S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 512.542
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 20E28

О НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ, В КОТОРЫХ КАЖДАЯ n-МАКСИМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА ЯВЛЯЕТСЯ СТРОГО n-МАКСИМАЛЬНОЙ ($n = 2; 3$)

Ю.В. Горбатова

Abstract. We describe the structure of finite nonnilpotent groups in which every n-maximal subgroup is strongly n-maximal subgroup and either any two n-maximal subgroups are permutable, or every n-maximal subgroup is S-quasinormal subgroup ($n = 2; 3$).

Keywords: nilpotent group, solvable group, n-maximal subgroup, strongly n-maximal subgroup, normal subgroup, S-quasinormal subgroup, Schmidt group, permutation subgroups.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы являются конечными.

Gorbatova, Ju.V., On nonnilpotent groups in which every n-maximal subgroup is strongly n-maximal subgroup ($n = 2; 3$).

Received January, 1, 2015, published March, 1, 2015.

Напомним ряд используемых понятий. Подгруппа H группы G называется 2-максимальной или второй максимальной подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т. д. n-Максимальная подгруппа группы G называется строго n-максимальной, если она не является n-максимальной подгруппой ни в одной собственной подгруппе группы G. Подгруппа H группы G называется S-квазинормальной или S-перестановочной в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G.

Связь между n-максимальными подгруппами при $n > 1$ группы G и ее структурой исследовалась многими авторами. Наиболее ранние результаты в данном направлении были получены Редеи [1], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хуппертом [2], установившим сверхразрешимость группы, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является нормальной. Развивая эти результаты, Янко в работе [3] получил описание групп, в которых 4-максимальные подгруппы нормальны. Годом позже в работе [4] Янко изучил группы, у которых кроме единичной других 5-максимальных подгрупп не существует. В работах Судзуки [5] и Янко [6] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В.А. Белоноговым в работе [7]. Эти результаты получили развитие в работе В.Н. Семенчука [8], где дано описание разрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы. Отметим также работу Агравааля [9], в которой доказано, что группа G является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами группы G, и работу Асаада [10], в которой были получены аналоги результатов Хупперта для строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгрупп. Заметим, что в работе П. Флавелла [11] была найдена точная верхняя граница числа максимальных подгрупп группы, содержащих строго 2-максимальную подгруппу, и описаны группы, в которых эта граница достигается.

В последние два десятилетия получен ряд новых результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. Отметим, в частности, что в работе [12] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все вторые максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [13, 14, 15] Го Веньбинем, Ли Баоджуном, А.Н. Скибой и К.П. Шамом были получены новые характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. В работе [16] получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а в работе [17] получено описание групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами. Последние два результата получили развитие в работе Ю.В. Луценко (Горбатовой), Го Веньбиня и А.Н. Скибы [18], в которой получено точное строение ненильпотентных групп, любые две 2-максимальные подгруппы которых перестановочны; а также ненильпотентных групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. Основываясь на этих результатах, в работе [19] автором получено полное описание ненильпотентных групп с нормальными строго 3-максимальными подгруппами. Отметим также работу [20], в которой авторы описали точное строение групп с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами. Опираясь на этот результат, в работе [21] авторами была решена задача полного описания групп с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами. В свою очередь полное описание ненильпотентных групп с S-квазинормальными 3-максимальными подгруппами, а также групп с S-квазинормальными строго 3-максимальными подгруппами было получено авторами в работах [22] и [23] соответственно.

В связи с последними результатами вполне естественным является вопрос о строении ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная или 3-максимальная подгруппа являются строго 2-максимальной или 3-максимальной подгруппой соответственно. Настоящая работа посвящена решению этого вопроса в случае, когда каждая n-максимальная подгруппа является строго n-максимальной и при этом либо любые две n-максимальные подгруппы перестановочны, либо каждая n-максимальная подгруппа является S-квазинормальной (для $n = 2; 3$).

2. Вспомогательные результаты

Лемма 2.1 ([24], глава VI, теоремы 26.1 и 26.2). *Если G — группа Шмидта, то*

(1) $G = [P] < a >$, где $P, < a >$ — силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G, соответственно;

(2) G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P < a^q >$ и $P' < a >$;

(3) $G' = P$*;*

(4) $\Phi(G) = Z(G) = P' \times < a^q >$*;*

(5) $P/\Phi(P)$ *— главный фактор группы* G*, причем, если* $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$*, то* p^α *сравнимо с единицей по модулю* q*;*

(6) Наибольшая нормальная подгруппа группы G*, строго содержащаяся в* P*, совпадает с* $\Phi(P) = P' = C_P(a)$*;*

(7) Если P *абелева, то она элементарна;*

(8) Если P *неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту* p*.*

Лемма 2.2 ([18], лемма 2.3). *Пусть* G *— ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) любые две 2*-максимальные подгруппы группы* G *являются перестановочными;*

(2) G *является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Теорема 2.3 ([18], теорема 3.1). *Пусть* G *— ненильпотентная группа. Тогда любые две* 3*-максимальные подгруппы группы* G *перестановочны в том и только в том случае, когда* G *является группой одного из следующих типов:*

I. G *— группа Шмидта одного из видов:*

(a) G *— группа с абелевыми силовскими подгруппами;*

(b) $G = [P]Q$*, где* P *изоморфна либо группе* $M_3(p)$*, либо группе кватернионов порядка* 8*;*

(c) $G = [P]Q$*, где* $|P| > p^3, |\Phi(P)| = p$ *и* $\Phi(P) = \Phi^2(P)$*;*

II. G *— бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:*

(1) $G = [P]Q$*, где* P *— минимальная нормальная подгруппа группы* G*,* Q *— циклическая группа и* $[P]\Phi(Q)$ *— группа Шмидта;*

(2) $G = ([P]Q_1) \times C_q$*, где* P *— минимальная нормальная подгруппа группы* G*,* $|C_q| = q$ *и* PQ_1 *— группа Шмидта;*

(3) $G = [P]Q$*, где* P *— минимальная нормальная подгруппа группы* G*,* $Q = \langle a\rangle \times \langle b\rangle, |a| = |b| = q$*,* $P\langle a\rangle$ *и* $P\langle b\rangle$ *— группы Шмидта;*

(4) $G = [P]Q$*, где* $|P| = p, p > 2$ *и* Q *изоморфна группе кватернионов порядка* 8*;*

(5) $G = ([P]Q_1)C_q$*, где* P *— минимальная нормальная подгруппа группы* G*,* $Q_1 = \langle a\rangle$*,* $C_q = \langle b\rangle$*,* $|Q_1C_q| = q^\beta$*,* $|a| = q^{\beta-1}$ *(*$\beta \geq 3$*),* PQ_1 *— группа Шмидта,* $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ *и* $[P, C_1] = 1$ *для всякой подгруппы* C_1*, изоморфной* C_q*;*

(6) $G = [P]Q$, *где* $\Phi(P)$ *— минимальная нормальная подгруппа группы* G, *обе группы* $\Phi(P)Q$ *и* $G/\Phi(P)$ *являются группами Шмидта, максимальная подгруппа из* Q *совпадает с* $Z(G)$ *и любые две 2-максимальные подгруппы из* P *перестановочны;*

(7) G *— подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(8) $G = [P_1 \times C_p]Q$, *где* P_1 *— минимальная нормальная* p*-подгруппа группы* G, $|C_p| = p$, P_1Q *— группа Шмидта, максимальная подгруппа из* Q *содержится в* $Z(G)$ *и* $[C_p, Q] = 1$;

(9) $G = [[P_1]Q]C_p$, *где* P_1 *— минимальная нормальная* p*-подгруппа группы* G, $|Q| = q$, $|C_p| = p$, $N_G(Q) = [Q]C_p$ *и* P_1C_p *— абелева группа;*

III. G *— группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя* p, q, r *и которая является группой одного из следующих видов:*

(i) $G = ([P]Q)R$, *где* P *и* R *— минимальные нормальные подгруппы группы* G, Q *— циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = [R](P \times Q)$, *где* $|P| = p$, $|Q| = q$ *и* $R = F(G)$ *— минимальная нормальная подгруппа группы* G.

Лемма 2.4 ([25], глава VI, лемма 4.7). *Пусть* $G = G_1G_2$. *Тогда для любого простого числа* p *существуют такие силовские* p*-подгруппы* P, P_1, P_2 *соответственно в* G, G_1, G_2, *что* $P = P_1P_2$.

Лемма 2.5 ([26], глава V, теорема 5.1). *Неабелева* p*-группа* P *порядка* p^3 *является экстраспециальной и изоморфна одной из групп* $M_3(p), M(p), D$, *или* Q.

Лемма 2.6 ([26], глава V, теорема 4.3). *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Пусть* $P = M_m(p)$. *Тогда:*

(a) $cl(P) = 2$ *и* $|P'| = p$.

(b) $\Phi(P) = Z(P)$ *— циклическая группа порядка* p^{m-2}.

(c) $\Omega_i(P)$ *— абелева группа типа* $(p^i, p), 1 \leq i \leq m-2$.

(ii) *Пусть* $P = D_m, m \geq 3, Q_m$, *или* S_m. *Тогда*

(a) $cl(P) = m - 1$.

(b) $\Phi(P) = P'$ *— циклическая группа порядка* 2^{m-2}.

(c) $|Z(P)| = 2$ *и* $P/Z(P) \simeq D_{m-1}$.

(d) P *обладает нециклической абелевой подгруппой порядка 8.*

(e) *Если* $P = D_m$, *то* $\Omega_1(P) = P, d(P) = 2, d_c(P) = 1$ *и либо* $d_n(P) = 2$ $(m = 3)$, *либо* $d_n(P) = 1$ $(m > 3)$.

(f) *Если* $P = Q_m$, *то* $\Omega_1(P) = Z(P)$ *и* $d(P) = 1$. *Более того, максимальная подгруппа из* P *является либо циклической, либо обобщенной группой кватернионов.*

(g) *Если* $P = S_m$, *то* $\Omega_1(P) \simeq D_{(m-1)}$, $d(P) = 2$ *и* $d_c(P) = 1$. *Более того, максимальная подгруппа из* P *является либо циклической, либо обобщенной группой кватернионов, либо обобщенной группой диэдра.*

(iii) *Никакие из двух подгрупп* $M_m(p), D_m, Q_m, S_m$ *не являются изоморфными.*

Лемма 2.7 ([26], глава V, теорема 4.4). *Пусть* P — *неабелева* p*-группа порядка* p^m, *которая содержит циклическую подгруппу* H *порядка* p^{m-1}. *Тогда:*

(i) *если* p *нечетное, то* $P \simeq M_m(p)$;

(ii) *если* $p = 2$ *и* $m = 3$, *то* P *изоморфна одной из групп* D, *или* Q;

(iii) *если* $p = 2$ *и* $m > 3$, *то* P *изоморфна одной из групп* $M_m(2), S_m, D_m$, *или* Q_m.

Лемма 2.8 ([27], теорема 14.3.1). *Если силовская подгруппа* P *конечной группы* G *содержится в центре своего нормализатора, то группа* G *обладает таким нормальным делителем* H, *что в качестве представителей смежных классов по* H *можно выбрать элементы группы* P.

Лемма 2.9 ([28], лемма 1). *Если каждая* n*-максимальная подгруппа группы* G *субнормальна, то каждая* $(n-1)$*-максимальная подгруппа группы* G *является нильпотентной.*

Лемма 2.10 ([28], лемма 3). *Пусть* $F(G)$ — *подгруппа Фиттинга группы* G. *В том и только в том случае каждая* n*-максимальная подгруппа группы* G *является субнормальной, когда каждая* n*-максимальная подгруппа группы* G *содержится в* $F(G)$.

Лемма 2.11 ([28], следствие 1). *Если каждая 2-максимальная или каждая 3-максимальная подгруппа группы* G *субнормальна, то* G *разрешима.*

Лемма 2.12 [29]. *Пусть* G — *группа и* $H \leq K \leq G$. *Тогда*

(1) Если H S*-перестановочна в* G, *то* H S*-перестановочна в* K.

(2) Допустим, что H *нормальна в* G. *Тогда* K/H S*-перестановочна в* G/H *тогда и только тогда, когда* K S*-перестановочна в* G.

(3) Если H S*-перестановочна в* G, *то* H *субнормальна в* G.

Лемма 2.13 ([25], глава III, теорема 8.3). *Предположим, что G — группа с $|G| = p^n$. Если G имеет точно одну подгруппу порядка p^m $(1 < m < n)$, то G является циклической группой.*

3. Строение ненильпотентных групп, в которых каждая n-максимальная подгруппа является строго n-максимальной, и при этом любые две n-максимальные подгруппы перестановочны $(n = 2; 3)$

Следующая лемма описывает строение ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной, и при этом любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны.

Лемма 3.1. *Пусть G — ненильпотентная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Тогда в том и только в том случае в группе G любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны, когда G является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — ненильпотентная группа, в которой любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны и при этом каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Тогда G удовлетворяет условию леммы 2.2 и поэтому G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами P и Q, где P — нормальная силовская подгруппа.

Пусть $|Q| > q$. Тогда в силу леммы 2.1(2) группа G имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q и PQ_1, где Q_1 — максимальная подгруппа группы Q. Следовательно, G имеет точно три класса 2-максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q_1, P_1Q_1 и PQ_2, где Q_2 — 2-максимальная подгруппа в Q и P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P. По условию, Q_1 является строго 2-максимальной подгруппой в G и поэтому $P_1 = 1$. Это влечет $|P| = p$.

Теперь допустим, что $|Q| = q$. В этом случае G имеет два класса максимальных подгрупп P и Q^x. Следовательно, единичная подгруппа и все максимальные подгруппы из P являются 2-максимальными подгруппами в G. Если при этом $|P| > p$, то единичная подгруппа группы G не является строго 2-максимальной, что противоречит условию. Полученное противоречие показывает, что $|P| = p$.

Достаточность. Пусть G является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок. Тогда в силу леммы 2.2, в группе G любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны. Лемма доказана.

Следующая теорема описывает строение ненильпотентных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной, и при этом любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны.

Теорема 3.2. *Пусть G — ненильпотентная группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной. Тогда в том и только в том случае в группе G любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r — простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G является группой одного из следующих типов:*

(1) $G = [P]Q$, где $|P| = p, |Q| = q^\beta$ $(\beta \geq 3)$; группа Q либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$; и всякий элемент из Q, порядок которого меньше $q^{\beta-1}$, принадлежит $C_G(P)$;

(2) $G = [P]Q$, где P — циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;

(3) $G = [P_1 \times P_2]Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q — группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта;

(4) $G = ([P]Q)R$, где P и R — минимальные нормальные подгруппы группы G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q — циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — ненильпотентная группа, в которой любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны и каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной. Очевидно, что G удовлетворяет условию теоремы 2.3 и поэтому G является группой одного из типов, описанных в этой теореме. Отметим, что при этом для каждой максимальной подгруппы группы G выполняется условие леммы 3.1, и поэтому каждая собственная подгруппа H группы G является либо нильпотентной группой, либо группой Шмидта. Причем, если H — группа Шмидта, то H максимальна в G и при этом H имеет нормальную силовскую подгруппу простого порядка.

Предположим, что G является группой типа I в теореме 2.3, т. е. $G = [P]Q$ — группа Шмидта, где P и Q — силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G, соответственно.

Пусть P — абелева группа, т. е. G является группой типа I(a) в теореме 2.3. Допустим, что $|Q| > q$. Тогда в силу леммы 2.1(2) максимальными в G являются подгруппы PQ_1 и Q^x, где Q_1 — максимальная подгруппа в Q. Следовательно, представителями 2-максимальных подгрупп в G являются подгруппы Q_1, PQ_2 и P_1Q_1, где Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1 и P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P. Таким образом, представителями 3-максимальных подгрупп в G являются подгруппы Q_2, PQ_3, P_1Q_2 и P_2Q_1, где Q_3 — максимальная подгруппа в Q_2 и P_2 — некоторая максимальная подгруппа в P_1. Если $Q_2 \neq 1$ и при этом $P_1 \neq 1$, то Q_2 не является строго 3-максимальной подгруппой в G, что противоречит условию. Следовательно, $P_1 = 1$ и поэтому $|P| = p$. Таким образом, G является группой типа (1). Если $Q_2 = 1$ и при этом $P_1 \neq 1$, то единичная подгруппа Q_2 не является строго 3-максимальной подгруппой группы G, так как Q_2 и P_1 в этом случае являются 3-максимальными подгруппами в G, противоречие. Это влечет $P_1 = 1$ и поэтому $|G| = pq^2$.

Теперь допустим, что $|Q| = q$. В этом случае 3-максимальными подгруппами в G являются все 2-максимальные подгруппы из P и единичная подгруппа. Если при этом $|P| > p^2$, то единичная 3-максимальная подгруппа не является строго 3-максимальной подгруппой в группе G, что противоречит условию. Следовательно, $|P| \leq p^2$ и поэтому $|G| \leq p^2q$.

Пусть теперь P — неабелева группа, т. е. G является группой типов I(b) или I(c) в теореме 2.3. Допустим, что $|Q| > q$. Тогда подгруппы P_1Q_2 и $\Phi(P)Q_2$ являются 3-максимальными в G, где Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1 и P_1 — произвольная максимальная подгруппа в P. Если $P_1 \neq \Phi(P)$, то $\Phi(P)Q_2$ не является строго 3-максимальной подгруппой в G, что противоречит условию. Следовательно, $P_1 = \Phi(P)$ и поэтому в силу произвольности выбора P_1, $\Phi(P)$ является единственной максимальной подгруппой в P. Но тогда, по лемме 2.13, P — циклическая группа, что противоречит рассматриваемому случаю.

Теперь допустим, что $|Q| = q$. Так как при этом G — группа одного из типов I(b-c) в теореме 2.3, то $\Phi(P)$ является 2-максимальной подгруппой в P и $|\Phi(P)| = p$. Это означает, что 3-максимальными подгруппами в G являются единичная подгруппа и $\Phi(P)$. Так как $\Phi(P) \neq 1$, то единичная подгруппа не является строго 3-максимальной подгруппой группы G, что противоречит условию. Следовательно, данный случай не имеет место.

Предположим теперь, что G является группой типа II(1) в теореме 2.3. Согласно условию, каждая 2-максимальная подгруппа группы $P\langle a^q\rangle$, где $Q = \langle a\rangle$, является строго 2-максимальной подгруппой. Тогда, по лемме 3.1, $|P| = p$. Следовательно, G является группой типа (1).

Пусть теперь G является группой типа II(2) в теореме 2.3. Аналогично, по лемме 3.1, в этом случае $|P| = p$ и поэтому G снова является группой типа (1).

Если G является группой типа II(3) в теореме 2.3, то в силу леммы 3.1, $|G| = pq^2$.

Пусть теперь G — группа типа II(4) или II(5) в теореме 2.3. Аналогично, как и выше, можно показать, что $|P| = p$. Следовательно, G снова является группой типа (1).

Пусть теперь G — группа типа II(6) в теореме 2.3. Тогда в силу леммы 3.1, группы $|\Phi(P)|$ и $|P/\Phi(P)|$ имеют простой порядок. Это означает, что $\Phi(P)$ является максимальной подгруппой в P и поэтому P — циклическая группа порядка p^2. В этом случае G является группой типа (2).

Предположим теперь, что G — группа типа II(7) в теореме 2.3. Рассуждая, как и выше, несложно показать, что $G = AB$, где $A = [P_1]Q$ и $B = [P_2]Q$ — группы Шмидта с $|P_1| = |P_2| = p$, и поэтому G является группой типа (3).

Пусть теперь G является группой типа II(8) в теореме 2.3. Аналогично, как и выше, можно показать, что $|P_1| = p$ и поэтому G снова является группой типа (3).

Предположим теперь, что G является группой типа II(9) в теореме 2.3. Аналогично, как и выше, можно показать, что $|P_1| = p$. Так как при этом подгруппы $[P_1]Q$ и $[Q]C_p$ являются группами Шмидта, то, по лемме 2.1(5), p сравнимо с единицей по модулю q и q сравнимо с единицей по модулю p, противоречие. Таким образом, данный случай не имеет место.

Очевидно, что в случае, когда G — группа типа III(i) в теореме 2.3, G является группой типа (4).

Легко видеть, что в случае, когда G — группа типа III(ii) в теореме 2.3, $|G| = pqr$.

Достаточность. Предположим, что G — группа одного из типов данной теоремы. Очевидно, что при этом G является группой одного из типов, описанных в теореме 2.3. Тогда в силу теоремы 2.3, любые две 3-максимальные подгруппы группы G являются перестановочными. Теорема доказана.

4. Строение групп, в которых каждая n-максимальная подгруппа является строго n-максимальной, и при этом все n-максимальные подгруппы S-квазинормальны $(n = 2; 3)$

Следующая лемма описывает строение групп с S-квазинормальными вторыми максимальными подгруппами при условии, что каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной.

Лемма 4.1. *Пусть G — группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Тогда в том и только в том случае в группе G каждая 2-максимальная подгруппа является S-квазинормальной, когда G либо нильпотентна; либо является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что G — ненильпотентная группа с S-квазинормальными 2-максимальными подгруппами. По лемме 2.12(3), в группе G каждая 2-максимальная подгруппа является субнормальной. Тогда, по лемме 2.9, каждая максимальная подгруппа группы G является нильпотентной и поэтому $G = [P]Q$ — группа Шмидта, где P и Q — силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G, соответственно.

Допустим вначале, что P — абелева группа. Пусть при этом $|Q| > q$. Тогда группа G имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q и PQ_1, где Q_1 — максимальная подгруппа группы Q. Тогда G имеет точно три класса 2-максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q_1, P_1Q_1 и PQ_2, где Q_2 — 2-максимальная подгруппа в Q и P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P. По условию, Q_1 является строго 2-максимальной подгруппой в G и поэтому $P_1 = 1$. Это влечет $|P| = p$.

Теперь допустим, что $|Q| = q$. В этом случае G имеет два класса максимальных подгрупп P и Q^x. Следовательно, единичная подгруппа и все максимальные подгруппы из P являются 2-максимальными подгруппами в G. Если $|P| > p$, то единичная подгруппа группы G не является строго 2-максимальной, что противоречит условию. Следовательно, $|P| = p$.

Теперь допустим, что P — неабелева группа. В этом случае подгруппы P_1Q_1 и $\Phi(P)Q_1$ являются 2-максимальными подгруппами в G, где Q_1 — максимальная подгруппа в Q и P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P. Если $P_1 \neq \Phi(P)$, то $\Phi(P)Q_1$ не является строго 2-максимальной подгруппой в G, что противоречит условию. Следовательно, $P_1 = \Phi(P)$ для любой максимальной подгруппы P_1

из P. Это означает, что $\Phi(P)$ является единственной максимальной подгруппой в P. Тогда в силу леммы 2.13, P является циклической группой, что противоречит неабелевости P. Таким образом, данный случай не имеет место.

Достаточность. Предположим, что G — нильпотентная группа. Тогда каждая 2-максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной. Пусть $G=[P]Q$ — группа Шмидта и $|P|=p$. Тогда максимальными подгруппами в G являются подгруппы PQ_1 и Q^x, где Q_1 — максимальная подгруппа группы Q. Следовательно, 2-максимальными подгруппами в G являются подгруппы Q_1 и PQ_2, где Q_2 — 2-максимальная подгруппа в Q. Так как эти подгруппы нормальны в G, то каждая 2-максимальная подгруппа из G S-квазинормальна. Лемма доказана.

Следующая теорема описывает строение групп с S-квазинормальными 3-максимальными подгруппами при условии, что каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной.

Теорема 4.2. *Пусть G — группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной. Тогда в том и только в том случае в группе G каждая 3-максимальная подгруппа является S-квазинормальной, когда группа G либо нильпотентна, либо $|G|=p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha+\beta+\gamma\le 3$, либо G является группой одного из следующих типов:*
I. $G=[P]Q$ — группа Шмидта, где $|P|=p$;
II. G — бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:

(1) $G=[P]Q$, где $|P|=p$, Q — циклическая группа и $[P]\Phi(Q)$ — группа Шмидта;

(2) $G=([P]Q_1)\times C_q$, где $|P|=p$, $|C_q|=q$ и PQ_1 — группа Шмидта;

(3) $G=[P]Q$, где $|P|=p, p>2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;

(4) $G=([P]Q_1)C_q$, где $|P|=p$, $Q_1=\langle a\rangle$, $C_q=\langle b\rangle$, $|Q_1C_q|=q^\beta$, $|a|=q^{\beta-1}$ ($\beta\in\mathbb{N}$), PQ_1 — группа Шмидта, $a^b=a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P,C_1]=1$ для всякой подгруппы C_1, изоморфной C_q;

(5) $G=[P]Q$, где P — циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;

(6) $G=[P]Q$, где $P=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$, $|a|=|b|=p$ и $[\langle a\rangle]Q$ и $[\langle b\rangle]Q$ — группы Шмидта;

(7) $G=[P_1\times C_p]Q$, где $|C_p|=|P_1|=p$, P_1Q — группа Шмидта, максимальная подгруппа из Q содержится в $Z(G)$ и $[C_p,Q]=1$;

III. $G = ([P]Q)R$, *где* G *— группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя* p, q, r*;* P *и* R *— минимальные нормальные подгруппы группы* G*,* $|P| = p$*,* $|R| = r$*,* Q *— циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$*.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной. Предположим, что G — ненильпотентная группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является S-квазинормальной. По лемме 2.12(3), в группе G каждая 3-максимальная подгруппа является субнормальной. Тогда, по лемме 2.9, каждая 2-максимальная подгруппа группы G является нильпотентной. Заметим также, по лемме 2.11, что группа G разрешима. Таким образом, G — разрешимая группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа нильпотентна. Понятно, что каждая собственная подгруппа H группы G является либо нильпотентной, либо группой Шмидта. Причем, если H — группа Шмидта, то H максимальна в G, и согласно лемме 4.1, в группе H нормальная силовская подгруппа имеет простой порядок. Поскольку в разрешимой группе индекс любой максимальной подгруппы есть степень простого числа и число различных простых делителей порядка группы Шмидта равно двум, то $\pi(G) \leq 3$.

I. Предположим вначале, что $G = [P]Q$ является группой Шмидта.

Пусть P — абелева группа. Допустим, что $|Q| > q$. Тогда максимальными в G являются подгруппы PQ_1 и Q^x, где Q_1 — максимальная подгруппа в Q. Следовательно, представителями 2-максимальных подгрупп в G являются подгруппы Q_1, PQ_2 и P_1Q_1, где Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1 и P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P. Таким образом, представителями 3-максимальных подгрупп в G являются подгруппы Q_2, PQ_3, P_1Q_2 и P_2Q_1, где Q_3 — максимальная подгруппа в Q_2 и P_2 — некоторая максимальная подгруппа в P_1. Если $P_1 \neq 1$, то Q_2 не является строго 3-максимальной подгруппой в G, что противоречит условию. Следовательно, $P_1 = 1$ и поэтому $|P| = p$. Таким образом, G является группой типа I.

Теперь допустим, что $|Q| = q$. В этом случае все 2-максимальные подгруппы из P являются 3-максимальными подгруппами в G. Предположим, что $|P| > p^2$. Пусть P_2 — произвольная 2-максимальная подгруппа из P. По условию, P_2 S-квазинормальна в G. Так как $P_2 \neq 1$, то P_2Q является подгруппой в G, что противоречит строению группы Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Полученное противоречие показвает, что $|P| \leq p^2$. Следовательно, $|G| \leq p^2q$.

Пусть теперь P — неабелева группа. Допустим, что $|Q| > q$. Тогда подгруппы P_1Q_2 и $\Phi(P)Q_2$ являются 3-максимальными в G, где Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1 и P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P. Если $P_1 \neq \Phi(P)$, то $\Phi(P)Q_2$ не является строго 3-максимальной подгруппой в G, что противоречит условию. Следовательно, $P_1 = \Phi(P)$. Таким образом, $\Phi(P)$ является единственной максимальной подгруппой в P. Тогда в силу леммы 2.13, P является циклической группой, что противоречит рассматриваемому случаю.

Теперь допустим, что $|Q| = q$. Пусть P_2 — 2-максимальная подгруппа в P и $\Phi_1(P)$ — максимальная подгруппа в $\Phi(P)$ такие, что $\Phi_1(P) \subseteq P_2$ и $\Phi_1(P) \neq 1$. Так как $|Q| = q$, то $\Phi_1(P)$ и P_2 являются 3-максимальными подгруппами в G. Если $\Phi_1(P) \neq P_2$, то $\Phi_1(P)$ не является строго 3-максимальной подгруппой в G, что противоречит условию. Следовательно, $\Phi_1(P) = P_2$ и поэтому $\Phi(P)$ является максимальной подгруппой в P. В силу леммы 2.13, это вновь влечет абелевость P, что противоречит рассматриваемому случаю. Если $\Phi_1(P) = 1$ и $P_2 \neq 1$, то единичная подгруппа $\Phi_1(P)$ не является строго 3-максимальной подгруппой группы G, так как $\Phi_1(P)$ и P_2 являются 3-максимальными подгруппами в G, противоречие. Следовательно, в этом случае $P_2 = 1$ и поэтому P является группой порядка p^2, что вновь противоречит рассматриваемому случаю.

II. Теперь предположим, что G не является группой Шмидта и $\pi(G) = \{p, q\}$, где $p \neq q$.

Допустим вначале, что группа G имеет нормальную силовскую подгруппу P, т. е. $G = [P]Q$. Предположим, что группа G имеет пару подгрупп Шмидта вида $A = [P]Q_1$ и $B = [P_1]Q$ ($P_1 < P, Q_1 < Q$). Понятно, что A и B являются максимальными подгруппами в группе G. Так как в группе A каждая строго 2-максимальная подгруппа является S-квазинормальной, то, по лемме 4.1, $|P| = p$. Аналогично можно показать, что $|P_1| = p$, что невозможно. Таким образом, либо все подгруппы Шмидта группы G содержат силовскую p-подгруппу из G, либо все они содержат силовскую q-подгруппу из G.

Если все подгруппы Шмидта группы G содержат силовскую p-подгруппу из G, то $G = [P]Q$, где $|P| = p$.

Допустим, что Q — абелева группа. Если при этом группа Q циклическая, то G является группой типа II(1).

Предположим теперь, что Q — нециклическая группа. Пусть H — подгруппа Шмидта группы G. Тогда $|G : H| = q$ и $H = [P]Q_1$, где Q_1 — циклическая максимальная подгруппа в Q. По основной теореме о конечных абелевых группах, $Q = Q_1 \times C_q$, где $|C_q| = q$.

Пусть Q_2 — максимальная подгруппа в Q_1. Тогда подгруппа PQ_2C_q является максимальной в группе G. Понятно, что эта подгруппа не является группой Шмидта и, следовательно, она нильпотентна. Это влечет $[P, C_q] = 1$ и поэтому G является группой типа II(2).

Если предположить, что максимальная подгруппа Q_2 группы Q_1 единична, то подгруппа PC_q является максимальной в группе G. Если при этом подгруппа PC_q нильпотентна, то G снова является группой типа II(2). Если же PC_q — группа Шмидта, то G является группой порядка pq^2.

Пусть теперь Q — неабелева группа и $|Q| = q^\beta$ ($\beta \in \mathbb{N}$). Если $q = 2$ и $\beta = 3$, то, по лемме 2.7, Q изоморфна либо группе кватернионов, либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = [\langle a\rangle]\langle b\rangle$, где $|a| = 2^2, |b| = 2, a^b = a^{-1}$. Тогда Q имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a\rangle, \langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$ и поэтому подгруппы вида $\langle a^2\rangle, \langle b\rangle$ и $\langle ab\rangle$ являются 2-максимальными подгруппами в Q. Так как $|P| = p$, то Q является максимальной подгруппой в G. Тогда подгруппы $\langle a^2\rangle, \langle b\rangle$ и $\langle ab\rangle$ являются 3-максимальными в группе G. По лемме 2.10, каждая из этих подгрупп содержится в $F(G) = P\langle a^2\rangle\langle b\rangle$, противоречие. Следовательно, Q изоморфна группе кватернионов порядка 8 и поэтому G является группой типа II(3).

Если теперь $q = 2$ и $\beta > 3$, либо q — нечетное простое, то, по лемме 2.7, Q изоморфна одной из групп: $M_\beta(q), D_\beta, Q_\beta$ или S_β. Если Q изоморфна одной из групп D_β, Q_β или S_β, то, по лемме 2.6, факторгруппа $Q/Z(Q)$ изоморфна $D_{\beta-1}$. В этом случае факторгруппа $Q/Z(Q)$ имеет точно две максимальные нециклические подгруппы. Следовательно, группа Q имеет по крайней мере две нециклические 2-максимальные подгруппы и поэтому в группе Q существует по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы. Это означает, что в группе G существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2, которые содержат P и не являются группами Шмидта. Тогда M_1 и M_2 являются нильпотентными нормальными подгруппами в G и поэтому группа $G = M_1M_2$ нильпотентна, противоречие. Следовательно, группа Q не может быть изоморфна одной из групп: D_β, Q_β или S_β.

Таким образом, группа Q изоморфна

$$M_\beta(q) = \langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}} = b^q = 1, a^b = a^{1+q^{\beta-2}}\rangle.$$

В этом случае группа G имеет вид $G = [[P]Q_1]C_q$, где $|P| = p$, $Q_1 = \langle a\rangle$, $|a| = q^{\beta-1}$, $C_q = \langle b\rangle, |b| = q$, PQ_1 — группа Шмидта и $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$.

Пусть C — множество всех подгрупп группы G, изоморфных подгруппе C_q. Предположим, что для некоторой подгруппы C_1 из C выполняется $[P, C_1] \neq 1$. Это влечет, что подгруппа PC_1 является группой Шмидта. Тогда PC_1 является максимальной подгруппой в G и поэтому $|Q| = q^2$, что невозможно, т.к. Q не является абелевой. Следовательно, G является группой типа II(4).

Предположим теперь, что любая подгруппа Шмидта группы G содержит некоторую силовскую q-подгруппу из G. Это означает, что $Q = \langle a \rangle$ — циклическая группа и $P\langle a^q \rangle$ — максимальная подгруппа группы G с индексом, равным q. Так как подгруппа $P\langle a^q \rangle$ не является группой Шмидта, то она нильпотентна. Следовательно, $P\langle a^q \rangle = P \times \langle a^q \rangle = F(G)$ и поэтому $\langle a^q \rangle$ содержится в $Z(G)$. При этом либо каждая максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую q-подгруппу группы G, является группой Шмидта, либо G имеет нильпотентную максимальную подгруппу, содержащую силовскую q-подгруппу группы G.

Предположим, что верен первый случай. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G вида P_1Q^x, где $P_1 < P$. Так как M — группа Шмидта, удовлетворяющая условию леммы 4.1, то $|P_1| = p$.

Предположим вначале, что P — неабелева группа. Тогда $P' \neq 1$ и следовательно $\Phi(P) \neq 1$. Допустим, что $P_1 \neq \Phi(P)$. Тогда $\Phi(P)P_1Q$ является подгруппой группы G. Так как P_1Q — максимальная подгруппа группы G, то либо $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, либо $\Phi(P)P_1Q = G$. Если $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, то $\Phi(P) \leq P_1$. Так как $|P_1| = p$ и $\Phi(P) \neq 1$, то $\Phi(P) = P_1$, что противоречит нашему допущению. Следовательно, $\Phi(P)P_1Q = G$. Тогда $\Phi(P)P_1 = P$ и поэтому $P_1 = P$, что невозможно. Таким образом, наше допущение неверно, и значит $P_1 = \Phi(P)$. Из условий теоремы вытекает, что $\Phi(P)$ является единственной подгруппой порядка p в группе P. Тогда в силу леммы 2.13, P является циклической группой, что противоречит рассматриваемому случаю.

Теперь предположим, что P — абелева группа. Допустим, что $\Phi(P) \neq 1$. Аналогично, как и выше, можно показать, что $\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа порядка p группы G. Допустим, что $|Q| > q$. Пусть P_1 — некоторая максимальная подгруппа группы P и Q_2 — 2-максимальная подгруппа группы Q. Тогда P_1Q_2 является 3-максимальной подгруппой в G. По условию, $(P_1Q_2)Q = Q(P_1Q_2)$ и поэтому P_1Q является подгруппой в группе G. Тогда, ввиду максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в группе G, мы имеем $\Phi(P)Q = P_1Q$. Это означает, что $\Phi(P)$ является максимальной подгруппой в P и поэтому P — циклическая группа порядка p^2.

Так как $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$ и группа G не является нильпотентной, то $G/\Phi(P)$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Поскольку, каждая максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую q-подгруппу группы G, является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, то максимальная подгруппа группы Q совпадает с $Z(G)$. Следовательно, G — группа типа II(5).

Пусть теперь $|Q| = q$. Пусть P_2 — такая 2-максимальная подгруппа в P, что $\Phi(P) \leq P_2$. Тогда P_2 является 3-максимальной подгруппой в G и значит, по условию, P_2Q является подгруппой группы G. Ввиду максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в группе G, мы имеем $\Phi(P)Q = P_2Q$. Это означает, что $\Phi(P) = P_2$ является 2-максимальной подгруппой в P и поэтому $|P| = p^3$. Из условий теоремы вытекает, что $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P и значит, в силу леммы 2.13, P является циклической группой. Таким образом, $|G| = p^3q$. Следовательно, единичная подгруппа и $\Phi(P)$ являются 3-максимальными подгруппами в G. Так как $\Phi(P) \neq 1$, то единичная подгруппа группы G не является строго 3-максимальной в G, что противоречит условию. Значит, данный случай не имеет место.

Допустим теперь, что $\Phi(P) = 1$. Так как P — абелева группа, то она является элементарной p-группой. Рассмотрим максимальную подгруппу $M = P_1Q^x$ группы G. Так как M — группа Шмидта и P — абелева группа, то, по лемме 4.1, P_1 является минимальной нормальной подгруппой порядка p в группе G.

Рассмотрим теперь максимальную подгруппу T группы G такую, что $G = [P_1]T$. Так как $T = [P_2]Q$ — группа Шмидта (ввиду рассматриваемого случая) и P — абелева группа, то, по лемме 4.1, P_2 является минимальной нормальной подгруппой порядка p в группе G. Таким образом, G — группа типа II(6).

Теперь предположим, что G имеет нильпотентную максимальную подгруппу M, содержащую подгруппу Q. Тогда группа M имеет вид $P_1 \times Q$, где $P_1 < P$. Допустим, что $|P_1| > p$. Пусть E — 2-максимальная подгруппа в P_1Q, индекс которой равен p^2. Тогда E является 3-максимальной подгруппой в G и $Q \leq E$. Из условия теоремы вытекает, что EQ^x — подгруппа в G для всех $x \in G$. Согласно лемме 2.4, существует такой элемент $y \in EQ^x$, что $Q^y = QQ^x$ и поэтому $Q = Q^x$ является нормальной подгруппой в группе G. Данное противоречие показывает, что $|P_1| = p$.

Пусть H — подгруппа Шмидта группы G, содержащая Q. Тогда H — максимальная подгруппа в G и поэтому $HM = G$. Пусть H_p — силовская p-подгруппа группы H. Заметим, что подгруппа P_1 не содержится в H_p, так как P_1Q — максимальная подгруппа в G. Тогда $H_p \cap P_1 = 1$, так как $|P_1| = p$, и поэтому $H \cap M = Q$. По лемме 4.1, $|H_p| = p$ и поэтому H_p является минимальной нормальной подгруппой в группе G. Следовательно, G является группой типа II(7).

Предположим теперь, что группа G не имеет нормальных силовских подгрупп. Пусть H — нормальная подгруппа группы G с индексом, равным p. Тогда Q является подгруппой в H. Допустим, что подгруппа Q нормальна в группе H. Тогда подгруппа Q нормальна в группе G, так как подгруппа H нормальна в G, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $H = [P_1]Q$ является подгруппой Шмидта группы G и поэтому Q — циклическая группа. По лемме 4.1, P_1 является минимальной нормальной подгруппой порядка p в группе G.

Предположим, что $N_G(Q)$ — нильпотентная подгруппа группы G. Тогда $Q \leq Z(N_G(Q))$, так как Q — абелева группа. По лемме 2.8, группа G обладает в этом случае нормальным q-дополнением, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $N_G(Q) = [Q]\langle b\rangle$ является подгруппой Шмидта в группе G с $|Q| = q$. Подгруппы H и $N_G(Q)$ являются максимальными в группе G и поэтому $G = HN_G(Q)$. Следовательно, $P_1\langle b\rangle$ — силовская p-подгруппа группы G. По выбору подгруппы H, $|G : H| = p$ и поэтому $P_1 \cap \langle b\rangle = \langle b^p\rangle$. Так как $[Q]\langle b\rangle$ — группа Шмидта, то подгруппа $Q\langle b^p\rangle$ нильпотентна и поэтому $\langle b^p\rangle \leq C_{P_1}(Q)$. С другой стороны, $[P_1]Q$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и поэтому, по лемме 2.1(6), $C_{P_1}(Q) = 1$. Следовательно, $\langle b^p\rangle = 1$ и поэтому $|\langle b\rangle| = p$. Следовательно, G является группой порядка p^2q.

III. Наконец, рассмотрим случай, когда $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где p, q, r — различные простые делители $|G|$.

Обозначим через M некоторую нормальную подгруппу группы G такую, что $|G : M| = q$. Тогда группа M либо нильпотентна, либо является группой Шмидта.

Предположим, что группа M нильпотентна. Тогда $G = [P \times R]Q$ и $M = P \times R \times Q_1$, где Q_1 — некоторая максимальная подгруппа в Q. Подгруппы PQ и RQ не могут быть обе нильпотентными, и поэтому либо PQ и RQ — группы Шмидта, либо одна из этих подгрупп, например, RQ нильпотентна, а вторая является группой Шмидта.

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда подгруппы PQ и RQ являются максимальными в G. Следовательно, по лемме 4.1, $|P| = p$ и $|R| = r$. Кроме того, по лемме 2.1(1)(4), $Q = \langle a \rangle$ является циклической группой и $\langle a^q \rangle$ является подгруппой в $Z(\langle PQ, RQ \rangle) = Z(G)$.

Теперь предположим, что подгруппа $PQ = P\langle a \rangle$ является группой Шмидта, а подгруппа RQ нильпотентна. Это влечет, что подгруппа PQ максимальна в G и поэтому $G = PQ \times R$, где $|R| = r$. По лемме 4.1, P является минимальной нормальной подгруппой порядка p в G. Из того, что $\langle a^q \rangle$ является характеристической подгруппой в Q и Q нормальна в RQ, следует, что подгруппа $\langle a^q \rangle$ нормальна в RQ. Так как, по лемме 2.1(4), $\langle a^q \rangle$ нормальна и в группе PQ, то подгруппа $\langle a^q \rangle$ нормальна в G.

Таким образом, G является группой типа III.

Теперь предположим, что M является группой Шмидта и G не является группой типа III. Не ограничивая общности, можно допустить, что $M = [R]P$, где $P = \langle b \rangle$ — циклическая группа. Тогда $G = [M]Q = [[R]P]Q$, где Q — группа простого порядка q и Q не является нормальной подгруппой в G. Действительно, если бы Q была нормальной в G подгруппой, то $G = M \times Q$ снова была бы группой типа III.

Так как $M = [R]P$ является группой Шмидта, то, по лемме 4.1, R является минимальной нормальной подгруппой порядка r группы M, а следовательно, и группы G. Предположим, что RQ — нильпотентная группа. Если при этом PQ также является нильпотентной группой, то подгруппа Q нормальна в G, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $PQ = [P]Q$ является группой Шмидта. Так как при этом $|P| = p$, ввиду цикличности группы P, то $C_G(R) = RQ$ и поэтому подгруппа Q нормальна в G, что вновь противоречит рассматриваемому случаю.

Таким образом, $RQ = [R]Q$ является группой Шмидта. Теперь предположим, что подгруппа $PQ = [P]Q$ также является группой Шмидта. Так как $|P| = p$, то $p-1 = q\alpha$ для некоторого натурального α, по лемме 2.1(5). Аналогично, из того, что RQ и RP являются группами Шмидта и $|R| = r$ следует, что $r-1 = q\beta$ и $r-1 = p\gamma$ для некоторых натуральных β и γ. Следовательно, $p = q\beta\gamma^{-1} = 1 + q\alpha$, что невозможно. Следовательно, PQ — нильпотентная группа и поэтому $G = [R](P \times Q)$, причем из максимальности в G подгруппы RQ следует, что $P = \langle b \rangle$ является группой простого порядка p. Это влечет $R = F(G)$. В этом случае G является группой порядка pqr.

Достаточность. Если группа G нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r — простые (необязательно различные) числа и $\alpha+\beta+\gamma \leq$

3, то, очевидно, каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной.

Предположим, что G — группа одного из типов I-III данной теоремы. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в каждом из этих случаев в группе G каждая 3-максимальная подгруппа является нормальной, а значит, и S-квазинормальной в группе G. Теорема доказана.

References

[1] L. Rédei, *Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen*, Acta Math., **84** (1950), 129–153.

[2] B. Huppert, *Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen*, Math. Z., **60** (1954), P. 409–434.

[3] Z. Janko, *Finite groups with invariant fourth maximal subgroups*, Math. Zeitschr., **82** (1963), 82-89.

[4] Z. Janko, *Finite simple groups with short chains of subgroups*, Math. Zeitschr., **84** (1964), 428-437.

[5] M. Suzuki, *The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order*, Proc. Amer. Math. Soc., **8**:4 (1957), 686–695.

[6] Z. Janko, *Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen*, Math. Z., **79** (1962), 422–424.

[7] В.А. Белоногов, *Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами*, Матем. заметки, **3**:1 (1968), 21–32.

[8] В.Н. Семенчук, *Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами*, Вопросы алгебры, **1** (1985), 86–96.

[9] R.K. Agrawal, *Generalized center and hypercenter of a finite group*, Proc. Amer. Math. Soc., **54** (1976), 13–21.

[10] M. Asaad, *Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal*, Acta Math. Hung., **51**:1–2 (1989), 9–27.

[11] P. Flavell, *Overgroups of second maximal subgroups*, Arch. Math., **6** (1995), 277–282.

[12] X.Y. Guo, K.P. Shum, *Cover-avoidance properties and the structure of finite groups*, Journal of Pure and Applied Algebra, **181** (2003), 297–308.

[13] W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba, *X-semipermutable subgroups of finite groups*, Journal Algebra, **315** (2007), 31–41.

[14] B. Li, A.N. Skiba, *New characterizations of finite supersoluble groups*, Science in China. Serias A: Mathematics, **50**:1 (2008), 827–841.

[15] W. Guo, A.N. Skiba, *Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups*, Journal Algebra, **321** (2009), 2843-2860.

[16] Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба, *Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами*, Доклады НАН Беларуси, **50**:3 (2006), 1012–1017.

[17] В. Го, Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба, *Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами*, Математические заметки, **86**:3 (2009), 350–359.

[18] Ю.В. Луценко (Горбатова), В. Го, А.Н. Скиба, *О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны*, Сибирский математический журнал, **50**:6 (2009), 1255–1268.
[19] Ю.В. Горбатова, *Строение конечных ненильпотентных групп с нормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами*, Приоритетные научные направления: от теории к практике, Сборник материалов XXIV Международной научно-практической конференции, **2** (2016), 30–35.
[20] Ю.В. Луценко (Горбатова), А.Н. Скиба, *Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами*, Математические заметки, **91**:5 (2012), 730–740.
[21] Ю.В. Горбатова, М.Н. Коновалова, *Конечные группы с субнормальными строго 2- или 3-максимальными подгруппами*, Вестник Омского университета, **24**:3 (2019), 4–11.
[22] Ю.В. Луценко (Горбатова), А.Н. Скиба, *Строение конечных групп с S-квазинормальными третьими максимальными подгруппами*, Украинский математический журнал, **61**:12 (2009), 1630–1639.
[23] Ю.В. Горбатова, *Строение конечных ненильпотентных групп с S-квазинормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами*, Новый взгляд. Международный научный вестник, **13** (2016), 21–31.
[24] Л.А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, Москва, 1978.
[25] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
[26] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York–Evanston–London, 1968.
[27] М. Холл, *Теория групп*, Наука, Москва, 1962.
[28] A. Mann, *Simple groups having p-nilpotent 2nd-maximal subgroups*, Israel J. Math., **6**:3 (1996), 233–345.
[29] O. Kegel, *Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen*, Math. Z., **87** (1962), 205–221.

Julia Vladimirovna Gorbatova
The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Bryansk Branch),
str. Gorky, 18,
241050, Bryansk, Russia
Email address: g.julia32@yandex.ru