

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №1, стр. 319–331 (2021)  
DOI 10.33048/semi.2021.18.021

УДК 511.528.2  
MSC 11D09

## О ДИСКРИМИНАНТЕ КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ДРОБЯМИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ НОРМЫ И РАЗЛОЖИМОСТИ ЕГО ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО МНОГОЧЛЕНА

А.А. КОРОБОВ, О.А. КОРОБОВ

**ABSTRACT.** The work is devoted to the study of Diophantine equation  $x^2 - y^2(p^2 - 4q) = 4t$ , where  $p = l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k)$ ,  $q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1$ ,  $l = k + m(k^2 - 1)$ , numbers  $k, m, u$  are nonnegative integers, number  $k$  is odd, and the right hand side  $4t$  of the equation is sufficiently small positive integer. We give a complete description of solutions of the Diophantine equation.

**Keywords:** diophantine equation, integer solutions, generalized Pell's equation, quadratic fields, unit group, diophantine approximations.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $a, b$  — произвольные натуральные числа. Рассмотрим неоднородное уравнение Пелля

$$x^2 - y^2(a^2 - 4b) = 4t. \quad (1)$$

При условии  $0 < t < 2\sqrt{a^2 - 4b}$  при некоторых значениях пар  $(a, b)$  можно дать простой критерий разрешимости уравнения (1) в натуральных числах. Ясно, что достаточно ограничиться такими решениями  $(x, y)$  уравнения (1), при которых числа  $x$  и  $y$  взаимно просты. При этом дополнительном предположении в статье [1] рассмотрен случай  $b = 1$ ,  $a$  — нечётное и  $a > 1$ , а в статье [2] рассмотрен более общий случай  $a = kb$ ,  $k, b$  — нечётные и  $k > 1$ . Оказалось, что решения уравнения (1) имеются лишь при  $t = 1$ ,  $t = b$ ,  $t = a + b + 1$ .

KOROBOV, A.A., KOROBOV, O.A., ON THE DISCRIMINANT OF A QUADRATIC FIELD WITH INTERMEDIATE FRACTIONS OF NEGATIVE NORM AND THE DECOMPOSABILITY OF ITS REPRESENTING POLYNOMIAL.

© 2021 Коробов А.А., Коробов О.А.

Поступила 11 июня 2019 г., опубликована 26 марта 2021 г.

Все эти результаты непосредственно вытекают из основных результатов данной статьи.

**Теорема 1.** Пусть  $k, m, t$  — неотрицательные целые числа,  $k$  — нечётное,  $m$  — чётное. Пусть  $k > 1$ ,  $q = km(k^2 - 2) + 1$ ,  $p = k + m(k^4 - 3k^2 + 1)$ ,  $d = p^2 - 4q$ . Если  $0 < t < 2\sqrt{d}$ , и уравнение  $x^2 - y^2d = 4t$  имеет такое решение  $(x, y)$  в натуральных числах, что числа  $x$  и  $y$  взаимно простые, то либо  $t = 1$ , либо  $t = q$ , либо  $t = p + q + 1$ , либо  $t = p + 2q + m(2k^2 + k - 2)$ , либо  $t = p + 2q + 2km(k + 1)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $k, m, u, t$  — неотрицательные целые числа,  $k$  — нечётное. Пусть  $k > 1$ ,  $l = k + m(k^2 - 1)$ ,

$$q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

$$p = l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k),$$

$d = p^2 - 4q$ . Если  $0 < t < 2\sqrt{d}$ , и уравнение  $x^2 - y^2d = 4t$  имеет такое решение  $(x, y)$  в натуральных числах, что числа  $x$  и  $y$  взаимно простые, то либо  $t = 1$ , либо  $t = q$ , либо  $t = 1 + (k^2 - 1)^2u$ , либо  $t = q + (k^2 - 1)u$ , либо

$$t = p + 2q + 2(k^2 - 1)ul + (k^2 - 1)^2u + 2(m - u),$$

либо  $t = p + q + 1$ , либо

$$t = p + q + 1 + uk(k^2 - 1)(k + 2).$$

Из теоремы 2 можно получить такое следствие.

**Следствие 1.** Пусть  $k, m, t$  — неотрицательные целые числа,  $k$  — нечётное. Пусть  $k > 1$ ,  $u = km + 1$ ,  $p = ku - m$ ,  $d = p^2 - 4u$ . Если  $0 < t < 2\sqrt{d}$ , и уравнение  $x^2 - y^2d = 4t$  имеет такое решение  $(x, y)$  в натуральных числах, что числа  $x$  и  $y$  взаимно простые, то либо  $t = 1$ , либо  $t = u$ , либо  $t = p + u + 1$ , либо  $t = p + 2u + 2m$ .

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы будем использовать обозначения, связанные с непрерывными дробями, следуя [3]. Пусть  $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$  — разложение числа  $\alpha$  в непрерывную дробь. Всюду ниже в этой статье для разложения числа  $\alpha$  в непрерывную дробь будет использоваться другое более удобное обозначение, а именно  $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$ . Если в разложении  $\alpha$  после элементов  $a_0, \dots, a_{s-1}$  наступает периодическое повторение элементов  $a_s, \dots, a_{s+k-1}$ , то будем записывать  $\alpha$  в виде:

$$\alpha = \langle a_0, \dots, a_{s-1}, \overline{a_s, \dots, a_{s+k-1}} \rangle,$$

в частности, в случае чисто периодического разложения, то есть при  $s = 0$ , в виде

$$\alpha = \overline{a_0, \dots, a_{k-1}}.$$

**Определение 1.** Пусть  $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$  — разложение числа  $\alpha$  в непрерывную дробь,  $P_i$  и  $Q_i$  — числитель и знаменатель  $i$ -й подходящей дроби к  $\alpha$ , причём числа  $P_i$  и  $Q_i$  взаимно просты. Напомним, что  $P_{-1} = Q_0 = 1$ ,  $Q_{-1} = 0$ . Промежуточной дробью между  $(n-1)$ -й и  $(n+1)$ -й подходящими дробями к  $\alpha$  называется дробь  $\frac{p}{q}$ , где  $p = mP_n + P_{n-1}$ ,  $q = mQ_n + Q_{n-1}$ ,  $m \in \mathbb{N} \cap (0, a_{n+1})$ .

Следующее утверждение доказано в [1].

**Предложение 1.** Пусть иррациональное число  $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$  и рациональное число  $\frac{r}{s}$  ( $(r, s) = 1$ ) с условием  $s \geq \max\{2, Q_1\}$  таковы, что  $|\alpha - \frac{r}{s}| < \frac{2}{s^2}$ . Пусть  $R_k = P_k + 2P_{k-1}$ ,  $S_k = Q_k + 2Q_{k-1}$ ,  $U_k = 2P_k - P_{k-1}$ ,  $V_k = 2Q_k - Q_{k-1}$ . Тогда существует натуральное число  $n$  такое, что выполнено одно из следующих утверждений:

- (1)  $r = P_n$ ,  $s = Q_n$ ;
- (2)  $\frac{r}{s}$  — промежуточная дробь между  $(n-1)$ -й и  $(n+1)$ -й подходящими дробями к  $\alpha$ ;
- (3)  $a_{n+1} = 1$ ,  $r = R_n$ ,  $s = S_n$ ;
- (4)  $r = U_n$ ,  $s = V_n$ .

Пусть  $d$  — натуральное число, не являющееся квадратом целого числа. Известно, что дискриминант базиса  $1, \sqrt{d}$  квадратичного расширения  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  равен  $4d$ . Напомним, что для произвольных рациональных чисел  $a$  и  $b$  нормой элемента  $a + \sqrt{d} \cdot b$  в этом расширении называется число  $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(a + \sqrt{d} \cdot b) = a^2 - db^2$ . Её мы будем обозначать так:  $\text{Norm}(a + \sqrt{d} \cdot b)$ . Обозначим  $\widehat{a + \sqrt{d} \cdot b} = a - \sqrt{d} \cdot b$

**Определение 2.** Пусть  $d$  — натуральное число, не являющееся квадратом. Будем говорить, что дискриминант базиса  $1, \sqrt{d}$  расширения  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  поля  $\mathbb{Q}$  имеет промежуточные дроби с отрицательной нормой, если для любой промежуточной дроби  $\frac{r}{s}$  к числу  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$  выполнено неравенство  $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(2r - s + s\sqrt{d}) < 0$ . Это же свойство мы будем кратко выражать такими словами: число  $d$  имеет промежуточные дроби с отрицательной нормой.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Важность числа  $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$  для поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  хорошо известна. Так если натуральное число  $d$  свободно от квадратов и даёт остаток 1 при делении на 4, то  $\omega$  — порождающий элемент кольца алгебраических целых элементов в  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  (см. [4], теорема 9.2).

**ПРИМЕРЫ.** Дискриминант базиса расширения  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  имеет промежуточные дроби с отрицательной нормой, поскольку между любыми последовательными подходящими дробями к  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , находящимися по одну сторону от числа  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , нет ни одной промежуточной дроби. В статье [1] было показано, что числа вида  $k^2 - 4$  имеют промежуточные дроби с отрицательной нормой при любом нечётном  $k > 1$ . В статье [2] было показано, что числа вида  $k^2 m^2 - 4t$  имеют промежуточные дроби с отрицательной нормой при любом нечётном  $t$  и при любом нечётном  $k > 1$ .

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что числа вида  $(k + m(k^4 - 3k^2 + 1))^2 - 4q$ , где  $q = km(k^2 - 2) + 1$ , имеют промежуточные дроби с отрицательной нормой при любых таких неотрицательных числах  $k, m$ , что  $k$  — нечётное,  $m$  — чётное и  $k > 1$ . Обозначим множество всех таких чисел через  $\mathbb{D}_3$ .

Кроме того, из доказательства теоремы 2 следует, что числа вида

$$d = (l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k))^2 - 4q,$$

где

$$q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

имеют промежуточные дроби с отрицательной нормой при любых таких неотрицательных числах  $k, m, u$ , что  $k$  — нечётное и  $k > 1$ . Обозначим множество

всех таких чисел через  $\mathbb{D}_4$ . В статье будет, в частности, показано, что единственная степень простого числа, принадлежащая  $\mathbb{D}_3$  или  $\mathbb{D}_4$  — это простое число 5.

**Предложение 2.** Пусть  $k, m$  — неотрицательные целые числа,  $k$  — нечётное,  $m$  — чётное. Пусть  $k > 1$ ,

$$\begin{aligned} p &= k + m(k^4 - 3k^2 + 1), \\ q &= km(k^2 - 2) + 1. \end{aligned}$$

Тогда квадратичная иррациональность  $\frac{1+\sqrt{p^2-4q}}{2}$  совпадает с непрерывной дробью

$$\left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle.$$

*Доказательство.* Найдём квадратичную иррациональность  $\alpha$ , совпадающую с указанной непрерывной дробью. Ясно, что  $[\alpha] = \frac{p-1}{2}$ . Обозначим

$$\beta = \overline{\langle 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2 \rangle},$$

а числитель и знаменатель  $i$ -й подходящей дроби к  $\beta$  обозначим через  $P_i$  и  $Q_i$ , соответственно. Тогда  $\beta = \frac{P_9\beta + P_8}{Q_9\beta + Q_8}$ . Непосредственно проверяется, что  $P_8 = k^4 - 3k^2 + 1$ ,

$$P_9 = mk^8 - 6mk^6 + k^5 + (-1 + 11m)k^4 - 4k^3 + (3 - 6m)k^2 + 3k - 1 + m,$$

$$Q_8 = k^4 - k^3 + 2k + 1 - 3k^2,$$

$$\begin{aligned} Q_9 &= mk^8 - mk^7 - 6k^6m + (5m + 1)k^5 + (11m - 2)k^4 + \\ &(-3 - 7m)k^3 + (-6m + 6)k^2 + (1 + 2m)k - 2 + m. \end{aligned}$$

Поэтому  $\beta$  удовлетворяет соотношению  $(p - q - 1)\beta^2 + (2 - p)\beta - 1 = 0$ . Решая квадратное уравнение относительно  $\beta$ , найдём  $\beta = \frac{p-2+\sqrt{p^2-4q}}{2(p-q-1)}$ . Тогда

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\beta} = \frac{p-1}{2} - \frac{p-2}{2} + \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{1+\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Предложение доказано.  $\square$

**Предложение 3.** Пусть  $k, m, u$  — неотрицательные целые числа,  $k$  — нечётное. Пусть  $k > 1$ ,  $l = k + m(k^2 - 1)$ ,

$$q = u(lk^3 - kl - 2k^2 + 1) + km + 1,$$

$$p = l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k),$$

$d = p^2 - 4q$ . Тогда квадратичная иррациональность  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$  совпадает с непрерывной дробью

$$\left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, l-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle.$$

*Доказательство.* Найдём квадратичную иррациональность  $\alpha$ , совпадающую с указанной непрерывной дробью. Ясно, что  $[\alpha] = \frac{p-1}{2}$ . Обозначим

$$\beta = \overline{\langle 1, k-2, 1, k-2, 1, l-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2 \rangle},$$

а числитель и знаменатель  $i$ -й подходящей дроби к  $\beta$  обозначим через  $P_i$  и  $Q_i$ , соответственно. Тогда  $\beta = \frac{P_{11}\beta + P_{10}}{Q_{11}\beta + Q_{10}}$ . Непосредственно проверяется, что

$$P_{10} = lk^4 - 2lk^2 - 2k^3 + 2k + l,$$

$$\begin{aligned} P_{11} &= (pl - l)k^4 + (-l - 2p + 2)k^3 + (2 + 2l - 2pl)k^2 + (2p - 2 + l)k - 1 - l + pl, \\ Q_{10} &= lk^4 + (-2 - l)k^3 + (-2l + 2)k^2 + (2 + l)k - 1 + l, \\ Q_{11} &= (p - q - 1)P_{10}. \end{aligned}$$

Поэтому  $\beta$  удовлетворяет соотношению  $(p - q - 1)\beta^2 + (2 - p)\beta - 1 = 0$ . Решая квадратное уравнение относительно  $\frac{1}{\beta}$ , найдём  $\frac{1}{\beta} = \frac{-p+2+\sqrt{d}}{2}$ . Тогда

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\beta} = \frac{p-1}{2} - \frac{p-2}{2} + \frac{\sqrt{d}}{2} = \frac{1+\sqrt{d}}{2}.$$

Предложение доказано.  $\square$

Из предложений 2,3 следует, что для любого числа  $d$  из объединения  $\mathbb{D}_3 \cup \mathbb{D}_4$  между  $(n-1)$ -й и  $(n+1)$ -й подходящими дробями к  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$  нет промежуточных дробей при любом чётном  $n$ . Все квадратичные иррациональности вида  $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$  при  $a_{2s+1} = 1$  для каждого числа  $s$  также обладают этим свойством. Естественно поставить проблему.

**ПРОБЛЕМА.** Для любого ли чётного числа  $n$  среди нечётных чисел  $d$  существует такое, что  $\frac{1+\sqrt{d}}{2} = \langle a_0, \overline{1}, a_2, \dots, 1, a_{n-2}, 1, a_n \rangle$ , и все промежуточные дроби  $\frac{r}{s}$  к нему удовлетворяют соотношению  $(2r - s)^2 - s^2d < 0$ ? Кроме того, естественно предполагается, что период, указанный в разложении числа  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$  выше, не содержит подпериодов.

Как уже было сказано выше, можно дать утвердительный ответ на этот вопрос для  $n = 2, 4, 6, 10, 12$ . Кроме того, можно показать, что ответ также положительный и при  $n = 8$ .

**Предложение 4.** Пусть  $d$  — нечётное число, не являющееся квадратом,  $\frac{P_i}{Q_i}$  — подходящие дроби к числу  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ . Пусть  $n$  — период непрерывной дроби для  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ . Если

$$2P_n - Q_n + Q_n\sqrt{d} = \frac{1}{2}(2P_0 - Q_0 + Q_0\sqrt{d})(2P_{n-1} - Q_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{d}),$$

то

$$2P_{n+j} - Q_{n+j} + Q_{n+j}\sqrt{d} = \frac{1}{2}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{d})(2P_{n-1} - Q_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{d})$$

для любого  $j = -1, 0, 1, \dots$

*Доказательство.* Обозначим  $\varepsilon = \frac{1}{2}(2P_{n-1} - Q_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{d})$  и будем вести индукцию по  $j$ . Пусть  $\frac{1+\sqrt{d}}{2} = \langle a_0, \overline{a_1}, \dots, a_n \rangle$ . При  $j = -1, 0$  утверждение предложения верно. Пусть для  $j \geq 0$  утверждение предложения справедливо. Тогда

$$\begin{aligned} 2P_{n+j+1} - Q_{n+j+1} + Q_{n+j+1}\sqrt{d} &= 2(a_{j+n+1}P_{n+j} + P_{n+j-1}) - (a_{j+n+1}Q_{n+j} + \\ &+ Q_{n+j-1}) + (a_{j+n+1}Q_{n+j} + Q_{n+j-1})\sqrt{d} = a_{j+n+1}(2P_{n+j} - Q_{n+j} + Q_{n+j}\sqrt{d}) + \\ &+ (2P_{n+j-1} - Q_{n+j-1} + Q_{n+j-1}\sqrt{d}) = a_{j+1}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{d})\varepsilon + (2P_{j-1} - Q_{j-1} + \\ &+ Q_{j-1}\sqrt{d})\varepsilon = (2(a_{j+1}P_j + P_{j-1}) - (a_{j+1}Q_j + Q_{j-1}) + (a_{j+1}Q_j + Q_{j-1})\sqrt{d})\varepsilon = \\ &= (2P_{j+1} - Q_{j+1} + Q_{j+1}\sqrt{d})\varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство индуктивного перехода завершено, и предложение доказано.  $\square$

## 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим  $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ . Пусть  $(x, y)$  — решение уравнения Пелля, т. е.  $x^2 - y^2d = 4t$ , и числа  $x, y$  взаимно просты. Тогда

$$\left(\frac{x+y}{2} + \frac{-1+\sqrt{d}}{2}y\right)\left(\frac{x+y}{2} - \frac{1+\sqrt{d}}{2}y\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{dy^2}{4} = t.$$

Значит,  $\frac{x+y}{2y} > \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ . Поэтому

$$\left|\frac{x+y}{2y} - \alpha\right| = \frac{t}{y^2\left(\frac{x+y}{2y} + \frac{-1+\sqrt{d}}{2}\right)} < \frac{t}{y^2\sqrt{d}} < \frac{2}{y^2}.$$

Итак, пара  $(x, y)$  натуральных чисел одинаковой чётности удовлетворяет ограничению  $\left|\frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{y} - \alpha\right| < \frac{2}{y^2}$ .

Аналогично показывается, что выполнено более сильное неравенство  $\left|\frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{y} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2}$ , если  $t < \sqrt{d}$ .

Пусть сначала  $y \geq 2$ . Так как знаменатель первой подходящей дроби к числу  $\alpha$  равен 1, то по предложению 1 существует натуральное число  $n$  такое, что выполнено одно из следующих утверждений:

- (1)  $\frac{x+y}{2} = P_n, y = Q_n$ ;
- (2)  $\frac{x+y}{2} = iP_n + P_{n-1}, y = iQ_n + Q_{n-1}$ , где  $i \in \mathbb{N} \cap (0, a_{n+1})$ ;
- (3)  $a_{n+1} = 1, \frac{x+y}{2} = R_n, y = S_n$ ;
- (4)  $\frac{x+y}{2} = U_n, y = V_n$ .

Хорошо известно, что при  $t = 1$  случаи 2)-4) не реализуются, поэтому из равенства  $\text{Norm}(a + \sqrt{d} \cdot b) = 4$  вытекает, что  $b$  — знаменатель некоторой подходящей дроби к  $\alpha$ . Непосредственно проверяется, что  $b = Q_9$ . Тогда, по предложению 1,  $a = 2P_9 - Q_9$  и  $\text{Norm}(\varepsilon) = 1$ , где  $\varepsilon = \frac{1}{2}(2P_9 - Q_9 + Q_9\sqrt{d})$ .

Теперь ввиду мультипликативности нормы из предложения 4 (с учётом предложения 2) следует, что  $\text{Norm}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{d}) < 0$  для любого чётного числа  $j$ .

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда число  $n$  нечётно. Поэтому из предложения 4 следует, что  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) \in \{1, q, q + km\}$ .

Можно считать, что  $t \neq 1, t \neq q, t \neq q + km$ . Выше мы показали, что тогда первый случай не реализуется. Предположим, что реализуется второй случай. Поскольку  $a_{2j+1} = 1$ , то для чётного числа  $n$  нет ни одной промежуточной дроби между  $(n-1)$ -й и  $(n+1)$ -й подходящими дробями к иррациональности  $\alpha$ . Поэтому число  $n$  нечётно.

Рассмотрим многочлен

$$f(\tau) = ((2P_n - Q_n)\tau + 2P_{n-1} - Q_{n-1})^2 - d(\tau Q_n + Q_{n-1})^2.$$

На концах интервала  $[0, a_{n+1}]$  эта функция принимает отрицательные значения по доказанному выше. Ясно, что

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} = 2((2P_n - Q_n)^2 - dQ_n^2) > 0.$$

Старший коэффициент квадратного трёхчлена  $f(\tau)$  положителен, поэтому  $f(i) < 0$ . С другой стороны,  $f(i) = x^2 - dy^2 = 4t$ . Полученное противоречие говорит о том, что второй случай не реализуется.

Пусть имеет место третий случай. Тогда  $a_{n+1} = 1$ . Из разложения числа  $\alpha$  в непрерывную дробь заключаем, что  $n$  чётно.

Поэтому (по предложению 4)

$$t = \frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) \in \{p + q + 1, p + 2q + m(2k^2 + k - 2), p + 2q + 2km(k + 1)\}.$$

Теперь можно считать, что

$$t \notin \{1, q, q + km, p + q + 1, p + 2q + m(2k^2 + k - 2), p + 2q + 2km(k + 1)\}.$$

Тогда, согласно предыдущему, имеет место последний случай.

Пусть сначала  $n$  — нечётное число. По предложению 4 тогда

$$t = \frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) \in \{p + q + 1, p + 2q + m(2k^2 + k - 2), p + 2q + 2km(k + 1)\}.$$

Полученное противоречие показывает, что  $n$  чётно. Поэтому либо

- (1)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 4q + 9$ ; либо
- (2)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q + 4mk - 12m(k^2 - 1)$ ; либо
- (3)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q - 12mk^2 + 13mk$ ; либо
- (4)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q + 9mk - 12m(k^2 - 1)$ ; либо
- (5)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 9q + 4$ .

Покажем, что ни один из этих случаев реализоваться не может. Для этого достаточно рассмотреть только третий случай. Тогда  $-6p + 13q + 12mk^2 + 13mk$  представляет собой линейную функцию по  $m$  с коэффициентом наклона  $-6k^4 + 13k^3 + 6k^2 - 13k - 6$ , который при  $k \geq 3$  является отрицательным числом, так как  $-6k^4 + 13k^3 + 6k^2 < 0$ . Таким образом, достаточно показать, что третий случай не реализуется при  $m = 0$ , в чём читатель легко убедится сам.

Итак, рассмотрение случая  $y \geq 2$  закончено. Пусть теперь  $y = 1$ . Так как  $x^2 - d = 4t$ , то  $\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 4t$ . С другой стороны, натуральное число  $\frac{(x + \sqrt{d})\varepsilon - (x - \sqrt{d})\hat{\varepsilon}}{2\sqrt{d}}$  равно  $P_9 + \frac{Q_9(x-1)}{2}$  и строго больше единицы. Согласно предыдущему,

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) \in \{1, q, q + km, p + q + 1, p + 2q + m(2k^2 + k - 2), p + 2q + 2km(k + 1)\}.$$

Так как  $\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 4t$ , то теорема 1 доказана.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Обозначим  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{d}}{2}$ . Пусть  $(x, y)$  — решение уравнения Пелля, т. е.  $x^2 - y^2d = 4t$ , и числа  $x, y$  взаимно просты. Тогда

$$\left(\frac{x + y}{2} + \frac{-1 + \sqrt{d}}{2}y\right)\left(\frac{x + y}{2} - \frac{1 + \sqrt{d}}{2}y\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{dy^2}{4} = t.$$

Значит,  $\frac{x + y}{2y} > \frac{1 + \sqrt{d}}{2}$ . Поэтому

$$\left|\frac{x + y}{2y} - \alpha\right| = \frac{t}{y^2\left(\frac{x + y}{2y} + \frac{-1 + \sqrt{d}}{2}\right)} < \frac{t}{y^2\sqrt{d}} < \frac{2}{y^2}.$$

Итак, пара  $(x, y)$  натуральных чисел одинаковой чётности удовлетворяет ограничению  $\left|\frac{x + y}{2} \cdot \frac{1}{y} - \alpha\right| < \frac{2}{y^2}$ .

Аналогично показывается, что выполнено более сильное неравенство  $|\frac{x+y}{2} - \frac{1}{y} - \alpha| < \frac{1}{y^2}$ , если  $t < \sqrt{d}$ .

Пусть сначала  $y \geq 2$ . Так как знаменатель первой подходящей дроби к числу  $\alpha$  равен 1, то по предложению 1 существует натуральное число  $n$  такое, что либо

- (1)  $\frac{x+y}{2} = P_n, y = Q_n$ ; либо
- (2)  $\frac{x+y}{2} = iP_n + P_{n-1}, y = iQ_n + Q_{n-1}$ , где  $i \in \mathbb{N} \cap (0, a_{n+1})$ ; либо
- (3)  $a_{n+1} = 1, \frac{x+y}{2} = R_n, y = S_n$ ; либо
- (4)  $\frac{x+y}{2} = U_n, y = V_n$ .

Хорошо известно, что при  $t = 1$  случаи 2)-4) не реализуются, поэтому из равенства  $\text{Norm}(a + \sqrt{d} \cdot b) = 4$  вытекает, что  $b$  — знаменатель некоторой подходящей дроби к  $\alpha$ . Непосредственно проверяется, что  $b = Q_{11}$ . Тогда, по предложению 1,  $a = 2P_{11} - Q_{11}$  и  $\text{Norm}(\varepsilon) = 1$ , где  $\varepsilon = \frac{1}{2}(2P_{11} - Q_{11} + Q_{11}\sqrt{d})$ .

Теперь ввиду мультипликативности нормы из предложения 4 (с учётом предложения 3) следует, что  $\text{Norm}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{d}) < 0$  для любого чётного числа  $j$ .

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда число  $n$  нечётно. Поэтому из предложения 4 следует, что

$$\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) \in \{1, q, 1 + (k^2 - 1)^2u, q + (k^2 - 1)u\}.$$

Можно считать, что

$$t \notin \{1, q, 1 + (k^2 - 1)^2u, q + (k^2 - 1)u\}.$$

Выше мы показали, что тогда первый случай не реализуется. Предположим, что реализуется второй случай. Поскольку  $a_{2j+1} = 1$ , то для чётного числа  $n$  нет ни одной промежуточной дроби между  $(n-1)$ -й и  $(n+1)$ -й подходящими дробями к иррациональности  $\alpha$ . Поэтому число  $n$  нечётно. Рассмотрим многочлен

$$f(\tau) = ((2P_n - Q_n)\tau + 2P_{n-1} - Q_{n-1})^2 - d(\tau Q_n + Q_{n-1})^2,$$

аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, придём к выводу, что второй случай тоже не реализуется.

Пусть имеет место третий случай. Тогда  $a_{n+1} = 1$ . Из разложения числа  $\alpha$  в непрерывную дробь заключаем, что  $n$  чётно.

Поэтому (по предложению 4)

$$t \in \{p+2q+2(k^2-1)ul+(k^2-1)^2u+2(m-u), p+q+1, p+q+1+uk(k^2-1)(k+2)\}.$$

Теперь можно считать, что

$$t \notin \{p+2q+2(k^2-1)ul+(k^2-1)^2u+2(m-u), p+q+1, p+q+1+uk(k^2-1)(k+2)\}.$$

Тогда, согласно предыдущему, имеет место последний случай.

Пусть сначала  $n$  — нечётное число. По предложению 4 тогда

$$t \in \{p+2q+2(k^2-1)ul+(k^2-1)^2u+2(m-u), p+q+1, p+q+1+uk(k^2-1)(k+2)\}.$$

Полученное противоречие показывает, что  $n$  чётно. Поэтому либо

- (1)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 4q + 9$ ; либо
- (2)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q - 12(k^2 - 1)ul + 4u(k^2 + 3k - 1) - 12m$ ; либо

- (3)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 9q + u(4k^4 - 12k^3 + k^2 + 12k - 5) + 4$ ; либо  
 (4)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 4q + u(9k^4 - 12k^3 - 14k^2 + 12k + 5) + 9$ ; либо  
 (5)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) =$   
 $-6p + 13q - 12(k^2 - 1)ul + 3u(3k^2 + 4k - 3) - 12m$ ; либо  
 (6)  $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 9q + 4$ .

Покажем, что ни один из этих случаев реализоваться не может. Для этого достаточно рассмотреть только пятый случай. Тогда

$$-6p + 13q - 12(k^2 - 1)ul + 3u(3k^2 + 4k - 3) - 12m$$

представляет собой линейную функцию по  $u$  с коэффициентом наклона

$$-6k^6m + (-6 + 13m)k^5 + (13 + 6m)k^4 + (12 - 26m)k^3 + (6m - 30)k^2 + (13m + 6)k + 4 - 6m,$$

который при  $k \geq 3$  является отрицательным числом, так как  $-6k^6 + 13k^5 + (6 + \frac{13}{m})k^4 < 0$  при  $m \neq 0$ . Таким образом, достаточно показать, что третий случай не реализуется при  $m = 0$  и при  $u = 0$ , в чём читатель легко убедится сам.

Итак, рассмотрение случая  $y \geq 2$  закончено. Пусть теперь  $y = 1$ . Так как  $x^2 - d = 4t$ , то  $\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 4t$ . С другой стороны, натуральное число  $\frac{(x + \sqrt{d})\varepsilon - (x - \sqrt{d})\varepsilon}{2\sqrt{d}}$  равно  $P_{11} + \frac{Q_{11}(x-1)}{2}$  и строго больше единицы. Согласно предыдущему, либо  $\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 1$ , либо  $\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = q$ , либо  $\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 1 + (k^2 - 1)^2u$ , либо

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = q + (k^2 - 1)u,$$

либо

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = p + 2q + 2(k^2 - 1)ul + (k^2 - 1)^2u + 2(m - u),$$

либо

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = p + q + 1,$$

либо

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = p + q + 1 + uk(k^2 - 1)(k + 2).$$

Так как  $\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 4t$ , то теорема 2 доказана.

## 5. ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕЛЛЯ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ИЗ

$$\mathbb{D}_3 \cup \mathbb{D}_4$$

**Определение 3.** Решение  $(x, y)$  неоднородного уравнения Пелля назовём примитивным, если числа  $x$  и  $y$  взаимно просты.

**Следствие 2.** Пусть  $k, m$  — неотрицательные целые числа,  $k$  — нечётное. Пусть  $k > 1$ ,

$$q = km(k^2 - 2) + 1,$$

$$p = k + m(k^4 - 3k^2 + 1),$$

$d = p^2 - 4q$ ,  $\frac{P_i}{Q_i}$  — подходящие дроби к числу  $\frac{1 + \sqrt{d}}{2}$ ,  $R_i = P_i + 2P_{i-1}$ ,  $S_i = Q_i + 2Q_{i-1}$ . Тогда

- (1)  $\{(2P_{10n+9} - Q_{10n+9}, Q_{10n+9}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4$ ;

- (2)  $\{(2P_{10n+1} - Q_{10n+1}, Q_{10n+1}), (2P_{10n+7} - Q_{10n+7}, Q_{10n+7}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$   
 — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4q$ ;
- (3)  $\{(2P_{10n+3} - Q_{10n+3}, Q_{10n+3}), (2P_{10n+5} - Q_{10n+5}, Q_{10n+5}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$   
 — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(q + kt)$ ;
- (4)  $\{(2R_{10n} - S_{10n}, S_{10n}), (2R_{10n+8} - S_{10n+8}, S_{10n+8}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(p + q + 1)$ ;
- (5)  $\{(2R_{10n+2} - S_{10n+2}, S_{10n+2}), (2R_{10n+6} - S_{10n+6}, S_{10n+6}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$   
 — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(p + 2q + t(2k^2 + k - 2))$ ;
- (6)  $\{(2R_{10n+4} - S_{10n+4}, S_{10n+4}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(p + 2q + 2kt(k + 1))$ .

*Доказательство.* Обозначим  $V_i = 2Q_i - Q_{i-1}$ . При  $n \in \mathbb{N}$  имеем

$$V_{2n+1} = 2Q_{2n+1} - Q_{2n} = 2(Q_{2n} + Q_{2n-1}) - Q_{2n} = Q_{2n} + 2Q_{2n-1} = S_{2n}.$$

Поэтому последний случай предложения 1 новых примитивных решений уравнений Пелля, отличных от перечисленных в утверждениях 1)-6), не даёт. Остальные утверждения проверяются так же, как при доказательстве теоремы 1. Следствие доказано.  $\square$

**Следствие 3.** Пусть  $k, t, u$  — неотрицательные целые числа,  $k$  — нечётное. Пусть  $k > 1$ ,  $l = (k + t(k^2 - 1))$ ,

$$q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + kt + 1,$$

$$p = l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k),$$

$d = p^2 - 4q$ ,  $\frac{P_i}{Q_i}$  — подходящие дроби к числу  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ ,  $R_i = P_i + 2P_{i-1}$ ,  $S_i = Q_i + 2Q_{i-1}$ . Тогда

- (1)  $\{(2P_{12n+11} - Q_{12n+11}, Q_{12n+11}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4$ ;
- (2)  $\{(2P_{12n+1} - Q_{12n+1}, Q_{12n+1}), (2P_{12n+9} - Q_{12n+9}, Q_{12n+9}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$   
 — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4q$ ;
- (3)  $\{(2P_{12n+3} - Q_{12n+3}, Q_{12n+3}), \{(2P_{12n+7} - Q_{12n+7}, Q_{12n+7}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$   
 — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(q + (k^2 - 1)u)$ ;
- (4)  $\{(2P_{12n+5} - Q_{12n+5}, Q_{12n+5}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(1 + (k^2 - 1)^2u)$ ;
- (5)  $\{(2R_{12n} - S_{12n}, S_{12n}), (2R_{12n+10} - S_{12n+10}, S_{12n+10}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(p + q + 1)$ ;
- (6)  $\{(2R_{12n+2} - S_{12n+2}, S_{12n+2}), (2R_{12n+8} - S_{12n+8}, S_{12n+8}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$   
 — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(p + 2q + 2(k^2 - 1)ul + (k^2 - 1)^2u + 2(t - u))$ .
- (7)  $\{(2R_{12n+4} - S_{12n+4}, S_{12n+4}), (2R_{12n+6} - S_{12n+6}, S_{12n+6}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$   
 — множество всех примитивных решений уравнения  $x^2 - y^2d = 4(p + q + 1 + uk(k^2 - 1)(k + 2))$ .

*Доказательство.* Обозначим  $V_i = 2Q_i - Q_{i-1}$ . Так как для любого неотрицательного числа  $n$  имеем

$$V_{2n+1} = 2Q_{2n+1} - Q_{2n} = 2(Q_{2n} + Q_{2n-1}) - Q_{2n} = Q_{2n} + 2Q_{2n-1} = S_{2n},$$

то снова последний случай предложения 1 новых примитивных решений уравнений Пелля, отличных от перечисленных в утверждениях 1)-7) следствия 3, не даёт. Остальные утверждения следствия 3 проверяются так же, как при доказательстве теоремы 2. Следствие 3 доказано.  $\square$

## 6. ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ $\mathbb{D}_3$ И $\mathbb{D}_4$

Пусть

$$g_1(x, y) = 32yx^4 + 160yx^3 + 280yx^2 + 2x + 200yx + 50y + 1,$$

$$g_2(x, y) = 32yx^4 + 224yx^3 + 568yx^2 + 2x + 616yx + 242y + 5.$$

С помощью алгоритма Евклида легко убедиться, что многочлены взаимно просты.

Пусть

$$f_1(x, y, z) = 64z + 1 + 192zx + 208zx^2 + 96zx^3 + 16zx^4,$$

$$f_2(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned} & 256y^2x^8z + (3072zy^2 + 256zy)x^7 + (64z + 15872zy^2 + 2688zy)x^6 + \\ & (46080zy^2 + 576z + 11776zy)x^5 + (27840zy + 2064z + 82176zy^2 + 16y^2)x^4 + \\ & (38272zy + 92160zy^2 + 3744z + 16y + 96y^2)x^3 + \\ & (3600z + 30528zy + 63488zy^2 + 4 + 208y^2 + 72y)x^2 + \\ & (13056zy + 1728z + 24576zy^2 + 12 + 96y + 192y^2)x + \\ & 2304zy + 324z + 4096zy^2 + 64y^2 + 36y + 5. \end{aligned}$$

С помощью алгоритма Евклида легко убедиться, что многочлены взаимно просты.

**Следствие 4.** *Каждый элемент из  $\mathbb{D}_3$  представим в виде значения многочлена  $g = g_1g_2$  на паре неотрицательных целых чисел, и такое представление единственно.*

*Доказательство.* Пусть  $d \in \mathbb{D}_3$ . Тогда по определению найдётся нечётное натуральное число  $k$ , отличное от единицы, такое, что

$$d = (k + m(k^4 - 3k^2 + 1))^2 - 4(km(k^2 - 2) + 1) \quad (2)$$

для некоторого чётного неотрицательного целого числа  $m$ . Тогда  $x = \frac{k-3}{2}$  — неотрицательное целое число. Непосредственно проверяется, что  $d = g(x, \frac{m}{2})$ . Существование нужного представления доказано.

Если теперь есть какое-то представление числа  $d$  в виде (2), то квадратичное слагаемое будем обозначать через  $p^2$ , а другое слагаемое, поделённое на  $-4$ , будем называть линейным остатком и обозначать через  $q$ .

Теперь докажем единственность. По предложению 2 имеем

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} = \left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle.$$

Поэтому арифметический квадратный корень  $p$  из квадратичного слагаемого числа  $d$  и число  $k$  определены единственным образом. Из соотношения  $d = p^2 - 4q$  линейный остаток  $q$  определяется однозначно. Тогда из соотношения  $q = km(k^2 - 2) + 1$  число  $m$  определяется однозначно. Следствие 4 доказано.  $\square$

**Следствие 5.** *Каждый элемент из  $\mathbb{D}_4$  представим в виде значения многочлена  $f = f_1 f_2$  на тройке неотрицательных целых чисел, и такое представление единственно.*

*Доказательство.* Пусть  $d \in \mathbb{D}_4$ . Тогда по определению найдётся нечётное натуральное число  $k$ , отличное от единицы, такое, что

$$d = (k + m(k^2 - 1) + u(k^2 - 1)((k + m(k^2 - 1))(k^2 - 1) - 2k))^2 - 4(u((k + m(k^2 - 1))k^3 - 2k^2 - k(k + m(k^2 - 1)) + 1) + km + 1) \quad (3)$$

для некоторых неотрицательных целых чисел  $u, m$ . Тогда  $x = \frac{k-3}{2}$  — неотрицательное целое число. Непосредственно проверяется, что  $d = f(x, u, m)$ . Существование нужного представления доказано.

Снова если есть какое-то представление числа  $d$  в виде (3), то квадратичное слагаемое будем обозначать через  $p^2$ , а другое слагаемое, поделённое на  $-4$ , будем называть линейным остатком и обозначать через  $q$ . Коэффициент при  $k^3$  в  $q$  будем обозначать через  $ul$ , и  $l$  будем называть его главной частью.

Теперь докажем единственность. По предложению 3 имеем

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} = \left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, l-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle.$$

Поэтому арифметический квадратный корень  $p$  из квадратичного слагаемого числа  $d$  и число  $k$  определены единственным образом. Кроме того, единственным образом определяется главная часть  $l$  коэффициента при  $k^3$  линейного остатка для числа  $d$ . Из соотношений  $d = p^2 - 4q$ ,  $l = (k + m(k^2 - 1))$  числа  $q$  и  $m$  определяются однозначно. Тогда из соотношения  $q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1$  число  $u$  определяется однозначно. Следствие доказано.  $\square$

## 7. РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ВХОЖДЕНИЯ В $\mathbb{D}_3$ И $\mathbb{D}_4$

Опишем простой алгоритм, решающий проблему вхождения нечётного числа  $d$  в множество  $\mathbb{D}_3$ .

Шаг 1. Раскладываем число  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$  в непрерывную дробь. Если

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} \neq \left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle,$$

где  $k, p$  — нечётные числа, то  $d \notin \mathbb{D}_3$ .

Шаг 2. Полагаем  $q = \frac{p^2-d}{4}$ . Если  $q \notin \mathbb{Z}$ , то  $d \notin \mathbb{D}_3$ .

Шаг 3. Полагаем

$$m = \frac{p-k}{k^4 - 3k^2 + 1}.$$

Если  $m \notin 2\mathbb{Z}_+$ , то  $d \notin \mathbb{D}_3$ .

Шаг 4. Если  $q \neq km(k^2 - 2) + 1$ , то  $d \notin \mathbb{D}_3$ , а если  $q = km(k^2 - 2) + 1$ , то  $d \in \mathbb{D}_3$ .

Наконец, опишем простой алгоритм, решающий проблему вхождения нечётного числа  $d$  в множество  $\mathbb{D}_4$ .

Шаг 1. Раскладываем число  $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$  в непрерывную дробь. Если

$$\frac{1+\sqrt{d}}{2} \neq \left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, l-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle,$$

где  $k, l, p$  — нечётные числа, то  $d \notin \mathbb{D}_4$ .

Шаг 2. Полагаем  $q = \frac{p^2-d}{4}$ . Если  $q \notin \mathbb{Z}$ , то  $d \notin \mathbb{D}_4$ .

Шаг 3. Полагаем

$$u = \frac{p-l}{(k^2-1)(l(k^2-1)-2k)}.$$

Если  $u \notin \mathbb{Z}_+$ , то  $d \notin \mathbb{D}_4$ .

Шаг 4. Полагаем  $m = \frac{l-k}{k^2-1}$ . Если  $m \notin \mathbb{Z}_+$ , то  $d \notin \mathbb{D}_4$ .

Шаг 5. Если

$$q \neq u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

то  $d \notin \mathbb{D}_4$ , а если

$$q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

то  $d \in \mathbb{D}_4$ .

#### REFERENCES

- [1] F. Luca, C.F. Osgood, P.G. Walsh, *Diophantine approximations and a problem from the 1988 IMO*, Rocky Mt. J. Math., **36**:2 (2006), 637–648. Zbl 1161.11022
- [2] A.A. Korobov, *On solvability conditions of one family of Pell's equations*, Mat. Zamet. YAGU, **20**:1 (2013), 44–49. Zbl 1289.11032
- [3] A.A. Bukhshtab, *Number Theory*, Prosveschenie, Moscow, 1966. Zbl 0144.27402
- [4] G.J. Janusz, *Algebraic number fields*, Graduate Studies in Mathematics, **7**, AMS, Providence, 1996. Zbl 0854.11001

KOROBOV ALEXEI ALEXANDROVICH  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 4, KOPTYUGA AVE.,  
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
 2, PIROGOVA STR.,  
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA  
*Email address: korobov@math.nsc.ru*

KOROBOV OLEG ALEXEEVICH  
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
 2, PIROGOVA STR.,  
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA  
*Email address: vasa01011993@gmail.com*