S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №1, стр. 332–337 (2021) УДК 517.956.8

DOI 10.33048/semi.2021.18.022 MSC 35L05, 35K03, 35J05, 35J10

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.И. БЕСОВА, В.И. КАЧАЛОВ

Abstract. An Navier-Stokes type equation is considered for which a generalized solution is constructed in the form of a series in powers of a specially introduced parameter and its convergence is proved. An example of a mixed problem for the Burgers equation is given.

Keywords: equations of Navier-Stokes type, Burgers equation, generalized solution, holomorphic dependence of a solution on a parameter.

1. Введение

Для решения некоторых тонких вопросов нелинейной математической физики уже давно используется метод малого параметра. Последний либо уже присутствует в изучаемой задаче, как например, в теории возмущений [1, 2, 3], либо вводится искусственно, как в методе «исчезающей вязкости» [4]. В любом случае, встает вопрос о характере сходимости построенного ряда. В регулярной теории возмущений (особенно линейной) во многих случаях наблюдается голоморфная зависимость решения от параметра [3], в сингулярном случае — сходимость, как правило, асимптотическая [2, 5, 6], хотя и имеются условия обычной сходимости [7, 8]. Однако, если задача нелинейная, то проблема обычной сходимости требует глубокого исследования (особенно, если возмущающий оператор нелинейный). В случае положительного решения этой проблемы появляется возможность детального исследования свойств решений изучаемых задач.

Полученные в настоящее время результаты по обычной сходимости рядов, представляющих решения уравнений с малым параметром, в которые входят неограниченные операторы, получены в основном для линейных задач [3, 7, 13].

Besova, M.I., Kachalov, V.I., On a nonlinear differential equation in a Banach space.

Поступила 17 февраля 2020 г., опубликована 30 марта 2021 г.

В данной работе рассматривается эволюционное уравнение в банаховом пространстве, правая часть которого содержит как линейный, так и билинейный операторы, причем оба являются неограниченными. Доказано, что при специальном выборе областей определения указанных операторов, поставленная начальная задача имеет голоморфное по малому параметру обобщенное решение.

2. Уравнение типа Навье-Стокса. Постановка задачи

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши с малым комплексным параметром ε

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = Au + \varepsilon B(u,u) + f(t), \quad t \in [0,t], \\ &u\big|_{t=0} = u^0, \end{aligned} \tag{1}$$

где A — замкнутый неограниченный оператор с плотной областью определения D, являющийся инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$; $B(u,v)$ — билинейный оператор с областью определения $E \times D$, ограниченный по первой переменной и замкнутый неограниченный по второй переменной.

При $\varepsilon = 1$ уравнение превращается в уравнение типа Навье-Стокса — именно так выглядит последнее, записанное как эволюционное в банаховом пространстве [9, 10, 11].

Заметим, что в случае, когда $f(t) \equiv 0$, параметр можно ввести с помощью замены $u = \varepsilon v$, благодаря билинейности оператора B.

3. Построение обобщенного решения методом малого параметра. Основное утверждение

Будем искать решение задачи Коши (1) в виде ряда по степеням ε (считая, тем самым, нелинейную часть уравнения подчиненной):

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t) + \ldots . \tag{2}$$

Подставим этот формальный ряд в уравнение (1) и воспользуемся (с учетом билинейности оператора B) правилом Коши произведения рядов:

$$B(u,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^{n} B(u_k, u_{n-k}).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях этого уравнения и, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов, получим серию начальных задач:

$$\begin{aligned} &\frac{du_0}{dt} = Au_0 + f(t), \quad u_0\big|_{t=0} = u^0, \\ &\frac{du_1}{dt} = Au_1 + B(u_0,u_0), \quad u_1\big|_{t=0} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{du_n}{dt} = Au_n + \sum_{k=0}^{n-1} B(u_k, u_{n-k-1}), \quad u_n\big|_{t=0} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Все задачи серии (3) корректно разрешимы, и пусть $u_0(t)$ — решение первой из них. Тогда

$$
\begin{aligned}
&u_1(t) = \int_0^t U(t-\tau)B(u_0(\tau), u_0(\tau))d\tau,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_n(t) = \int_0^t U(t-\tau)\Big[\sum_{k=0}^{n-1} B(u_k(\tau), u_{n-k-1}(\tau))\Big]d\tau,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Введем следующее

Определение. *Если ряд* (2) *сходится в некоторой окрестности значения* $\varepsilon = 0$ *равномерно по* $t \in [0, T]$, *то его сумму* $u(t, \varepsilon)$ *будем называть обобщенным решением задачи*(1).

Замечание 1. *Если* $u(t, \varepsilon) \in D$, *то оно становится строгим решением задачи* (1).

Далее, пусть для каждого положительного числа c существует множество $W^c \subset D$ такое, что $\forall w \in W^c \ \ \|w\| \leq e^{ac}$ при некотором $a > 0$, и, если, $w_1 \in W^{c_1}$, $w_2 \in W^{c_2}$, то $\|B(w_1, w_2)\| \leq c_2 e^{a(c_1+c_2)}$. Также будем предполагать, что множество W^c инвариантно относительно $U(t)$ и $\|U(t)w\| \leq \|w\| \ \ \forall w \in W^c$.

Следует отметить, что множество W^c состоит из элементов, аналогами которых являются векторы экспоненциального типа [7, 13]. Если же E является функциональным пространством, то W^c обобщает пространство целых функций экспоненциального типа [14].

Введем обозначение для объединения этих множеств:

$$\exp_a E = \bigcup_{c>0} W^c,$$

и потребуем, чтобы оно было инвариантным относительно оператора B.

Чтобы перейти к изложению основного результата работы, докажем одно комбинаторное равенство.

Лемма. *Для любого натурального* n *имеет место равенство*

$$
\begin{aligned}
1\cdot\frac{(n+1)^n}{n!} + 1\cdot\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{3^1}{2!}\,\frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{4^2}{3!}\,\frac{(n-2)^{n-3}}{(n-3)!} + \cdots +\\
+\frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\cdot 1 = \frac{(n+2)^n}{n!}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Доказательство. Умножим равенство (5) на $n!$, тогда оно примет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (n+1-k)^{n-k}(k+1)^{k-1} = (n+2)^n.$$

Нетрудно видеть, что левая часть этого равенства в точности представляет собой формулу Лейбница:

$$[f(v)g(v)]^{(n)}_{v=0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(0) g^{(k)}(0),$$

где

$$f(v) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^m}{m!} v^m, \qquad g(v) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^{m-1}}{m!} v^m$$

суть голоморфные в некоторой окрестности точки $v = 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$h(v) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^m}{(m+1)!} v^{m+1},$$

которая является обратной к целой функции $v = ze^{-z}$, и, поэтому, удовлетворяет равенству $h(v) = ve^{h(v)}$. Но $f(v) = h'(v)$ и $g(v) = e^{h(v)}$. Следовательно,

$$[f(v)g(v)]^{(n)}_{v=0} = [h'(v)e^{h(v)}]^{(n)}_{v=0} = [(e^{h(v)})']^{(n)}_{v=0} = \\ = [e^{h(v)}]^{(n+1)}_{v=0} = g^{(n+1)}(0) = (n+2)^n,$$

и формула (5) доказана. □

Вернемся к уравнению (1) и докажем, что ряд (2), представляющий обобщенное решение поставленной начальной задачи, сходится в обычном смысле (как степенной).

Теорема. *Если $u^0 \in \exp_a E$ и $f(t) \in \exp_a E$ при всех $t \in [0,T]$, то обобщенное решение задачи Коши* (1) *существует на всем указанном отрезке и голоморфно в точке $\varepsilon = 0$.*

Доказательство. Имеем для решения предельной задачи:

$$u_0(t) = U(t)u^0 + \int_0^t U(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Предположим, не ограничивая общности, что u^0 и $f(t)$ при всех $t \in [0,T]$ являются элементами W^{c_0} при некотором $c_0 > 0$. Тогда

$$\|u_0(t)\| \le \|U(t)u^0\| + \int_0^t \|U(t-\tau)f(\tau)\|d\tau \le \|u^0\| + Te^{ac_0} \le e^{ac}$$

при некотором $c > c_0$.

Пользуясь этим неравенством, с помощью метода математической индукции установим следующую оценку:

$$\|u_n(t)\| \le \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} c^n t^n e^{a(n+1)c}. \tag{6}$$

При $n = 1$ формула (6) верна, поскольку

$$\|u_1(t)\| \le \int_0^t \|B(u_0(\tau), u_0(\tau))\|d\tau \le \int_0^t ce^{2ac}d\tau = cte^{2ac}.$$

Пусть неравенство (6) верно при данном натуральном n. Из равенств серии (4) и предположения индукции следует, что

$$||u_{n+1}(t)|| \leq \int\limits_0^t \sum_{k=0}^n ||B(u_k(\tau), u_{n-k}(\tau))|| d\tau \leq$$

$$\leq c^{n+1} \int\limits_0^t \left(1 \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} + 1 \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{3^1}{2!} \cdot \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} \cdot 1 \right) \tau^n d\tau \cdot e^{a(n+2)c} = \frac{(n+2)^n}{n!(n+1)} c^{n+1} t^{n+1} e^{a(n+2)c} =$$

$$= \frac{(n+2)^n}{(n+1)!} c^{n+1} t^{n+1} e^{a(n+2)c}.$$

Таким образом, оценка (6) установлена, откуда и следует сходимость ряда (2) равномерно на отрезке $[0, T]$, в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$. □

Замечание 2. *Так же, как и в теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* [12], *обобщенное решение является непрерывным на отрезке* $[0, T]$. *Это является следствием равномерной сходимости ряда* (2) *на указанном отрезке, поскольку его коэффициенты там непрерывны (даже непрерывно дифференцируемы).*

4. Пример

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения Бюргерса с малой вязкостью ν:

$$u_t = \nu u_{xx} - \varepsilon u u_x, \quad u(x,t,\nu,\varepsilon) \in C[0,\pi], \quad t \in [0,T],$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad x \in [0,\pi].$$

Построенное указанным методом решение имеет следующий вид:

$$u(x,t,\nu,\varepsilon) = e^{-\nu t} \sin x - \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{e^{-2\nu t} - e^{-4\nu t}}{\nu} \sin 2x +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{32} \left(\frac{2e^{-3\nu t} - 3e^{-5\nu t} + e^{-9\nu t}}{\nu^2} \sin 3x - \frac{e^{-5\nu t} - 2e^{-3\nu t} + e^{-\nu t}}{\nu^2} \sin x \right) - \ldots .$$

Ясно, что этот ряд будет сходящимся при $\varepsilon = 1$ на промежутке быть может меньшим, чем отрезок $[0, T]$.

References

[1] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Zbl 0836.47009

[2] V.P. Maslov, *Asymptotic methods and perturbation theory*, Nauka, Moskow, 1988. Zbl 0653.35002

[3] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV*, Academic Press, New York etc., 1978. Zbl 0401.47001

[4] G.M. Khenkin, A.A. Shananin, *The Cauchy-Gelfand problem and the inverse problem for a first-order quasilinear equation*, Funct. Anal. Appl., **50**:2 (2016), 131–142. Zbl 1349.35070

[5] A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov, *Asymptotic expansions of solutions for singularly perturbed problems*, Nauka, Moskow, 1973. Zbl 0364.34028

[6] S.A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Translations of Mathematical Monographs, **112**, AMS, Providence, 1992. Zbl 0782.34063

[7] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer*, Moscow Publishing House University, Moskow, 2011.

[8] V.I. Kachalov, *On one method of solving singularly perturbed systems of Tikhonov's type*, Russ. Math., **62**:6 (2018), 21–26. Zbl 1410.34171

[9] R. Richtmyer, *P*rinciples of advanced mathematical physics. Vol. II, Springer-Verlag, New York etc., 1981. Zbl 0487.00018

[10] O.A. Ladyzhenskaya, *The sixth millennium problem: Navier-Stokes equations, existence and smoothness*, Russ. Math. Surv., **58**:2 (2003), 251–286. Zbl 1062.35067

[11] V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, E.V. Fedotov, *Asymptotic solution of the linearized problem of the propagation of sound in a bounded medium with low viscosity*, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., **27**:1 (1987), 146–153. Zbl 0659.76092

[12] S.G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, Translations of Mathematical Monographs, **29**, AMS, Providence, 1972. Zbl 0229.34050

[13] V.I. Kachalov, S.A. Lomov, *Smoothness of solutions of differential equations with respect to a singular parameter*, Sov. Math., Dokl., **37**:2 (1988), 465–467 (1988). Zbl 0703.34063

[14] E. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford, University Press, Oxford, 1939. Zbl 65.0302.01

Margarita Ilyinichna Besova
National Research University «MPEI»,
14, Krasnokazarmennaya str.,
Moscow, 111250, Russia
Email address: besova.margarita@yandex.ru

Vasiliy Ivanovich Kachalov
National Research University «MPEI»,
14, Krasnokazarmennaya str.
Moscow, 111250, Russia
Email address: vikachalov@rambler.ru