очевидна. Биективность следует из того, что всякого $p \in \Gamma_{y,x}$ существует такое единственное u (а именно, $\gamma_p = \gamma_y \cup \gamma_u$), что $f_{x,y}(z) = p$, где $\gamma_z = \gamma_x \cup \gamma_u$. Аналогично показывется корректность $f_{x,y}$ на аргументах из $\Gamma_{y,x}$. Таким образом, $f_{x,y}$ – вычислимая перестановка на ω, индуцирующая перестановку на ω/η^*_α, которая переводит класс $\{x\}/\eta^*_\alpha$ в класс $\{y\}/\eta^*_\alpha$.

Негативность η^*_α при коперечислимости α очевидна. Т.к. множество всех минимальных (в содержащих их классах) элементов эквивалентности перечислимо, то для каждой пары чисел $\langle x, y\rangle$, таких что $\gamma_x, \gamma_y \subseteq \omega \setminus \alpha$ применяем описанную выше процедуру и получим вычислимое семейство $\{f_{x,y} | \gamma_x, \gamma_y \subseteq \omega \setminus \alpha\}$ вычислимых перестановок с требуемым свойством, т.е. η^*_α является равномерной m-эквивалентностью, всякие два класса которой вычислимо изоморфны. □

Следствие 7. *Для любого α над η^*_α представима решетка, изоморфная подрешетке решетки всех конечных подмножеств некоторого множества.*

Доказательство. Нетривиальным является случай кобесконечного α. Для любых $x, y \in \omega$ определим $x \sqcup y = \gamma^{-1}(\gamma_x \cup \gamma_y), x \sqcap y = \gamma^{-1}(\gamma_x \cap \gamma_y)$. Согласованность введенных операций с η^*_α, существование точных верхних и нижних граней, а также наличие наименьшего элемента очевидны. □

Любая группа без кручения, имеющая вычислимую копию, обладает неразрешимой негативной нумерацией ([7]). В связи с этим возникает вопрос: "представима ли группа над эквивалентностью η^*_α для некоторого коперечислимого неразрешимого α"?

Напомним ([1], с.288), что позитивная эквивалентность η называется совершенной, если не существует нетривиальных η-замкнутых невычислимых множеств.

Ниже решетка понимается как алгебра (в сигнатуре $\langle \sqcup, \sqcap \rangle$).

Предложение 11. *Существует такая позитивная эквивалентность, над которой не представима никакая верхняя (нижняя) полурешетка.*

Доказательство. Пусть η – совершенная эквивалентность со сжатой характеристической трансверсалью. Примеры таких эквивалентностей можно найти в [1]. В [4] показано, что всякая n-местная вычислимая функция, согласованная с η действует на фактор-множестве ω/η либо как константа, либо как проектирующая. Предположим, что бинарная вычислимая операция f представляет операцию взятия точной верхней (нижней) грани на ω/η. Тогда индуцированный f позитивный частичный порядок $x \leqslant_\eta y \Leftrightarrow f(x,y) = y \pmod \eta$ не может быть линейным ([8]) и потому имеется два $\leqslant_\eta$-несравнимых η-класса, скажем $\{k\}/\eta$ и $\{l\}/\eta$. Рассмотрим трансляцию $t = \lambda x.[f(x,k)]$. Тогда, в силу идемпотентности $t(k) = k \pmod \eta$, но $t(l) \neq k \pmod \eta) \wedge t(l) \neq l \pmod \eta$ и одноместная вычислимая функция t оказывается как не константой, так и не проектирующей (тождественной). Противоречие. $\square$

Предложение 11 порождает принципиальный вопрос: "над всякой ли негативной эквивалентностью представима решетка как алгебра"?

Определение 5. *Граф $\langle \Gamma; P\rangle$ называется позитивно (негативно) представимым над эквивалентностью η, если существует такая его нумерация ν, что $ker(\nu) = \eta$ и множество $\{\langle x, y\rangle | \langle \nu x, \nu y\rangle \in P\}$ перечислимо (коперечислимо).*

Заметим, что в этом определении на сложность η не налагаются никакие ограничения.

Теперь под словом решетка будем понимать частично упорядоченное множество.

Предложение 12. *(a) Над любой негативной эквивалентностью негативно представим линейный порядок.*

(b) Над всякой позитивной эквивалентностью позитивно представима решетка, однако существует такая позитивная эквивалентность, над которой позитивно не представим никакой линейный порядок.

Доказательство. (a) В [8] показано, что над всякой негативной эквивалентностью с бесконечным множеством смежных классов негативно представим плотный линейный порядок и, тем более, решетка (как частичный порядок).

(b) Пусть η – позитивная эквивалентность с не менее чем двумя η-классами, которые мы зафиксируем, скажем α, β. Тогда порядок $\alpha \times \omega \cup \omega \times \beta \cup \eta$ есть позитивная решетка с нулем (α), единицей (β) и множеством остальных попарно несравнимых между собой по модулю η элементов. Существование позитивной эквивалентности, над которой позитивно не представим никакой линейный порядок доказано в упомянутой выше работе [8]. $\square$

4. Трансляционно предполные алгебры, кольца и полугруппы

В данном разделе мы рассмотрим свойства эквивалентностей, являющихся ядрами нумераций колец, полей и универсальных алгебр с некоторыми условиями типа конечности на решетки их конгруэнций (простых и подпрямо неразложимых), а также возможности представимости над эквивалентностями более широких классов систем, каковыми являются, в частности, полугруппы.

Т.к. понятие кольца включает в себя подпонятие своей аддитивной коммутативной группы, то ядро нумерации любого кольца является равномерной m-эквивалентностью. Тем более это касается тел и полей. Поэтому все общие результаты, сформулированные для групп в предыдущих разделах, справедливы и для любых колец.

Известно ([9]), что над любой негативной эквивалентностью представимы как конечно порожденные, так и конгруэнц-простые универсальные алгебры. Представимость же конгруэнц-простой алгебры над позитивной эквивалентностью равносильна ее разрешимости. Вместе с тем, если эквивалентность (не обязательно позитивная) имеет, к примеру, гипериммунную характеристическую трансверсаль, то всякая представимая над ней алгебра конечной сигнатуры локально конечна ([4]). Если позитивная эквивалентность не является вычислимо отделимой, то решетка конгруэнций всякой представимой над ней универсальной алгебры континуальна ([4]). Поэтому, с точки зрения представимости богатых классов систем над эквивалентностями, негативные эквивалентности можно трактовать как более приоритетные относительно позитивных. Следующие важные классы универсальных алгебр подтверждают сказанное.

Унарная термальная операция с фиксированными элементами алгебры в качестве параметров называется трансляцией.

Определение 6. *Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая пара различных ее элементов переводится в любую другую пару различных элементов подходящей трансляцией.*

Очевидно, что всякая трансляционно полная алгебра является конгруэнц-простой. Обратное неверно. Классический пример трансляционно полной алгебры – любое тело ([10]).

Определение 7. *Универсальная алгебра называется трансляционно предполной, если существует такая пара различных ее элементов, в которую переводится любая пара различных элементов подходящей трансляцией.*

Фактически из определения следует, что всякая трансляционно предполная алгебра является подпрямо неразложимой. Обратное неверно.

Определение 7 существенно шире определения 6. Простейший пример нетривиальной трансляционно предполной не простой алгебры – алгебра предшествования $P = \langle \omega; p \rangle, p(0) = 0, p(n+1) = n$.

Для множества $\alpha \subseteq \omega$ и эквивалентности η через $[\alpha]_\eta$ обозначим η-замыкание множества α (т.е. наименьшее η-замкнутое расширение α). Будем говорить, что число x является η-отвергаемым множеством α, если $x \notin [\alpha]_\eta$. Легко понять, что для любой негативной эквивалентности η отношение "число x является η-отвергаемым конечным множеством δ" – перечислимое и равномерно зависящее от x, δ (можно считать, что δ задано своим каноническим индексом или дано в явном виде). Если ясно о какой эквивалентности η идет речь, то будем говорить, что x отвергается δ.

Теорема 4. *Над любой негативной эквивалентностью представима трансляционно полная универсальная алгебра.*

Доказательство. Пусть η – негативная эквивалентность. Если характеристическая трансверсаль $tr(\eta)$ конечна, то η разрешима и доказывать нечего. Поэтому предполагаем, что $tr(\eta) = \{t_0, t_1, \dots\}$ бесконечна. Заметим, что $tr(\eta)$ перечислима, т.к. $x \in tr(\eta) \Leftrightarrow \forall z < x (z \neq x \pmod{\eta})$. Покажем, что для любой пары $x \neq y \pmod{\eta}$ существует разрешимое η-замкнутое множество, отделяющее x, y и, более того, это множество равномерно строится по данным x, y.

Шаг 0. $A_x^0 = \{x\}, A_y^0 = \{y\}$.

Шаг $s+1$. Пусть z – наименьшее натуральное число, не принадлежащее $A_x^s \cup A_y^s$. Проверяем z на предмет его отвержения хотя бы одним из множеств A_x^s, A_y^s. Если z отвергается A_x^s, то полагаем $A_x^{s+1} = A_x^s, A_y^{s+1} = A_y^s \cup \{z\}$; если x отвергается A_y^s, то $A_x^{s+1} = A_x^s \cup \{z\}, A_y^{s+1} = A_y^s$. Если z отвергается обоими множествами, то относим его к A_x^{s+1}. Конец шага $s+1$.

Определим

$$A_x = \bigcup_{s\in\omega} A_x^s, A_y = \bigcup_{s\in\omega} A_y^s.$$

Индукцией по шагам построения легко показать, что каждый шаг заканчивается с отнесением текущего тестируемого натурального числа к одному из двух множеств, а также тот факт, что $[A_x^s]_\eta \cap [A_y^s]_\eta = \emptyset$ для любого шага s. Поэтому перечислимые A_x, A_y не пересекаются, являются η-замкнутыми и их объединение покрывает все ω. Равномерная зависимость индексов характеристических функций A_x, A_y от x, y очевидна.

Теперь для каждой пары $\langle x, y\rangle$ различных по модулю η чисел построим вычислимое семейство трансляций $T_{x,y} = \{f_{x,y,m,n} | m, n \in \omega\}$ следующим образом:

$$z \in A_x \Rightarrow f_{x,y,m,n}(z) = t_m; z \in A_y \Rightarrow f_{x,y,m,n}(z) = t_n,$$

где $t_m, t_n \in tr(\eta), m \neq n$.

Наконец, определим вычислимое семейство трансляций

$$T = \bigcup_{x\neq y \pmod \eta} T_{x,y}.$$

Очевидно, что любая трансляция $f \in T$ согласована с η, т.е. $x = y \pmod \eta \Rightarrow f(x) = f(y) \pmod \eta$ и потому корректно определена фактор-алгебра $\langle \omega/\eta; T\rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; T\rangle$ по конгруэнции η. Т.к. для любой пары различных по модулю η чисел x, y и любых различных $t_m, t_n \in tr(\eta)$ найдется трансляция из T, переводящая x в t_m и y в t_n, то алгебра $\langle \omega/\eta; T\rangle$ трансляционно полна. □

Следствие 8. *Над любой негативной эквивалентностью представима трансляционно предполная универсальная алгебра.*

Замечание 2. Негативные нумерации представляются в определенном смысле не менее естественными, чем позитивные. Так, например, простейшая группа целых чисел по сложению $\langle Z; +\rangle$ имеет неразрешимые негативные нумерации, хотя она устойчива относительно позитивных представлений; любое бесконечное поле, имеющее вычислимую копию, также имеет неразрешимую негативную нумерацию (см. [7]), в то время как всякое позитивное представление любого поля является разрешимым.

Предложение 13. *Всякая хаусдорфова нумерация трансляционно предполной универсальной алгебры негативна.*

Доказательство. В [6]. □

Следствие 9. *Никакая трансляционно предполная универсальная алгебра не представима ни над какой не негативной эквивалентностью, каждый смежный класс которой перечислим.*

Доказательство. В противном случае, по предложению 13, ввиду очевидной T_2-отделимости (даже дискретности) соответствующего пространства следует негативность ядра представления. $\square$

В частности, никакая трансляционно предполная универсальная алгебра не представима ни над какой неразрешимой позитивной эквивалентностью.

Рассмотрим более широкие семейства классических систем.

Будем называть функцию $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ согласованной с эквивалентностью η, если η – конгруэнция алгебры $\langle \omega; f \rangle$. Как обычно, функция $C_m^n : \omega^n \longrightarrow \omega$, с областью значений $\{m\}(m \in \omega)$, называется константой, а $I_m^n : \omega^n \longrightarrow \omega$, где $1 \leqslant m \leqslant n$ и $\forall \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \omega^n (I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m)$ – проектирующей функцией. Обозначим

$$U = \bigcup_{m,n \in \omega} \{C_m^n\} \cup \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant n, n \in \omega} \{I_m^n\}.$$

Очевидно, что любая функция согласована с двумя эквивалентностями – нулевой ($id\ \omega$) и единичной ($\{\langle x, y \rangle | x, y \in \omega\}$). Ясно также, что всякая U-функция согласована с любой эквивалентностью над ω.

Предложение 14. *Над любой эквивалентностью представима коммутативная полугруппа.*

Доказательство. Определим умножение на ω как C_m^2, где m – любое фиксированное натуральное число. Тогда операция C_m^2 вычислима и очевидно согласована с любой эквивалентностью η на ω, а потому корректно определена фактор-алгебра $\langle \omega/\eta; C_m^2 \rangle$ вычислимой коммутативной полугруппы $\langle \omega; C_m^2 \rangle$, т.е. полугруппа $\langle \omega; C_m^2 \rangle$ представима над η. $\square$

Заметим, что в качестве полугруппового умножения взять и I_1^2, но тогда полугруппа не будет коммутативной.

Предложение 15. *Для любого $\alpha \subseteq \omega$ над эквивалентностью η_α^* представима коммутативная полугруппа с единицей.*

Доказательство. Определим операцию умножения $*$: $x * y = \gamma^{-1}(\gamma_x \cup \gamma_y)$. Легко проверить, что $*$ согласована с η_α^* для любого $\alpha \subseteq \omega$. Единицей данной коммутативной полугруппы будет η_α^*-класс, порожденный всеми α-расширениями пустого множества, т.е. $\varepsilon = \{x | \gamma_x \subseteq \alpha\}$. $\square$

Предложение 16. *Существует позитивная эквивалентность, над которой не представима никакая полугруппа с единицей.*

Доказательство. Пусть η – упоминавшаяся выше совершенная эквивалентность со сжатой характеристической трансверсалью. Тогда всякая вычислимая функция, согласованная с η, действует на фактор-множестве ω/η либо как константа, либо как проектирующая ([11]). Поэтому, если над η представима полугруппа с единицей e и умножением $*$, то это умножение действует на ω/η либо как константная, либо как проектирующая операция. Если $*$ действует как константа, то обозначим через c такой элемент полугруппы, что $\forall a, b(a * b = c)$. Тогда $\forall a(e * a = a * e = a = c)$, что невозможно в нетривиальной полугруппе.

Пусть $*$ действует как проектирующая, т.е. либо подобно I_1^2, либо как I_2^2. В первом случае $\forall a(e = e * a)$ (т.к. $*$ действует как I_1^2), но, в то же время $\forall a(e * a =$

a) (т.к. e – единица полугруппы). Поэтому $\forall a(e = a)$, что возможно лишь для одноэлементного моноида. Случай I_2^2 рассматривается аналогично. $\square$

Заметим, что если рассматривать полугруппы не с двусторонними, а с левыми (правыми) единичными элементами, то имеет место

Предложение 17. *Над любой эквивалентностью представима полугруппа с левой (правой) единицей.*

Доказательство. В самом деле, если принять в качестве группового умножения операцию I_2^2, то любой элемент полугруппы будет являться левой единицей. Аналогично, для операции I_1^2 всякий элемент будет правой единицей. $\square$

5. Степени представимости

В заключение скажем несколько слов о возможности применения изложенных выше результатов в теории степеней алгоритмических представлений систем, представляющей интерес в рамках подхода теоретической информатики к проблеме математического уточнения понятия алгоритмической реализации модели данных ([4]).

Пусть $\mathbb{G}_p$ – класс позитивно представимых бесконечных групп, Σ – множество всех бесконечных позитивных эквивалентностей и $K_G(\eta)$ – класс всех групп, представимых над эквивалентностью η. На Σ определим следующий предпорядок:

$$\eta_0 \leqslant_{G_p} \eta_1 \leftrightharpoons \forall G \in \mathbb{G}_p[G \in K_G(\eta_0) \Rightarrow G \in K_G(\eta_1)].$$

Симметричное замыкание предпорядка $\leqslant_{G_p}$ разбивает множество Σ на классы $\equiv_{G_p}$-эквивалентности и на фактор-множестве $\Sigma/\equiv_{G_p}$ порождается частичный порядок $D_{G_p} = \langle \Sigma/\equiv_{G_p}; \leqslant_{G_p}\rangle$, в котором через $\leqslant_{G_p}$ обозначен и частичный порядок на фактор-множестве, индуцированный действием $\leqslant_{G_p}$ на Σ. Корректность такого перехода при факторизации очевидна. Неформально, $\eta_0 \leqslant_{G_p} \eta_1$ означает, что всякая группа, представимая над η_0 является представимой и над η_1, а структура частичного порядка D_{G_p} отражает алгоритмическую природу эквивалентностей с точки зрения соотношений между реализуемыми над ними классами групп. Отметим, что любая группа из $\mathbb{G}_p$ определяется некоторым $\equiv_{G_p}$-классом. Элементы D_{G_p} будем называть степенями позитивной представимости групп. Отметим, что степени представимости конечных систем образуют изолированные точки в структуре частично упорядоченного множества степеней и, с точки зрения дескриптивной теории вычислимости, представляют "вырожденный случай". Поэтому мы рассматриваем все степени представимости в контексте отсутствия степеней, порожденных конечными эквивалентностями.

Например, из теоремы 1 следует, что все позитивные эквивалентности, не являющиеся m-равномерными лежат в одной $\equiv_{G_p}$-степени, являющейся наименьшей относительно $\leqslant_{G_p}$ и определяющей пустой класс групп. Однако, из теоремы 2 вытекает, что в этой же степени находятся и некоторые равномерные m-эквивалентности.

Аналогично, рассматривая класс негативно представимых бесконечных групп $\mathbb{G}_n$ и множество всех бесконечных негативных эквивалентностей Π получаем структуру степеней негативной представимости групп $D_{G_n} = \langle \Pi/\equiv_{G_n}; \leqslant_{G_n}\rangle$.

Можно рассматривать более широкие классы $\mathbb{SG}_p$ ($\mathbb{SG}_n$) позитивно (негативно) представимых бесконечных полугрупп и соответствующие множества степеней позитивной (негативной) представимости для классов полугрупп. При этом, $\equiv_{G_p}$-степени представлений групп будут, вообще говоря, "распадаться" для представлений полугрупп, т.е. $\equiv_{SG_p} \subseteq \equiv_{G_p}$, т.к. одинаковые $\equiv_{G_p}$-степени для групп могут быть различными для более широкого класса полугрупп (при рассмотрении групп в сигнатуре с одной бинарной групповой операцией).

На настоящий момент относительно изучена ситуация для степеней позитивной и негативной представимости линейных порядков. Так, для структуры D_{L_p} степеней позитивной представимости линейных порядков доказана ее бесконечность, существование несравнимых степеней, отсутствие наибольшего элемента, наличие степени, определяющей пустой класс линейных порядков и т.д. (см. [12]). Строение же структуры D_{L_n} степеней негативной представимости линейных порядков оказалось совершенно иным – она также бесконечна, но имеет наибольший элемент, при этом всякая степень определяет достаточно богатый класс линейных порядков представимых над любой эквивалентностью из этой степени и т.д. (см. [8]).

Для групп, полугрупп и колец ситуация не изучена. Самая простейшая ситуация – для степеней позитивной представимости полей D_{F_p}.

Предложение 18. *Частично упорядоченное множество степеней позитивной представимости бесконечных полей двухэлементно и изоморфно типу ординала 2.*

Доказательство. В самом деле, любая неразрешимая позитивная эквивалентность лежит в степени позитивной представимости, которая определяет пустой класс полей, т.к. над такой эквивалентностью не представимо поле. С другой стороны, над любой разрешимой бесконечной эквивалентностью представимо всякое бесконечное поле, обладающее вычислимой копией. □

О структуре D_{G_p} степеней позитивной представимости групп имеет место почти тривиальное

Предложение 19. *Частично упорядоченное множество степеней позитивной представимости бесконечных групп имеет не менее трех элементов, два из которых несравнимы.*

Доказательство. Все эквивалентности не являющиеся m-равномерными (и даже некоторые равномерные m-эквивалентности) образуют наименьшую степень d_0 в D_{G_p}. С другой стороны, степень d_1, содержащая $\eta_1 = id\ \omega$, определяет устойчивую относительно позитивных нумераций простейшую группу $G_1 = \langle Z; +\rangle$. Теперь, если d_2 – степень, содержащая неразрешимую эквивалентность η_2, являющуюся ядром представления некоторой конечно порожденной группы G_2, то $G_1 \in K_G(\eta_1) \setminus K_G(\eta_2) \wedge G_2 \in K_G(\eta_2) \setminus K_G(\eta_1)$, т.е. $\eta_1 \not\leq_{G_p} \eta_2$ и $\eta_2 \not\leq_{G_p} \eta_1$. □

Другие естественные вопросы, касающиеся строения структуры степеней представлений указанных выше систем, открыты. Например, является ли структура D_{G_p} бесконечной?

References

[1] Yu.L. Ershov, *The Theory of Enumerations [in Russian]*, Nauka, Moscow, 1977.

[2] S.S. Goncharov, Yu.L. Ershov, *Constructive Models*, Ser. Siberian School of Algebra and Logic, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, etc., 2000.

[3] N.Kh. Kasymov, A.S. Morozov, *Definability of linear orders over negative equivalences*, Algebra and logic, **55**:1 (2016), 24–37.

[4] N.Kh. Kasymov, *Recursively separable enumerated algebras*, Russian Math. Surveys, **51**:3 (1996), 509–538.

[5] N.Kh. Kasymov, *Homomorphisms onto effectively separable algebras*, Sib. Math. Journal, **57**:1 (2016), 36–50.

[6] N.Kh. Kasymov, A.S. Morozov, I.A. Khodzhamuratova, *T_1-separable enumarations of subdirectly indecomposable algebras*, Algebra and logic (to be published).

[7] B.M. Khoussainov, T. Slaman, P. Semukhin, *$\prod_1^0$-presentasions of algebras*, Archive for Mathematical Logic, **45**:6 (2006), 769–781.

[8] N.Kh. Kasymov, R.N. Dadazhanov, *Negative dense linear orders*, Sib. Math. Journal, **58**:6 (2017), 1015–1033.

[9] N.Kh. Kasymov, *Algebras over negative equivalences*, Algebra and logic, **33**:1 (1994), 46–48.

[10] N.Kh. Kasymov, F.N. Ibragimov, *Separable enumerations of division rings and effective embeddability of rings therin*, Sib. Math. Journal, **60**:1 (2019), 62–70.

[11] N.Kh. Kasymov, B.M. Khoussainov, *Finitely generated enumerable and absolutely locally finite algebras*, Vychisl. Sist., **116** (1986), 3–15.

[12] E.B. Fokina, B.M. Khoussainov, P. Semukhin, D. Turetskiy, *Linear orders realized by c.e. equivalence relations*, Journal of Symbolic Logic, **81**:2 (2016), 463–482.

Nadimulla Khabibullaevich Kasymov
National University of Uzbekistan,
University st., 4,
100174, Tashkent, Uzbekistan
Email address: nadim59@mail.ru

Ruzmat Normatovich Dadazhanov
National University of Uzbekistan,
University st., 4,
100174, Tashkent, Uzbekistan
Email address: dadajonovrn@mail.ru

Sarvar Kurbonmiratovich Zhavliev
National University of Uzbekistan,
University st., 4,
100174, Tashkent, Uzbekistan
Email address: sarvar.javliyev@mail.ru