

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №1, стр. 207–236 (2021)

УДК 517.958,532.5.031,532.5.013.3

DOI 10.33048/semi.2021.18.016

MSC 76B07,76B03

**О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ТОЧЕЧНЫМ СТОКОМ В
ВЕРШИНЕ ТРЕУГОЛЬНОГО ВЫСТУПА НА ДНЕ**

А.А. ТИТОВА

ABSTRACT. A two-dimensional stationary problem of a potential free-surface flow of an ideal incompressible fluid caused by a singular sink is considered. The sink is located at the top of a triangular ledge at the bottom. The problem is to determine the shape of the free boundary and the velocity field of the fluid. By employing a conformal map and the Levi-Civita technique, the problem is rewritten as an operator equation in a Hilbert space. It is proved that, for the Froude number greater than some particular value, there is a solution of the problem. It is established that the free boundary has a cusp at the point over the sink. It is shown that the inclination angle of the free surface is less than $\pi/2$ everywhere except at the cusp point, where it is equal to $\pi/2$.

Keywords: ideal incompressible fluid, free surface, singular sink.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается плоское установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости. Область течения ограничена свободной границей сверху и плоским горизонтальным дном с треугольным выступом, в вершине которого находится точечный сток заданной интенсивности.

При изучении задач со свободными границами применяются различные методы. Обширную библиографию по данной теме можно найти в монографии [1]. Существует большое количество работ механиков (см., например, [2, 3, 4, 5, 6, 8,

ТИТОВА, А.А., ON THE SHAPE OF THE FREE-SURFACE PROBLEM OF AN IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW WITH A SINGULAR SINK AT THE TOP OF A TRIANGULAR LEDGE AT THE BOTTOM.

© 2021 Титова А.А.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00069).

Поступила 25 января 2021 г., опубликована 16 марта 2021 г.

7, 9, 10, 11]), в которых проводились численные расчёты и качественно исследовались свойства свободной границы. В работах [3, 4, 10, 11] было установлено, что свободная граница над точкой стока имеет касп. В общем случае волны на свободной границе возникают в случае малого числа Фруда (см. [1]). Когда число Фруда достаточно велико, а именно, в сверхкритическом случае, не образуются волны и свободная граница является монотонной (см. [2, 3, 4, 5]). Заметим, что в случае источника волны присутствуют всегда (см. [6, 7, 8]).

Математически строгое исследование задачи в случае когда сток находится на плоском горизонтальном дне проводилось в работах [12, 13]. Было получено уравнение типа уравнения Некрасова, которое точно описывает форму свободной границы. Установлена разрешимость задачи для чисел Фруда, которые превышают некоторое конкретное значение. Кроме того, исследованы свойства решения и форма свободной границы. Уравнение типа Некрасова похоже на уравнение, которое изучалось в работах [14, 15, 16] для предельных волн Стокса. Эти работы оказались наиболее полезными в данном исследовании.

Рассматриваемая в настоящей работе задача исследуется в предположении, что течение потенциально и на бесконечности стремится к равномерному потоку. Поскольку верхняя граница неизвестна, на ней ставятся два условия. Первое условие заключается в том, что эта граница свободна от напряжений (динамическое условие), а второе условие — в том, что вектор поля скорости жидкости направлен по касательной к ней (кинематическое условие). Второе условие означает, что свободная граница является линией тока, то есть на ней справедливо уравнение Бернулли.

В силу двумерности задачи удобно воспользоваться комплексными переменными. Конформно отображая область течения в верхний единичный полукруг, получено уравнение типа уравнения Некрасова для свободной границы. Однако уравнение Некрасова необходимо дополнить краевым условием и ещё каким-либо соотношением. Данным соотношением является одна из формул обращения Гильберта. Таким образом, получена система интегро-дифференциальных уравнений, которая после некоторых преобразований переписывается в виде нелинейного операторного уравнения в банаховом пространстве.

С помощью принципа сжимающих отображений доказана однозначная разрешимость операторного уравнения при некотором условии на число Фруда. Доказано, что при определенных значениях исходных параметров существует решение системы уравнений. Чтобы показать, что конформное отображение является взаимно однозначным и существует решение исходной задачи, было установлено, при каких значениях числа Фруда не происходит опрокидывание свободной границы. Кроме того, показано, что в точке над стоком на свободной границе образуется касп.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Течение вызвано точечным стоком интенсивности $m > 0$, расположенным в вершине треугольного выступа на дне. Для описания постановки задачи будем использовать прямоугольную декартову систему координат $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с началом O в точке стока.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область течения жидкости, ограниченная сверху свободной границей Γ и дном Γ_0 снизу (см. рис. 1). Предполагается, что течение симметрично относительно оси Oy . Дно Γ_0 имеет следующий вид: на промежутках

(B, E_-) и (E_+, A) дно горизонтальное, где A и B — бесконечно удалённые точки; отрезки $[E_-, O]$ и $[O, E_+]$ образуют симметричный выступ, где $\beta \in (0, 1)$ — параметр угла наклона, ℓ — длина отрезков $[E_-, O]$ и $[O, E_+]$, а $\ell \sin \frac{\pi}{2}\beta$ — высота треугольного выступа, в вершине которого находится сток.

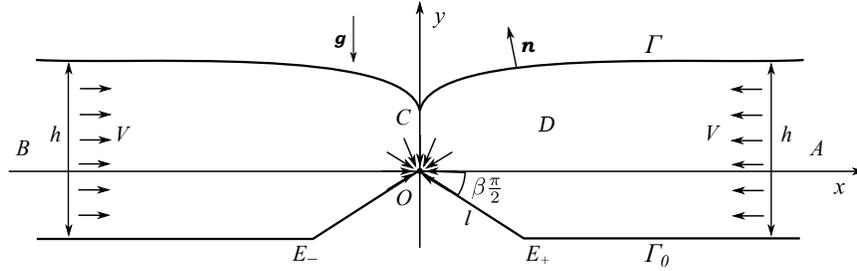


Рис. 1. Картина течения в физической плоскости.

На жидкость действует сила тяжести $\rho \mathbf{g}$, где $\rho = const$ — плотность жидкости, $\mathbf{g} = (0, -g)$, g — величина ускорения свободного падения. Требуется определить поле скорости жидкости $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, а также форму свободной границы Γ . Поле скорости \mathbf{v} удовлетворяет в D стационарным уравнениям Эйлера идеальной несжимаемой жидкости:

$$(1) \quad v_x \partial_x \mathbf{v} + v_y \partial_y \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g},$$

$$(2) \quad \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0,$$

где p — давление. Эти уравнения необходимо дополнить краевыми условиями, которые описаны ниже.

Во всех точках дна Γ_0 кроме точки O выполняется условие непротекания. Это означает, что скорость является касательной к границе:

$$(3a) \quad v_y = 0 \quad \text{на} \quad (B, E_-) \cup (E_+, A),$$

$$(3b) \quad -v_x \sin \frac{\pi}{2}\beta + v_y \cos \frac{\pi}{2}\beta = 0 \quad \text{на} \quad (E_-, O),$$

$$(3c) \quad v_x \sin \frac{\pi}{2}\beta + v_y \cos \frac{\pi}{2}\beta = 0 \quad \text{на} \quad (O, E_+).$$

В точке O находится сток интенсивности m , поэтому поле скорости при приближении к этой точке имеет следующую асимптотику (см. [17, гл. III, § 2, с. 240]):

$$(4) \quad \left(\mathbf{v}(x, y) + \frac{m}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow 0,$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$.

Поскольку верхняя граница Γ является неизвестной, на ней ставится не одно, а два условия. Первое условие — кинематическое:

$$(5) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к Γ . Второе условие на Γ — динамическое. Оно состоит в том, что давление является непрерывным при переходе через Γ . Так как над

Γ давление постоянно и совпадает с атмосферным, а в уравнения Эйлера входит только градиент давления, оно определяется с точностью до произвольной постоянной. Поэтому будем считать, что

$$(6) \quad p = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Нам осталось определить поведение жидкости в бесконечно удалённых точках A и B (см. рис. 1). Будем предполагать, что на бесконечности течение жидкости стремится к равномерному потоку глубины h и постоянной скорости $V > 0$:

$$(7) \quad \mathbf{v}(x, y) \rightarrow (\mp V, 0) \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Значение постоянной V не может быть произвольным. В силу несжимаемости жидкости, эта постоянная должна быть связана с интенсивностью стока следующим соотношением:

$$(8) \quad 2Vh = \frac{(1 + \beta)}{2} m.$$

Кроме того, будет предполагаться, что поле скорости является потенциальным. Это значит, что существует называемая потенциалом скорости скалярная функция $\varphi = \varphi(x, y)$, такая что $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, то есть $v_x = \partial_x\varphi$ и $v_y = \partial_y\varphi$. Это предположение является довольно существенным упрощением задачи. Обычно оно оправдывается следующими соображениями. Если при рассмотрении нестационарной задачи в начальный момент жидкость покоилась, то её завихренность (ротор поля скорости) в этот момент должна равняться нулю. В двумерном случае завихренность сохраняется вдоль траекторий частиц жидкости, поэтому она будет равна нулю в D и во все последующие моменты времени. Из односвязности области D поле скорости будет потенциальным. Если предположить, что при неограниченном возрастании времени течение становится установившимся, то оно будет решением стационарной задачи. При этом его потенциальность сохранится. Конечно, стабилизация решения совсем не является очевидным фактом и требует строго обоснования. Мы, однако, этого делать не будем и просто постулируем потенциальность скорости.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Задача (1)–(8) довольно сложна для исследования и в этом разделе она будет преобразована к эквивалентному виду.

3.1. Уравнение потенциального течения в области D . В силу уравнения неразрывности (2) потенциал скорости является гармонической в D функцией:

$$(9) \quad \Delta\varphi = 0 \quad \text{в } D.$$

Кроме того, из уравнения неразрывности (2) следует, что существует скалярная функция $\psi = \psi(x, y)$, такая что $v_x = \partial_y\psi$ и $v_y = -\partial_x\psi$. Эта функция постоянна вдоль линии тока и называется функцией тока. Она тоже является гармонической в D :

$$(10) \quad \Delta\psi = 0 \quad \text{в } D.$$

Следует отметить, что функция тока и потенциал скорости определяются с точностью до произвольных постоянных.

Если φ и ψ уже известны, то тогда можно вычислить поле скорости. После этого давление можно найти из уравнения (1). Давление, однако, нас не интересует, и мы не будем его определять. Поэтому достаточно ограничиться решением уравнения (9) или (10) с соответствующим образом переписанными краевыми условиями. Здесь мы столкнемся с небольшой трудностью, связанной с тем, что условие (6) включает в себя давление и его необходимо записать в другом виде.

3.2. Краевые условия на Γ_0 и Γ . Из краевых условий (3) и (5) следует, что каждая из границ Γ_0 и Γ состоит из двух линий тока. Введём обозначения:

$$\begin{aligned}\Gamma_0^+ &= \Gamma_0 \cap \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, & \Gamma_0^- &= \Gamma_0 \cap \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}, \\ \Gamma^+ &= \Gamma \cap \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, & \Gamma^- &= \Gamma \cap \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}.\end{aligned}$$

Таким образом, функция ψ постоянна на Γ_0^+ , Γ_0^- , Γ^+ и Γ^- . Поскольку задача симметрична относительно оси Oy , вектор скорости на интервале (O, C) этой оси направлен вертикально (вниз). Следовательно, этот интервал тоже является линией тока. Функция ψ определена с точностью до константы, поэтому без ограничения общности мы можем положить, что она обращается в нуль в точке C . Из непрерывности функции тока всюду за исключением точки O мы получим, что

$$(11) \quad \psi|_{\Gamma} = \psi|_{(O, C)} = 0.$$

Рассмотрим линии тока Γ_0^+ и Γ_0^- . Разность значений функции тока в двух точках области совпадает с расходом потока жидкости через кривую, соединяющую эти точки. Поэтому

$$(12) \quad \psi|_{\Gamma_0^+} = Vh, \quad \psi|_{\Gamma_0^-} = -Vh.$$

Привлечём ещё принцип Бернулли. Поскольку Γ^+ и Γ^- являются линиями тока, величина $\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{\rho}p + gy$ сохраняет на Γ постоянное значение. В силу того, что $p = 0$ на Γ , получим следующее соотношение:

$$(13) \quad \frac{1}{2}|\mathbf{v}(x, y)|^2 + gy = K = \text{const} \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Постоянную K можно определить, устремив в этом равенстве x к $\pm\infty$:

$$K = \frac{1}{2}V^2 + g(h - \ell \sin \beta \frac{\pi}{2}).$$

3.3. Безразмерная постановка задачи. Перепишем задачу в безразмерной форме. Для этого введём число Фруда

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gh}}.$$

Величина V не является исходным параметром задачи, поэтому, используя соотношение (8), мы получим, что

$$\text{Fr}^2 = (1 + \beta)^2 \frac{m^2}{16gh^3}.$$

Для краткости введем новое обозначение

$$(14) \quad \alpha = \frac{\text{Fr}^2}{2}.$$

Взяв h и $(1 + \beta)t/4$ в качестве характерных величин и оставив для безразмерных величин прежние обозначения, мы получим (9), (10) и (11). При этом для безразмерной скорости мы получим те же самые выражения: $v_x = \partial_x \varphi = \partial_y \psi$, $v_y = \partial_y \varphi = -\partial_x \psi$, где x , y , φ и ψ — безразмерные величины.

Условия (12) и (13) переписутся следующим образом:

$$\psi|_{\Gamma_0^+} = 1, \quad \psi|_{\Gamma_0^-} = -1,$$

$$(15) \quad \alpha |\mathbf{v}(x, y)|^2 + y = \alpha + \left(1 - \frac{\ell}{h} \sin \beta \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при } (x, y) \in \Gamma.$$

Наконец, (4) и (7) примут такой вид:

$$(16) \quad \left(\mathbf{v}(x, y) + \frac{2}{(1 + \beta)\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\mathbf{r}| \rightarrow 0,$$

$$\mathbf{v}(x, y) \rightarrow (\mp 1, 0) \quad \text{при } x \rightarrow \pm \infty.$$

Заметим, что $y \rightarrow 1 - \frac{\ell}{h} \sin \beta \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow \pm \infty$, если $(x, y) \in \Gamma$.

3.4. Комплексная формулировка задачи. В силу двумерности поставленной задачи удобно воспользоваться комплексными переменными. Заметим, что функции φ и ψ удовлетворяют системе уравнений Коши–Римана. Поэтому комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ является в D аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$. Комплексная скорость $v = v_x - iv_y$ является производной комплексного потенциала по z : $v = dw/dz$. Принцип Бернулли (15) в комплексной формулировке примет следующий вид:

$$(17) \quad \alpha |v(z)|^2 + \operatorname{Im} z = \alpha + \left(1 - \frac{\ell}{h} \sin \beta \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при } z \in \Gamma.$$

Условие (16) переписется так:

$$(18) \quad \left(v(z) + \frac{2}{(1 + \beta)\pi} \frac{1}{z}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Комплексная формулировка остальных краевых условий на Γ_0 и Γ не вызывает затруднений.

3.5. Конформное отображение на полукруг D^* . С помощью конформного отображения переведем область D в единичный верхний полукруг D^* с центром в нуле плоскости комплексного переменного t (см. рис. 2). Обозначим это отображение через F . Поскольку область D является неизвестной, мы на данном этапе не можем определить F , однако как следует из общей теории конформных отображений (см. [17, гл. II, § 3, с. 159]) для каждой области D такое отображение существует. Отображение F определяется однозначно по трём точкам на границе, поэтому будем задавать его таким образом, чтобы точка O переходила в точку $O^*(t = 0)$, точка C — в точку $C^*(t = i)$, бесконечно удалённые точки A и B — в точки $A^*(t = 1)$ и $B^*(t = -1)$ соответственно. Мы задаем четыре точки, а не три, поскольку задача симметрична относительно оси Oy . Свободная поверхность Γ при отображении F переходит в полуокружность Γ^* , а нижняя граница Γ_0 — в горизонтальный диаметр $\Gamma_0^* = [B^*, A^*]$. Обозначим через $E_+^*(t = s_0)$ и $E_-^*(t = -s_0)$ образы точек E_+ и E_- соответственно, где s_0 — положительное вещественное число из интервала $(0, 1)$. Значение s_0 , вообще говоря, не известно, поскольку нам F не известно, и должно быть определено в процессе решения задачи.

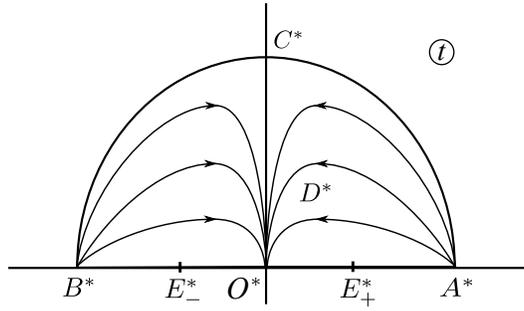


Рис. 2. Схема течения в единичном полукруге D^* .

Обозначим через G обратное к F отображение. Функция $w^*(t) = w(G(t))$ является комплексным потенциалом течения в области D^* и на границах Γ^* и Γ_0^* будут выполняться условия непротекания. В точке O^* плоскости t по-прежнему будет точечный сток, а в точках A^* и B^* — одинаковые точечные источники (см. рис. 2). Функция $w(z) = w^*(F(z))$ является комплексным потенциалом течения в области D . Нетрудно вычислить, что комплексный потенциал w^* течения в полукруге D^* выглядит следующим образом:

$$w^*(t) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right) - i = \frac{2}{\pi} (\ln(t + 1) + \ln(t - 1) - \ln 2t - i\pi/2).$$

Заметим, что

$$(19) \quad \frac{dw^*(t)}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}.$$

3.6. Метод Леви-Чивита. Поскольку $w(z) = w^*(F(z))$,

$$v(z) = \frac{dw}{dz}(z) = \frac{dw^*}{dt}(F(z)) \frac{dF}{dz}(z).$$

Поэтому

$$(20) \quad v(G(t)) = \frac{dw^*}{dt}(t) \frac{dF}{dz}(G(t)) = \frac{dw^*}{dt}(t) \left(\frac{dG(t)}{dt} \right)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$(21) \quad \frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{v(G(t))} \frac{dw^*}{dt}(t).$$

Если мы сможем определить функцию $v(G(t))$, то из этого уравнения найдём и отображение G .

Функция $v(z)$, как производная аналитической функции $w(z)$, сама является аналитической в области D . Из условия (18) следует, что $v(z)$ имеет полюс первого порядка в точке $O(z = 0)$. Функция G ведет себя как $t^{1+\beta}$ в окрестности точки $t = 0$, так как область D имеет в точке $O(z = 0)$ излом. Поэтому функция $v(G(t))$ является аналитической в области D^* и, как следует из отмеченных выше свойств отображения G , имеет особенность порядка $1 + \beta$ в точке $O^*(t = 0)$. При стремлении t к точкам $A^*(t = 1)$ и $B^*(t = -1)$ функция $v(G(t))$ остаётся ограниченной и стремится к -1 и 1 соответственно.

Для краткости введём обозначение:

$$(22) \quad u(t) = v(G(t)).$$

Эта функция определена в D^* . Следуя методу Леви-Чивита введём функцию

$$\widehat{\Omega}(t) = \hat{\theta}(t) + i\hat{\tau}(t)$$

с вещественными $\hat{\theta}$ и $\hat{\tau}$, такую что

$$(23) \quad u(t) = -\frac{(t+s_0)^{\beta/2}(t-s_0)^{\beta/2}}{t^{1+\beta}} e^{-i\widehat{\Omega}(t)}.$$

Функция $\widehat{\Omega}$ является аналитической в D^* , поскольку мы выделили особенности функции $u(t)$ перед экспонентой. Заметим, что функция $\hat{\theta}$ определена с точностью до постоянной $2\pi k$, где k — целое число. Мы зафиксируем одну ветвь этой функции, выбрав её значение в точке $t = 1$, а именно, $\hat{\theta}(1) = 0$.

Поясним, почему выбрана именно такая особенность функции u в точке $t = 0$. Выше было отмечено, что $G(t) \sim t^{1+\beta}$ вблизи точки $t = 0$ и $dG/dt \sim t^\beta$. Согласно (20), $u(t) \sim t^{-1}t^{-\beta} = t^{-(1+\beta)}$. Эта особенность и фигурирует в (23). Заметим, что если перейти к переменной z , сделав замену переменной $t = F(z)$ (то есть $z \sim t^{1+\beta}$ вблизи точки $t = 0$), то у функции $v(z)$ получим особенность z^{-1} в точке $z = 0$, что соответствует как раз точечному стоку в этой точке.

3.7. Краевое условие на Γ_0^* . Здесь мы определим значения функции $\hat{\theta}$ на границе Γ_0^* . Поскольку $-1 = e^{i\pi}$ и $t = |t|e^{i\sigma}$, где $\sigma = \arg t \in [0, \pi]$, представление (23) может быть переписано так:

$$u(t) = \frac{|t+s_0|^{\beta/2}|t-s_0|^{\beta/2}}{|t|^{1+\beta}} e^{\hat{\tau}(t)} e^{i(\pi - \vartheta(t) - \hat{\theta}(t))},$$

где $\vartheta(t) = (1+\beta)\arg t - \frac{\beta}{2}\arg(t+s_0) - \frac{\beta}{2}\arg(t-s_0)$. На дне Γ_0 мы знаем направление скорости, которое удовлетворяет условиям (3). Чтобы найти $\hat{\theta}$ на Γ_0^* , заметим, что

$$v(G(t)) = v_x(G(t)) - iv_y(G(t)) = \operatorname{Re} u(t) + i\operatorname{Im} u(t).$$

Поэтому

$$v_x(G(t)) = -\frac{|t+s_0|^{\beta/2}|t-s_0|^{\beta/2}}{|t|^{1+\beta}} e^{\hat{\tau}(t)} \cos(\vartheta(t) + \hat{\theta}(t)),$$

$$v_y(G(t)) = -\frac{|t+s_0|^{\beta/2}|t-s_0|^{\beta/2}}{|t|^{1+\beta}} e^{\hat{\tau}(t)} \sin(\vartheta(t) + \hat{\theta}(t)).$$

Заметим, что отрезок $\Gamma_0^* = [B^*, A^*]$ лежит на вещественной оси, поэтому на ней $t = s \in [-1, 1]$. Обозначим через $\hat{\theta}_0$ след функции $\hat{\theta}$ на Γ_0^* . Таким образом, $\hat{\theta}_0$ определена на отрезке $[-1, 1]$. Граница Γ_0^* состоит из четырёх промежутков $(-1, -s_0)$, $(-s_0, 0)$, $(0, s_0)$ и $(s_0, 1)$, каждый из которых мы рассмотрим отдельно.

1. Пусть $s \in (-1, -s_0)$. В этом случае $\arg t = \arg(t+s_0) = \arg(t-s_0) = \pi$, $v_x(G(t)) > 0$ и $v_y(G(t)) = 0$. Поэтому $\vartheta(t) = \beta\pi$ и

$$\cos((1+\beta)\pi - \beta\pi + \hat{\theta}(t)) < 0 \quad \text{и} \quad \sin((1+\beta)\pi - \beta\pi + \hat{\theta}(t)) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\theta}_0(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in (-1, -s_0).$$

2. Пусть $s \in (-s_0, 0)$. В этом случае $\arg t = \arg(t - s_0) = \pi$, $\arg(t + s_0) = 0$ и

$$v_x(G(t)) = |v(G(t))| \cos \frac{\pi}{2}\beta, \quad v_y(G(t)) = |v(G(t))| \sin \frac{\pi}{2}\beta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2}\beta &= -\cos\left((1 + \beta)\pi - \frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t)\right), \\ \sin \frac{\pi}{2}\beta &= -\sin\left((1 + \beta)\pi - \frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t)\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\pi + \frac{\pi}{2}\beta = (1 + \beta)\pi - \frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t)$ и

$$\hat{\theta}_0(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in (-s_0, 0).$$

3. Пусть $s \in (0, s_0)$. В этом случае $\arg t = \arg(t + s_0) = 0$, $\arg(t - s_0) = \pi$ и

$$v_x(G(t)) = -|v(G(t))| \cos \frac{\pi}{2}\beta, \quad v_y(G(t)) = |v(G(t))| \sin \frac{\pi}{2}\beta.$$

Поэтому

$$(24a) \quad \cos \frac{\pi}{2}\beta = \cos\left(-\frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t)\right),$$

$$(24b) \quad \sin \frac{\pi}{2}\beta = -\sin\left(-\frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t)\right).$$

Отсюда получим, что $-\frac{\pi}{2}\beta = -\frac{\beta}{2}\pi + \hat{\theta}(t)$ и

$$\hat{\theta}_0(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in (0, s_0).$$

4. Пусть $s \in (s_0, 1)$. В этом случае $\arg t = \arg(t + s_0) = \arg(t - s_0) = 0$, $v_x(G(t)) < 0$ и $v_y(G(t)) = 0$. Поэтому $\cos \hat{\theta}(t) > 0$ и $\sin \hat{\theta}(t) = 0$, откуда следует, что

$$\hat{\theta}_0(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in (s_0, 1).$$

Таким образом,

$$(25) \quad \hat{\theta}(t) = \text{Im}(i\hat{\Omega}(t)) = 0 \quad \text{при} \quad \text{Im} t = 0.$$

3.8. Уравнение Бернулли на Γ^* . Тожество Бернулли (17) на границе Γ^* примет следующий вид:

$$(26) \quad \alpha |v(G(t))|^2 + \text{Im} G(t) = \alpha + 1 - \frac{\ell}{h} \sin \frac{\pi}{2}\beta.$$

Поскольку Γ^* есть часть единичной окружности, точки на ней представимы в виде $t = e^{i\sigma}$, где $\sigma \in [0, \pi]$. Подставив это представление в (26) и продифференцировав по σ , мы получим:

$$(27) \quad \alpha \frac{d|v(G(e^{i\sigma}))|^2}{d\sigma} + \text{Im} \frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma \in (0, \pi).$$

Вычислим $\text{Im} dG(e^{i\sigma})/d\sigma$. Сначала заметим, что

$$\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = \frac{dG}{dt} \Big|_{t=e^{i\sigma}} i e^{i\sigma},$$

Используя равенства (19), (21), (22) и (23), найдём, что

$$(28) \quad \frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{u(t)} \frac{dw^*}{dt} = -\frac{2}{\pi} e^{i\hat{\Omega}(t)} \frac{t^\beta}{(t + s_0)^{\beta/2}(t - s_0)^{\beta/2}} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}.$$

Следовательно,

$$\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} \frac{e^{i((1+\beta)\sigma + \widehat{\Omega}(t))}}{(t+s_0)^{\beta/2}(t-s_0)^{\beta/2}} \Big|_{t=e^{i\sigma}} \operatorname{ctg} \sigma.$$

Для краткости введём следующие обозначения:

$$(29) \quad \tau(\sigma) = \hat{\tau}(e^{i\sigma}), \quad \theta(\sigma) = \hat{\theta}(e^{i\sigma}), \quad \sigma \in [0, \pi].$$

В этих обозначениях, поскольку $\widehat{\Omega}(e^{i\sigma}) = \theta(\sigma) + i\tau(\sigma)$,

$$\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} \frac{e^{i((1+\beta)\sigma + \theta(\sigma))}}{(e^{i\sigma} + s_0)^{\beta/2}(e^{i\sigma} - s_0)^{\beta/2}} \operatorname{ctg} \sigma.$$

Заметим, что $e^{i\sigma} \pm s_0 = \cos \sigma \pm s_0 + i \sin \sigma$. Поэтому

$$(e^{i\sigma} + s_0)(e^{i\sigma} - s_0) = \cos 2\sigma - s_0^2 + i \sin 2\sigma,$$

$$|e^{i\sigma} + s_0| |e^{i\sigma} - s_0| = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/2}.$$

Введём вещественные функции $\varrho(\sigma)$ и $\phi(\sigma)$, такие что

$$(e^{i\sigma} + s_0)(e^{i\sigma} - s_0) = (\varrho(\sigma) e^{i\phi(\sigma)})^2 = \varrho^2(\sigma) e^{2i\phi(\sigma)},$$

то есть

$$\varrho^2(\sigma) = |e^{i\sigma} + s_0| |e^{i\sigma} - s_0| = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/2},$$

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2} (\arg(e^{i\sigma} + s_0) + \arg(e^{i\sigma} - s_0)).$$

Тогда

$$\operatorname{Im} \frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} \frac{e^{-\tau(\sigma)}}{\varrho^\beta(\sigma)} \sin((1+\beta)\sigma - \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma.$$

Теперь обратимся к первому слагаемому в левой части равенства (27). Учитывая (23), получим, что

$$|v(G(e^{i\sigma}))|^2 = |u(e^{i\sigma})|^2 = |e^{i\sigma} + s_0|^\beta |e^{i\sigma} - s_0|^\beta e^{2\tau(\sigma)} = \varrho^{2\beta}(\sigma) e^{2\tau(\sigma)}.$$

После подстановки полученных выражений в (27) и небольших преобразований мы получим следующую форму уравнения Бернулли при $\sigma \in (0, \pi)$:

$$(30) \quad \frac{d\varrho^{3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)}}{d\sigma} - \frac{3}{\alpha\pi} \sin((1+\beta)\sigma - \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma = 0.$$

3.9. Свойства функций τ и θ . Для начала исследуем свойства симметрии функций $\hat{\tau}$ и $\hat{\theta}$. Введём следующие обозначения: если $a = a_1 + ia_2$ с вещественными a_1 и a_2 , то положим

$$\mathcal{A}(a) = -a_1 + ia_2.$$

Исходя из постановки задачи, функция v_x является нечётной по x , а функция v_y — чётной:

$$v_x(-x, y) = -v_x(x, y), \quad v_y(-x, y) = v_y(x, y).$$

Поэтому функция комплексной скорости $v(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\mathcal{A}(v(z)) = -v_x(x, y) - iv_y(x, y) = v_x(-x, y) - iv_y(-x, y) = v(\mathcal{A}(z)), \quad z \in D.$$

Поскольку G является симметричным относительно вещественной оси конформным отображением, для него справедливо такое же соотношение:

$$\mathcal{A}(G(t)) = G(\mathcal{A}(t)), \quad t \in D^*.$$

Так как $u(t) = v(G(t))$, получим, что

$$\mathcal{A}(u(t)) = u(\mathcal{A}(t)), \quad t \in D^*.$$

Из этого соотношения легко следует, что

$$(31) \quad \hat{\tau}(\mathcal{A}(t)) = \hat{\tau}(t),$$

$$\begin{aligned} (1 + \beta) \arg \mathcal{A}(t) - \frac{\beta}{2} \arg(\mathcal{A}(t) + s_0) - \frac{\beta}{2} \arg(\mathcal{A}(t) - s_0) + \hat{\theta}(\mathcal{A}(t)) \\ = \pi - (1 + \beta) \arg t + \frac{\beta}{2} \arg(t + s_0) + \frac{\beta}{2} \arg(t - s_0) - \hat{\theta}(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\arg \mathcal{A}(t) = \pi - \arg t$ и

$$\arg(\mathcal{A}(t) + s_0) + \arg(\mathcal{A}(t) - s_0) = \pi - \arg(t - s_0) + \pi - \arg(t + s_0),$$

последнее равенство можно переписать так:

$$(32) \quad \hat{\theta}(\mathcal{A}(t)) = -\hat{\theta}(t).$$

Нетрудно видеть, что условия (31) и (32) для функций τ и θ , определённых в (29), записываются в следующем виде:

$$(33) \quad \tau(\pi - \sigma) = \tau(\sigma), \quad \theta(\pi - \sigma) = -\theta(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi].$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (30) нам потребуется знать значения функций θ и τ в некоторых точках. Из (25) следует, что

$$\theta(0) = \theta(\pi) = 0,$$

а из (32) — что $\theta(\pi/2) = 0$.

Поскольку $u(t) \rightarrow -1$ при $t \rightarrow 1$,

$$-(1 - s_0^2)^{\beta/2} e^{-\hat{\theta}(1)} e^{\hat{\tau}(1)} = -1.$$

Используя (25) и (33), найдём, что

$$\hat{\tau}(1) = \hat{\tau}(-1) = \ln \frac{1}{(1 - s_0^2)^{\beta/2}},$$

то есть

$$\tau(0) = \tau(\pi) = \ln \frac{1}{(1 - s_0^2)^{\beta/2}}.$$

Значение $\tau(\pi/2)$ нам неизвестно.

3.10. Уравнение Некрасова. Продолжим преобразование уравнения Бернулли. Проинтегрировав уравнение (30) от 0 до произвольного σ , мы получим:

$$\varrho^{3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)} - \varrho^{3\beta}(0) e^{3\tau(0)} = \frac{3}{\alpha\pi} \int_0^\sigma \sin((1+\beta)s - \beta\phi(s) + \theta(s)) \operatorname{ctg} s \, ds.$$

Заметим, что $\varrho^2(0) = 1 - s_0^2$ и $e^{3\tau(0)} = (1 - s_0^2)^{-3\beta/2}$. Поэтому

$$\varrho^{3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)} = 1 + \frac{3}{\alpha\pi} \int_0^\sigma \sin((1+\beta)s - \beta\phi(s) + \theta(s)) \operatorname{ctg} s \, ds.$$

Далее,

$$\frac{d\varrho^{3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)}}{d\sigma} = \varrho^{3\beta}(\sigma) e^{3\tau(\sigma)} \left(3\beta \frac{d \ln \varrho(\sigma)}{d\sigma} + 3\tau'(\sigma) \right),$$

где $\tau'(\sigma) = d\tau(\sigma)/d\sigma$. Подставив это выражение в (30), мы придём к уравнению типа уравнения Некрасова:

$$\tau'(\sigma) = -\beta \frac{d \ln \varrho(\sigma)}{d\sigma} + \frac{\sin((1+\beta)\sigma - \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi + 3 \int_0^\sigma \sin((1+\beta)s - \beta\phi(s) + \theta(s)) \operatorname{ctg} s \, ds}.$$

Уравнение Некрасова включает две неизвестные функции τ и θ , поэтому необходимо найти ещё какое-либо соотношение, которое их связывает. Для этого воспользуемся формулами обращения Гильберта.

3.11. Формулы обращения Гильберта на четверти окружности. Функции τ и θ , определённые в (29), являются следами на верхней полуокружности окружности вещественной и мнимой частей аналитической в полукруге D^* функции $i\hat{\Omega} = -\hat{\tau} + i\hat{\theta}$. Поскольку $\hat{\theta}$ равна нулю при $\operatorname{Im} t = 0$, функция $i\hat{\Omega}$ с помощью принципа симметрии Шварца может быть аналитически продолжена на единичный круг $D_\circ^*(|t| < 1)$. Мы оставим за продолженными функциями прежние обозначения, а функции τ и θ будем считать заданными на отрезке $[-\pi, \pi]$. Из принципа симметрии Шварца следует, что

$$(34) \quad \tau(-\sigma) = \tau(\sigma), \quad \theta(-\sigma) = -\theta(\sigma), \quad \sigma \in [-\pi, \pi].$$

Поскольку $\hat{\Omega}$ является аналитической функцией в круге D_\circ^* , для её предельных значений на окружности справедливы формулы обращения Гильберта (см., например, [18, гл. 1, §6]):

$$(35) \quad \tau(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \theta(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} \, ds + \hat{\tau}(0),$$

$$(36) \quad \theta(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \tau(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} \, ds + \hat{\theta}(0),$$

где $\sigma \in [-\pi, \pi]$. Интегралы здесь понимаются в смысле главного значения.

Нам достаточно одного дополнительного уравнения к уравнению Некрасова. Мы будем использовать только (36), поскольку значение $\hat{\tau}(0)$ нам неизвестно. Таким образом, как следует из (25), $\hat{\theta}(0) = 0$. Поэтому

$$(37) \quad \theta(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \tau(s) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} \, ds.$$

Используя свойства (33) и (34) функций τ и θ с помощью замены переменной запишем формулу обращения Гильберта (37) с интегралом по четверти

окружности (см. [13, с. 9]):

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(s) (\operatorname{ctg}(s - \sigma) - \operatorname{ctg}(s + \sigma)) ds.$$

3.12. Уравнение для s_0 . Нам осталось определить параметр s_0 . Пусть s — параметр длины дуги на Γ_0^* , отсчитываемый от точки стока направо. Интегрируя уравнение (28) по отрезку вещественной оси от 0 до s_0 и учитывая (24) и (25), мы получим:

$$\frac{\ell}{h} \left(\cos \beta \frac{\pi}{2} - i \sin \beta \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{s^\beta}{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} \left(\cos \beta \frac{\pi}{2} - i \sin \beta \frac{\pi}{2} \right) ds.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\ell}{h} = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{s^\beta}{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} ds.$$

Из этого уравнения можно найти s_0 . Значение функции $\hat{\tau}$ можно найти с помощью формулы Пуассона:

$$\hat{\tau}(s) = \frac{(1 - |s|^2)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\sigma) \left(\frac{1}{|e^{i\sigma} - s|^2} + \frac{1}{|e^{i\sigma} + s|^2} \right) d\sigma.$$

Заметим, что $\hat{\tau}$ зависит от s_0 , поскольку от s_0 зависит функция τ .

3.13. Математическая постановка задачи. В этом пункте мы соберём все полученные уравнения и сформулируем задачу в терминах функций τ и θ , определённых в (29). Задача включает скалярные параметры:

$$\alpha \in (0, +\infty), \quad \beta \in (0, 1), \quad s_0 \in (0, 1), \quad \frac{\ell}{h} \in (0, +\infty).$$

Напомним, что α есть приведённое число Фруда, которое было определено в (14). Заметим, что β , s_0 и ℓ/h не являются независимыми.

Нами получена система интегро-дифференциальных уравнений для функций τ и θ на интервале от 0 до $\pi/2$:

$$(38) \quad \theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(s) (\operatorname{ctg}(s - \sigma) - \operatorname{ctg}(s + \sigma)) ds,$$

$$(39) \quad \tau'(\sigma) = -\beta \frac{d \ln \varrho(\sigma)}{d\sigma} + \frac{\omega(\sigma)}{\alpha\pi + 3 \int_0^\sigma \omega(s) ds},$$

где

$$\omega(\sigma) = \sin((1 + \beta)\sigma - \beta\phi(\sigma) + \theta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma,$$

$$(40) \quad \varrho^2(\sigma) = |e^{i\sigma} + s_0| |e^{i\sigma} - s_0| = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/2},$$

$$(41) \quad \phi(\sigma) = \frac{1}{2} (\arg(e^{i\sigma} + s_0) + \arg(e^{i\sigma} - s_0)).$$

Первое из этих уравнений получено из формулы обращения Гильберта, второе является уравнением Некрасова. Кроме того, функции τ и θ должны удовлетворять краевым условиям:

$$(42) \quad \tau(0) = \ln \frac{1}{(1 - s_0^2)^{\beta/2}}, \quad \theta(0) = \theta(\pi/2) = 0.$$

Заметим также, что функции τ и θ зависят от параметра $s_0 \in (0, 1)$. Значение этого параметра можно определить, решив следующее уравнение:

$$(43) \quad \frac{\ell}{h} = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{s^\beta}{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} ds,$$

где значение функции $\hat{\tau}$ можно вычислить с помощью формулы Пуассона:

$$(44) \quad \hat{\tau}(s) = \frac{(1 - |s|^2)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\sigma) \left(\frac{1}{|e^{i\sigma} - s|^2} + \frac{1}{|e^{i\sigma} + s|^2} \right) d\sigma.$$

Используя свойства симметрии мы можем восстановить эти функции на всем промежутке $[0, 2\pi]$:

$$(45) \quad \tau(\pi - \sigma) = \tau(\sigma), \quad \theta(\pi - \sigma) = -\theta(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi],$$

$$(46) \quad \tau(-\sigma) = \tau(\sigma), \quad \theta(-\sigma) = -\theta(\sigma), \quad \sigma \in [-\pi, \pi].$$

Теперь перейдем к исследованию разрешимости этой системы.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ

В этом разделе будут сформулированы основные результаты данной работы, посвященные разрешимости задачи (38)–(46). Для этого мы переформулируем систему (38)–(42) в виде нелинейного операторного уравнения в банаховом пространстве и докажем, что данная система имеет решение, которое при выполнении некоторого условия является единственным.

4.1. Преобразование формулы обращения Гильберта. Поскольку $\operatorname{ctg} \sigma = (\ln |\sin \sigma|)'$, с помощью интегрирования по частям интеграл из уравнения (38) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \tau(s) (\operatorname{ctg}(s-\sigma) - \operatorname{ctg}(s+\sigma)) ds &= \int_0^{\pi/2} \tau'(s) (\ln |\sin(s+\sigma)| - \ln |\sin(s-\sigma)|) ds \\ &= \int_0^{\pi/2} \tau'(s) \ln \left| \frac{\sin(s+\sigma)}{\sin(s-\sigma)} \right| ds. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (38) может быть записано так:

$$(47) \quad \theta(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} K(s, \sigma) \tau'(s) ds, \quad \sigma \in [0, \pi/2],$$

где

$$K(s, \sigma) = \ln \left| \frac{\sin(s+\sigma)}{\sin(s-\sigma)} \right|.$$

Отметим, что $K(\sigma, 0) = K(0, s) = K(\sigma, \pi/2) = K(\pi/2, s) = 0$.

Используя тригонометрические тождества ядро K можно представить и в другом виде:

$$K(s, \sigma) = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} s + \operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} s - \operatorname{tg} \sigma} \right|.$$

Из этого представления сразу следует, что $K(s, \sigma) \geq 0$ для всех тех s и σ из отрезка $[0, \pi/2]$, для которых это ядро определено.

4.2. **Формулировка задачи в виде операторного уравнения.** Теперь введём новую неизвестную функцию:

$$(48) \quad \zeta(\sigma) = 3\tau'(\sigma) + \frac{d}{d\sigma} \ln \varrho^{3\beta}(\sigma).$$

Тогда, как следует из (39) и (47), эта функция удовлетворяет уравнению

$$(49) \quad \zeta = \Phi(\zeta),$$

где Φ — нелинейный оператор, определённый следующим образом

$$(50) \quad \Phi(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin\left((1+\beta)\sigma - \beta\phi(\sigma) - \beta H\left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho\right)(\sigma) + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma)\right) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta ds}$$

при $\sigma \in (0, \pi/2]$, а оператор H имеет следующий вид

$$(51) \quad (H\zeta)(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} K(s, \sigma) \zeta(s) ds.$$

В самом деле, из (39) следует, что

$$\tau'(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} \left(-\beta \ln \varrho(\sigma) + \frac{1}{3} \ln \left(\alpha\pi + 3 \int_0^\sigma \omega(s) ds \right) \right).$$

Интегрируя это уравнение от 0 до произвольного $\sigma \in (0, \pi/2)$ и учитывая (42) и (48), мы получим, что

$$\exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds = \frac{\alpha\pi + 3 \int_0^\sigma \omega(s) ds}{\alpha\pi}.$$

Поскольку

$$\omega(\sigma) = \sin \left(\sigma + \beta \left(\sigma - \phi(\sigma) - H\left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho\right)(\sigma) \right) + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma) \right) \operatorname{ctg} \sigma,$$

из этого равенства сразу вытекает, что

$$\zeta(\sigma) = \frac{3 \sin \left(\sigma + \beta \left(\sigma - \phi(\sigma) - H\left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho\right)(\sigma) \right) + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma) \right) \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi \exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds}.$$

Это и есть уравнение (50).

Исследуем функцию $\sigma - \phi(\sigma) - H\left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho\right)(\sigma)$. Для этого на всей комплексной плоскости \mathbb{C} рассмотрим функцию

$$\Psi_0(t) = \ln \frac{t}{(t+s_0)^{1/2}(t-s_0)^{1/2}}.$$

Эта функция имеет логарифмические особенности в точках $t = 0$ и $t = \pm s_0$, однако является однозначной и аналитической в области с разрезом $\mathbb{C} \setminus [-s_0, s_0]$. При этом $\Psi_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \Psi_0(1/t).$$

Эта функция является однозначной и аналитической в единичном круге D_0^* , причём $\Psi(0) = 0$. Поэтому для Ψ справедливы формулы обращения Гильберта:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Psi(e^{i\sigma}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im} \Psi(e^{is}) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds, \\ \operatorname{Im} \Psi(e^{i\sigma}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \Psi(e^{is}) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} ds, \end{aligned}$$

где $\sigma \in [-\pi, \pi)$. Интегралы здесь понимаются в смысле главного значения. Заметим, что функции ϱ и ϕ , определённые в (40) и (41), обладают следующими свойствами:

$$\varrho(-\sigma) = \varrho(\sigma), \quad \phi(-\sigma) = -\phi(\sigma), \quad \sigma \in [-\pi, \pi).$$

Из этих свойств следует, что

$$\begin{aligned} \Psi(e^{i\sigma}) &= \ln \left| \frac{e^{-i\sigma}}{(e^{-i\sigma} + s_0)^{1/2}(e^{-i\sigma} - s_0)^{1/2}} \right| + i \arg \left(\frac{e^{-i\sigma}}{(e^{-i\sigma} + s_0)^{1/2}(e^{-i\sigma} - s_0)^{1/2}} \right) \\ &= -\ln \varrho(-\sigma) + i (\arg(e^{-i\sigma}) - \arg((e^{-i\sigma} + s_0)^{1/2}) - \arg((e^{-i\sigma} - s_0)^{1/2})) \\ &= -\ln \varrho(\sigma) + i (-\sigma + \phi(\sigma)). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(52) \quad -\ln \varrho(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-s + \phi(s)) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2} ds,$$

$$(53) \quad -\sigma + \phi(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \varrho(s) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2} ds.$$

Рассмотрим формулу (53). Поскольку $\varrho(-\sigma) = \varrho(\sigma)$ и $\varrho(\pi - \sigma) = \varrho(\sigma)$, так же как в пункте 3.11 мы получим, что

$$-\sigma + \phi(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \varrho(s) (\operatorname{ctg}(s - \sigma) - \operatorname{ctg}(s + \sigma)) ds,$$

то есть

$$-\sigma + \phi(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} K(s, \sigma) \frac{d}{ds} \ln \varrho(s) ds = H \left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho \right) (\sigma).$$

Введём функцию μ :

$$(54) \quad \mu(\sigma) = 2(\phi(\sigma) - \sigma) = 2H \left(\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho \right) (\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2].$$

Тогда оператор Φ преобразуется к следующему виду:

$$(55) \quad \Phi(\zeta)(\sigma) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin(\sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^{\sigma} \zeta ds}, \quad \sigma \in (0, \pi/2].$$

Мы будем искать решения уравнения (49) с оператором Φ из (55) в банаховом пространстве $L^2(0, \pi/2)$ с нормой

$$\|\zeta\| = \left(\int_0^{\pi/2} |\zeta(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2}.$$

Далее, из соображений краткости, будем обозначать $L^2(0, \pi/2)$ через L^2 .

4.3. Свойства функции μ . Выясним теперь свойства функции μ , определённой в (54). Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{ctg} 2\phi(\sigma) = \frac{\cos 2\sigma - s_0^2}{\sin 2\sigma} = \operatorname{ctg} 2\sigma - \frac{s_0^2}{\sin 2\sigma}.$$

Из этого равенства следует, что $\mu(\sigma) > 0$ (так как $\phi(\sigma) > \sigma$) при $\sigma \in (0, \pi/2)$. Легко обнаружить, что

$$(56) \quad \mu(0) = \mu(\pi/2) = 0.$$

Выведем ещё некоторые свойства функции μ . Продифференцируем следующее равенство по σ :

$$\ln(e^{2i\sigma} - s_0^2) = \ln(e^{i\sigma} + s_0)(e^{i\sigma} - s_0) = \ln \varrho^2(\sigma) e^{2i\phi(\sigma)} = 2 \ln \varrho(\sigma) + 2i\phi(\sigma).$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\sigma} \ln(e^{2i\sigma} - s_0^2) = 2 \frac{s_0^2 \sin 2\sigma}{1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4} + 2i \frac{1 - s_0^2 \cos 2\sigma}{1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4},$$

приравняв вещественную и мнимую части, получим, что

$$\frac{d}{d\sigma} \ln \varrho(\sigma) = \frac{s_0^2 \sin 2\sigma}{1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4}, \quad \phi'(\sigma) = \frac{1 - s_0^2 \cos 2\sigma}{1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4}.$$

Нам ещё понадобятся вторые производные:

$$\frac{d^2}{d\sigma^2} \ln \varrho(\sigma) = \frac{2s_0^2(1 + s_0^4) \cos 2\sigma - 4s_0^4}{(1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4)^2}, \quad \phi''(\sigma) = -\frac{2s_0^2(1 - s_0^4) \sin 2\sigma}{(1 - 2s_0^2 \cos 2\sigma + s_0^4)^2}.$$

Заметим, что $\phi''(\sigma) < 0$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$, то есть функция ϕ является вогнутой на этом интервале. Это утверждение справедливо и для функции μ . При этом

$$\phi'(0) = \frac{1 - s_0^2}{1 - 2s_0^2 + s_0^4} = \frac{1}{1 - s_0^2} \quad \text{и} \quad \mu'(0) = 2(\phi'(0) - 1) = \frac{2s_0^2}{1 - s_0^2}.$$

Нетрудно заметить, что функция μ зависит от параметра s_0 . На рис. 3 показано поведение функции $\mu(\sigma)$ при различных s_0 .

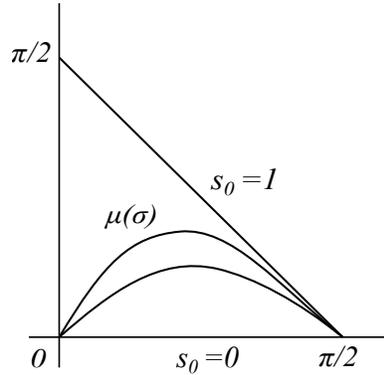


Рис. 3. График функции $\mu(\sigma)$ при разных значениях s_0 .

В дальнейшем мы будем использовать условие, заключающееся в том, что

$$(57) \quad \beta\mu(\sigma) \leq \sigma \quad \text{при} \quad \sigma \in [0, \pi/2].$$

Учитывая вышесказанное, это условие будет выполнено, если

$$(58) \quad \beta\mu'(0) \leq 1,$$

то есть при

$$(59) \quad \beta \leq \frac{1 - s_0^2}{2s_0^2}$$

или эквивалентно

$$(60) \quad s_0^2 \leq \frac{1}{1 + 2\beta}.$$

Кроме того, поскольку функция μ' достигает своего максимума в точке $\sigma = 0$, из условия (58) будет следовать следующая оценка:

$$(61) \quad \beta\mu'(\sigma) \leq 1 \quad \text{для } \sigma \in [0, \pi/2].$$

Нам ещё понадобится вычислить $\mu(\pi/4)$. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{ctg} \arg(e^{i\pi/4} \pm s_0) = 1 \pm s_0\sqrt{2}.$$

Используя тригонометрические тождества, получим следующее:

$$\operatorname{ctg} \mu(\pi/4) = \operatorname{ctg} (2\phi(\pi/4) - \pi/2) = \frac{-1}{\operatorname{ctg} 2\phi(\pi/4)} = \frac{1}{s_0^2}$$

или

$$\tan \mu(\pi/4) = s_0^2.$$

4.4. Вспомогательные результаты. Заметим, что оператор H , заданный формулой (51), был подробно исследован в [13, с. 15–18]. Для удобства мы сформулируем результаты из этой работы в виде лемм 1–6.

Лемма 1. *Оператор $H : L^2 \rightarrow L^2$ является ограниченным и*

$$\|Hw\| \leq \frac{1}{2} \|w\|$$

для всех $w \in L^2$.

Лемма 2. *Пусть $w \in L^2$ и $u = Hw$. Тогда $u' \in L^2$ и $\|u'\| = \|w\|$.*

Лемма 3. *Если $w \in L^2$, $(w \sin \sigma)' \in L^2$ и $w(\pi/2) = 0$, то $((Hw)' \sin \sigma)' \in L^2$ и*

$$\|((Hw)' \sin \sigma)'\| \leq \|(w \sin \sigma)'\|.$$

Лемма 4. *Пусть $w \in L^2$ и $u = Hw$. Тогда $u \in C^{1/2}[0, \pi/2]$,*

$$|u(\sigma) - u(s)| \leq \|w\| |\sigma - s|^{1/2}, \quad |u(\sigma)| \leq \|w\| |\sigma|^{1/2} \quad \text{и} \quad |u(\sigma)| \leq \|w\| |\pi/2 - \sigma|^{1/2}$$

для всех $\sigma, s \in [0, \pi/2]$.

Лемма 5. *Определим функцию $W(\sigma)$ следующим образом:*

$$W(\sigma) = \int_0^\sigma w(s) ds.$$

Если $w \in L^2$, то $W \in C^{0,1/2}[0, \pi/2]$ и $|W(\sigma)| \leq \|w\| \sigma^{1/2}$ для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$.

Лемма 6. *Пусть $w \in L^2$. Тогда функции f и h , определённые следующим образом*

$$f(\sigma) = \frac{(Hw)(\sigma)}{\sin \sigma} \quad \text{и} \quad h(\sigma) = \frac{\int_0^\sigma w(s) ds}{\sin \sigma},$$

принадлежат L^2 и справедливы оценки:

$$(62) \quad \|f\| \leq 2\|w\|,$$

$$(63) \quad \|h\| \leq 2\|w\|.$$

Выведем ещё некоторые дополнительные свойства.

Лемма 7. Пусть выполняется условие (57), то есть $\beta\mu(\sigma) \leq \sigma$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$, и $w \in L^2$. Тогда функция g , определённая следующим образом

$$g(\sigma) = \sin(\sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}(Hw)(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma,$$

принадлежит L^2 и выполняется оценка:

$$(64) \quad \|g\| \leq 1 + \frac{2}{3} \|w\|.$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (64) заметим, что

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, $0 \leq \sigma - \beta\mu(\sigma) \leq \sigma$, так как $\mu \geq 0$ и выполняется условие (57). Следовательно,

$$|g(\sigma)| \leq (|\sigma - \beta\mu(\sigma)| + \frac{1}{3}|Hw|(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma \leq (\sigma + \frac{1}{3}|Hw|(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma$$

для всех $\sigma \in (0, \pi/2]$. Поскольку

$$(65) \quad \int_0^{\pi/2} (\sigma \operatorname{ctg} \sigma)^2 d\sigma < 1$$

и $|\cos \sigma| \leq 1$, используя лемму 6, получим, что

$$\|g\| \leq 1 + \frac{2}{3} \|w\|.$$

□

Лемма 8. Если w_1 и w_2 — неотрицательные функции из L^2 , то

$$\|\Phi(w_2) - \Phi(w_1)\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\|.$$

Доказательство. Пусть $v_\lambda = w_1 + \lambda(w_2 - w_1)$ для каждого $\lambda \in [0, 1]$. Тогда

$$\frac{dv_\lambda}{d\lambda} = w_2 - w_1$$

и

$$\Phi(w_2) - \Phi(w_1) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) d\lambda.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) &= \frac{3 \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi} \frac{d}{d\lambda} \frac{\sin(\sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}Hv_\lambda)}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} = \\ &= \frac{3 \operatorname{ctg} \sigma}{\alpha\pi} \left(\frac{\cos(\sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}Hv_\lambda) \frac{1}{3}H(w_2 - w_1)}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(\sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}Hv_\lambda) \int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds}{\exp \int_0^\sigma v_\lambda ds} \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание неотрицательность функции v_λ , мы получим

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) \right\| \leq \frac{1}{\alpha\pi} \left\| \frac{H(w_2 - w_1)}{\sin \sigma} \right\| + \frac{3}{\alpha\pi} \left\| \frac{\int_0^\sigma (w_2 - w_1) ds}{\sin \sigma} \right\|.$$

Из этого неравенства и леммы 6 вытекает следующая оценка:

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} \Phi(v_\lambda) \right\| \leq \frac{2}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\| + \frac{6}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\| = \frac{8}{\alpha\pi} \|w_2 - w_1\|,$$

откуда сразу следует требуемое неравенство. \square

4.5. Однозначная разрешимость операторного уравнения. Теперь мы можем приступить к доказательству существования и единственности решения операторного уравнения (49). Отметим, что мы будем искать решение операторного уравнения при определённых значениях параметров. Зафиксируем некоторое произвольное значение $s_0 \in (0, 1)$. При доказательстве следующей теоремы будем использовать условие (57), которое эквивалентно (59) и (60).

Теорема 1. Пусть выполнено условие (57), то есть $\beta\mu(\sigma) \leq \sigma$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$. Для любого $\alpha > 8/\pi \approx 2,546$ существует единственная неотрицательная функция $\zeta_* \in L^2$, удовлетворяющая уравнению (49), и для неё справедливы оценки:

$$(66) \quad 0 \leq \sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3} (H\zeta_*)(\sigma) \leq \pi \quad \text{при } \sigma \in [0, \pi/2],$$

$$(67) \quad \|\zeta_*\| \leq \frac{9\sqrt{\pi}}{2} + \frac{6\beta}{\sqrt{\pi}} \mu(\pi/4).$$

Доказательство. Для доказательства однозначной разрешимости операторного уравнения (49) воспользуемся принципом сжимающих отображений. Возьмём следующее множество

$$B_R^+ = \{\zeta \in L^2 \mid \|\zeta\| \leq R, \zeta \geq 0\}$$

в пространстве L^2 . Сначала установим существование $R > 0$, для которого $\Phi(B_R^+) \subset B_R^+$.

Пусть R — некоторое положительное число и $\zeta \in B_R^+$. Тогда

$$\exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds \geq 1 \quad \text{для всех } \sigma \in [0, \pi/2].$$

Из леммы 7 следует, что

$$\|\Phi(\zeta)\| \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \|\zeta\|\right) \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} R\right).$$

Неравенство $\|\Phi(\zeta)\| \leq R$ справедливо, если

$$\frac{3}{\alpha\pi} \left(1 + \frac{2}{3} R\right) \leq R.$$

Таким образом, при

$$(68) \quad R \geq \frac{3}{\alpha\pi - 2}$$

мы получаем, что $\|\Phi(\zeta)\| \leq R$ для всех $\zeta \in B_R^+$.

Далее нам нужно установить неотрицательность функции $\Phi(\zeta)$. Поскольку $\operatorname{ctg}(\sigma) \geq 0$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$, этот факт является следствием следующего неравенства:

$$(69) \quad 0 \leq \sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3} (H\zeta)(\sigma) \leq \pi.$$

Если $\beta\mu(\sigma) \leq \sigma$ для $\sigma \in [0, \pi/2]$, то левое неравенство справедливо для неотрицательной функции ζ , поскольку $K \geq 0$ и H — положительный оператор.

Как следует из леммы 4, правое неравенство справедливо всякий раз, когда

$$\|\zeta\| \gamma(\sigma) \leq 3(\pi - \sigma + \beta\mu(\sigma)),$$

где $\gamma(\sigma) = \min\{\sigma^{1/2}, (\pi/2 - \sigma)^{1/2}\}$. Следовательно, функция $\Phi(\zeta)$ неотрицательна, если $\beta\mu(\sigma) \leq \sigma$ при $\sigma \in [0, \pi/2]$ и $\zeta \in B_R^+$ с

$$(70) \quad R \leq \min_{\sigma \in [0, \pi/2]} \frac{3(\pi - \sigma + \beta\mu(\sigma))}{\gamma(\sigma)} = \frac{9\sqrt{\pi}}{2} + \frac{6\beta}{\sqrt{\pi}} \mu(\pi/4).$$

Взяв теперь R_* , удовлетворяющее неравенствам (68) и (70), получим, что $\Phi(B_{R_*}^+) \subset B_{R_*}^+$. Такое число R_* существует, если

$$(71) \quad \alpha \geq \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi^{3/2} + 4\pi^{1/2}\beta\mu(\pi/4)}.$$

Теперь покажем, что Φ является сжимающим отображением в $B_{R_*}^+$. Возьмём две произвольные неотрицательные функции ζ_1 и ζ_2 , определённые в $B_{R_*}^+$. Поскольку $B_{R_*}^+ \subset L^2$, из леммы 8 следует, что

$$\|\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)\| \leq \frac{8}{\alpha\pi} \|\zeta_1 - \zeta_2\|,$$

то есть Φ является сжимающим при

$$(72) \quad \alpha > 8/\pi.$$

Заметим, что если α удовлетворяет оценке (72), то она удовлетворяет и оценке (71). То есть Φ является сжимающим отображением $B_{R_*}^+$ в себя и существует единственная функция $\zeta_* \in B_{R_*}^+$, являющаяся решением операторного уравнения (49). Также отметим, что оценки (66) и (67) следуют из (69) и (70) соответственно. Теорема доказана. \square

Вообще говоря, оператор Φ зависит от s_0 , поскольку функция μ , входящая в его определение, зависит от s_0 . Таким образом, решение ζ_* операторного уравнения (49) будет зависеть от s_0 .

Оценим решение операторного уравнения (49).

Лемма 9. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для функции $\zeta_* \in L^2$, являющейся решением операторного уравнения (49), справедлива следующая оценка:

$$(73) \quad \|\zeta_*\| \leq \frac{6}{\alpha\pi - 2} < 1.$$

Доказательство. Используя условие (57), получим:

$$\begin{aligned} |\zeta_*| &= |\Phi(\zeta_*)| = \frac{3}{\alpha\pi} \left| \frac{\sin(\sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}H\zeta_*(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds} \right| \\ &\leq \frac{3}{\alpha\pi} \left| (\sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}H\zeta_*(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma \right| \leq \frac{3}{\alpha\pi} \left(|2\sigma \operatorname{ctg} \sigma| + \frac{1}{3} |H\zeta_*(\sigma)| \right). \end{aligned}$$

Используя лемму 7 и (65), получим следующую оценку:

$$\|\zeta_*\| = \|\Phi(\zeta_*)\| \leq \frac{6}{\alpha\pi} \|\sigma \operatorname{ctg} \sigma\| + \frac{1}{\alpha\pi} \left\| \frac{H\zeta_*}{\sin \sigma} \right\| \leq \frac{6}{\alpha\pi} + \frac{2}{\alpha\pi} \|\zeta_*\|.$$

Таким образом,

$$\|\zeta_*\| \leq \frac{6}{\alpha\pi - 2}.$$

Из (72) следует, что

$$\|\zeta_*\| \leq \frac{6}{\alpha\pi - 2} < 1.$$

□

4.6. Определение параметра s_0 . Будем рассматривать тройку параметров $s_0 \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$ и $\alpha > 8/\pi$. Для этого введём множество

$$\Omega = \left\{ (s_0, \alpha, \beta) \mid s_0, \beta \in (0, 1), \alpha \in (8/\pi, +\infty), \beta \leq \frac{1 - s_0^2}{2s_0^2} \right\}.$$

Неравенство на β , фигурирующее в определении множества Ω , есть ничто иное как условие (59), эквивалентное условию (57) из теоремы 1.

Лемма 10. *Решение $\zeta_* \in L^2$ операторного уравнения (49) зависит непрерывно в L^2 от параметров $(s_0, \alpha, \beta) \in \Omega$.*

Доказательство. Как было отмечено в пункте 4.3, функция μ зависит от параметра s_0 . Поэтому далее мы будем писать $\mu(\sigma, s_0)$ вместо $\mu(\sigma)$. Запишем оператор Φ в такой форме, чтобы была видна его зависимость от параметров (s_0, α, β) :

$$\Phi(\zeta)(\sigma, s_0, \alpha, \beta) = \frac{3}{\alpha\pi} \frac{\sin(\sigma - \beta\mu(\sigma, s_0) + \frac{1}{3}(H\zeta)(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta(s) ds}.$$

Видим, что Φ на $B_{R_*^+}$ непрерывно зависит от этих параметров. В теореме 1 мы доказали, что отображение Φ является сжимающим. Согласно теореме об устойчивости неподвижной точки сжимающего отображения (см., например, [19, с. 44]), мы получим, что решение ζ_* операторного уравнения $\zeta_* = \Phi(\zeta_*)$, непрерывно зависит в L^2 от параметров $(s_0, \alpha, \beta) \in \Omega$. □

Для того чтобы решить исходную задачу, нам необходимо определить параметр s_0 , являющийся решением уравнения (43) при фиксированных α и β . Обозначим это решение через s_0^* . Для краткости, перепишем уравнение (43) в следующем виде:

$$(74) \quad \frac{\ell}{h} = F(s_0, \alpha, \beta),$$

где

$$(75) \quad F(s_0, \alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_0} \frac{s^\beta}{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} e^{-\hat{\tau}(s)} ds.$$

Лемма 11. *Функция $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.*

Доказательство. Для доказательства этого свойства воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Функция $\hat{\tau}$ является гармонической в круге D_0^* , причём τ — её граничное значение. Из (42) и (48) мы получаем, что

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{3} \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds - \ln \varrho^\beta(\sigma),$$

где $\varrho(\sigma) = (1 + s_0^4 - 2s_0^2 \cos 2\sigma)^{1/4}$. Отсюда, в силу леммы 10, вытекает, что функция τ , а значит, и функция $\hat{\tau}$ зависят непрерывным образом от параметров $(s_0, \alpha, \beta) \in \Omega$. Далее для наглядности вместо $\hat{\tau}(s)$ мы будем писать $\hat{\tau}(s, s_0, \alpha, \beta)$.

Чтобы воспользоваться теоремой Лебега необходимо найти интегрируемую мажоранту подинтегрального выражения в определении функции $F(s_0, \alpha, \beta)$. Воспользуемся заменой переменных $p = s/s_0$ в интеграле из определения (75):

$$(76) \quad F(s_0, \alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \frac{s_0}{1 - s_0} \int_0^1 \frac{(1 - s_0) p^\beta}{(1 - p^2)^{\beta/2}} \frac{1 + (ps_0)^2}{1 - (ps_0)^2} e^{-\hat{\tau}(ps_0, s_0, \alpha, \beta)} dp.$$

Заметим, что функция $s_0/(1 - s_0)$, стоящая перед интегралом в (76), является непрерывной на множестве Ω .

Поскольку функция $\hat{\tau}$ является гармонической в D_o^* , её максимум и минимум лежат на границе круга. Следовательно, из симметричности функции τ относительно мнимой и вещественной осей получим следующую оценку:

$$(77) \quad \tau_* = \min_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) \leq \hat{\tau}(t, s_0, \alpha, \beta) \leq \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) = \tau^*, \quad t \in D_o^*.$$

Поскольку $0 < p < 1$, получим, что

$$\begin{aligned} (1 - p^2)^{\beta/2} &= (1 - p)^{\beta/2} (1 + p)^{\beta/2} > (1 - p)^{\beta/2} > (1 - p)^{1/2}, \\ 1 - (ps_0)^2 &= (1 - ps_0)(1 + ps_0) > (1 - ps_0) > (1 - s_0), \\ 1 + (ps_0)^2 &< 2 \quad \text{и} \quad p^{\beta/2} < 1. \end{aligned}$$

Тогда подинтегральное выражение интеграла из (76) можно оценить в следующем виде:

$$\frac{(1 - s_0) p^\beta}{(1 - p^2)^{\beta/2}} \frac{1 + (ps_0)^2}{1 - (ps_0)^2} e^{-\hat{\tau}(ps_0, s_0, \alpha, \beta)} < 2e^{-\tau_*} \varphi(p),$$

где $\varphi(p) = (1 - p)^{-1/2}$. Нетрудно видеть, что функция φ интегрируема на интервале $(0, 1)$. Следовательно, функция φ является интегрируемой мажорантой и мы можем применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Значит, функция $F(s_0, \alpha, \beta)$ зависит непрерывным образом от (s_0, α, β) на Ω . \square

Теорема 2. *Существует такая положительная строго убывающая функция $C : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что:*

- (1) $C(\beta) \rightarrow +\infty$ при $\beta \rightarrow 0$ и $C(1) \approx 0,135$;
- (2) если $\alpha > 8/\pi$, $\beta \in (0, 1)$ и

$$(78) \quad 0 < \frac{\ell}{h} < C(\beta),$$

то найдётся параметр s_0^* , такой что $(s_0^*, \alpha, \beta) \in \Omega$ и

$$(79) \quad F(s_0^*, \alpha, \beta) = \frac{\ell}{h}.$$

Доказательство. Для доказательства разрешимости уравнения (79) будем использовать теорему о промежуточном значении. Напомним, что разрешимость операторного уравнения (49) была доказана при выполнении условия (57), которое можно записать следующим образом:

$$s_0 \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta}}\right] \quad \text{при} \quad \beta \in (0, 1).$$

Сначала заметим, что для всех α и β

$$(80) \quad F(s_0, \alpha, \beta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s_0 \rightarrow 0.$$

Теперь исследуем поведение функции $F(s_0, \alpha, \beta)$ когда s_0 стремится к правому концу интервала. Из (77) мы получаем, что

$$F(s_0, \alpha, \beta) \geq \frac{2}{\pi} e^{-\tau^*} I(s_0),$$

где

$$I(s_0) = \int_0^{s_0} \frac{s^\beta}{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds.$$

Оценим $I(s_0)$ снизу. Пусть $\beta \in (0, 1)$ и $\gamma \in (0, s_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_\gamma^{s_0} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds &= \int_\gamma^{s_0} \frac{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}}{s^\beta} \frac{s^\beta}{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds \\ &\leq \frac{(s_0^2 - \gamma^2)^{\beta/2}}{\gamma^\beta} \int_\gamma^{s_0} \frac{s^\beta}{(s_0^2 - s^2)^{\beta/2}} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds \leq \frac{(s_0^2 - \gamma^2)^{\beta/2}}{\gamma^\beta} I(s_0). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_\gamma^{s_0} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} ds = -(s_0 - \gamma) + \ln \frac{1 + s_0}{1 - s_0} - \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma},$$

получим, что

$$I(s_0) \geq \frac{\gamma^\beta}{(s_0^2 - \gamma^2)^{\beta/2}} \left(-(s_0 - \gamma) + \ln \frac{1 + s_0}{1 - s_0} - \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right).$$

Положив $\gamma = s_0/2$, найдём, что

$$I(s_0) \geq I_*(s_0) = \frac{1}{3^{\beta/2}} \left(-\frac{s_0}{2} + \ln \frac{1 + s_0}{1 + s_0/2} + \ln \frac{1 - s_0/2}{1 - s_0} \right).$$

Функция I_* является строго возрастающей на $[0, 1)$, $I_*(0) = 0$ и $I_*(s_0) \rightarrow +\infty$ при $s_0 \rightarrow 1$.

Оценим теперь $e^{-\tau^*}$. Нетрудно видеть, что

$$\tau^* = \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \tau(\sigma) = \frac{1}{3} \max_{\sigma \in [0, \pi/2]} \int_0^\sigma \zeta_*(s) ds - \min_{\sigma \in [0, \pi/2]} \ln \varrho^\beta(\sigma).$$

Согласно (73),

$$\int_0^\sigma \zeta_*(s) ds \leq \int_0^{\pi/2} \zeta_*(s) ds \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\zeta_*\| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Кроме того, $\varrho(\sigma) \geq \varrho(0)$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$. Поэтому

$$\tau^* \leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\beta}{2} \ln(1 - s_0^2)$$

и

$$e^{-\tau^*} \geq \left(1 - \frac{1}{1 + 2\beta} \right)^{\beta/2} \exp \left\{ -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\}.$$

Следовательно,

$$(81) \quad F\left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta}}, \alpha, \beta\right) \geq C(\beta),$$

где

$$C(\beta) = \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\} \left(1 - \frac{1}{1+2\beta} \right)^{\beta/2} I_* \left(\frac{1}{\sqrt{1+2\beta}} \right).$$

Функция $C(\beta)$ является строго убывающей на $(0,1]$, $C(\beta) \rightarrow +\infty$ при $\beta \rightarrow 0$ и $C(1) \approx 0,135$.

Таким образом, из непрерывности функции $F(s_0, \alpha, \beta)$ на Ω , доказанной в лемме 11, и из оценок (80) и (81) следует существование параметра $s_0^* \in (0, 1)$, такого что уравнение (79) разрешимо, если

$$0 < \frac{\ell}{h} < C(\beta).$$

Теорема доказана. □

Замечание. В случае плоского горизонтального дна отсутствует ограничение на ℓ/h . В самом деле, ограничение (60) при $\beta = 0$ выполняется автоматически и $C(\beta) \rightarrow +\infty$ при $\beta \rightarrow 0$. Поэтому условие (78) в теореме 2 переписется в следующем виде:

$$0 < \frac{\ell}{h} < +\infty. \quad \bullet$$

Замечание. В безразмерных переменных глубина течения жидкости на бесконечности равна 1, а высота треугольного выступа равна $\frac{\ell}{h} \sin \beta \frac{\pi}{2}$. Обозначив величину выступа за h_0 , преобразуем условие (78) в следующем виде:

$$0 < h_0 < C(\beta) \sin \beta \frac{\pi}{2}.$$

Из графика функции $C(\beta) \sin \beta \frac{\pi}{2}$, приведённого на рис. 4, видно, что значение h_0 строго меньше 1. •

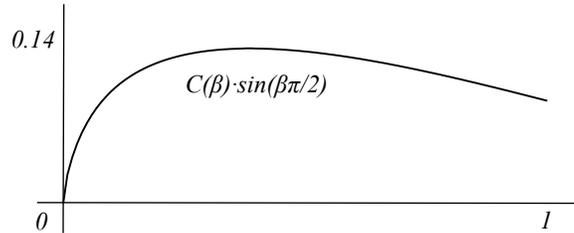


Рис. 4. График функции $C(\beta) \sin \beta \frac{\pi}{2}$ при $\beta \in [0, 1]$.

Мы показали, что для тройки параметров $(s_0^*, \alpha, \beta) \in \Omega$ существуют функции τ и θ , образующие решение задачи (38)–(46). Эти функции определяются следующим образом:

$$(82) \quad \theta(\sigma) = \frac{1}{3} (H\zeta_*)(\sigma), \quad \tau'(\sigma) = \frac{1}{3} \zeta_*(\sigma) - \frac{d}{d\sigma} \ln \varrho^\beta(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2).$$

Единственность решения задачи доказать не удалось, поскольку не установлена монотонность функции $F(s_0, \alpha, \beta)$ по параметру s_0 .

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Разрешимость системы (38)–(46) может не давать разрешимость исходной задачи, поскольку для этого необходимо, чтобы существовали конформные отображения F и G . Если происходит опрокидывание свободной границы Γ , то есть угол наклона к ней превышает $\pi/2$, то отображения F и G могут стать не взаимно однозначными (см. рис. 5) и в этом случае решение операторного уравнения (49) не дает решения исходной задачи. В данном пункте будет установлено, что опрокидывание невозможно, если число Фруда α не слишком мало.

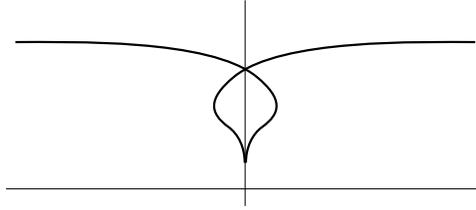


Рис. 5. Отсутствие инъективности отображений G и F в случае опрокидывания при σ близких к $\pi/2$.

Запишем свободную границу Γ в параметрическом виде:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \tilde{x}(\sigma), y = \tilde{y}(\sigma), \sigma \in (0, \pi)\}.$$

Для этого вспомним, что

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = G(e^{i\sigma}), \sigma \in (0, \pi)\}$$

и

$$\frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} e^{i(\sigma - \beta\mu(\sigma) + \theta(\sigma))} \frac{\operatorname{ctg} \sigma}{\varrho^\beta(\sigma)}.$$

Несмотря на то, что в (82) функции τ и θ определены на интервале $(0, \pi/2)$, мы можем воспользоваться свойствами симметрии (33) и продолжить эти функции на весь интервал $(0, \pi)$.

Для краткости, введём функцию $\eta(\sigma)$, такую что

$$\eta(\sigma) = \sigma - \beta\mu(\sigma) + \theta(\sigma).$$

Тогда функции \tilde{x} и \tilde{y} находятся из следующих соотношений:

$$\frac{d\tilde{x}(\sigma)}{d\sigma} = \operatorname{Re} \frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} \cos(\eta(\sigma)) \frac{\operatorname{ctg} \sigma}{\varrho^\beta(\sigma)},$$

$$\frac{d\tilde{y}(\sigma)}{d\sigma} = \operatorname{Im} \frac{dG(e^{i\sigma})}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} e^{-\tau(\sigma)} \sin(\eta(\sigma)) \frac{\operatorname{ctg} \sigma}{\varrho^\beta(\sigma)},$$

$$\tilde{x}(\pi/2) = 0, \quad \tilde{y}(0) = 1 - \frac{\ell}{h} \sin \frac{\pi}{2} \beta.$$

Нетрудно заметить, что функция $\tilde{y}(\sigma)$ монотонно убывает на интервале $(0, \pi/2)$. Кроме того, из этих формул следует, что

$$\frac{d\tilde{y}(\sigma)}{d\sigma} \left(\frac{d\tilde{x}(\sigma)}{d\sigma} \right)^{-1} = \operatorname{tg}(\eta(\sigma)),$$

то есть $\eta(\sigma) + \pi k$ есть угол наклона касательной к Γ в точке $(\tilde{x}(\sigma), \tilde{y}(\sigma))$, где k — некоторое целое число. Поскольку при $\sigma = 0$ угол равен 0, получим, что $k = 0$ при $\sigma \in [0, \pi/2)$. При $\sigma = \pi$ угол равен π , поэтому $k = 0$ при $\sigma \in (\pi/2, \pi]$. Таким образом, $\eta(\sigma)$ есть угол наклона свободной границы, изображенный на рис. 6. На этом рисунке также изображён касательный вектор $\mathbf{q} = (d\tilde{x}/d\sigma, d\tilde{y}/d\sigma)$.

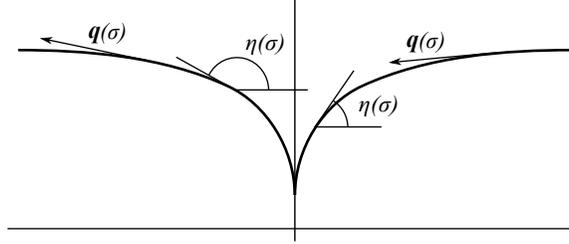


Рис. 6. Угол $\eta(\sigma)$ между осью x и касательной к свободной границе \mathbf{q} .

Из (42) и (56) вытекает, что $\eta(0) = 0$ и $\eta(\pi/2) = \pi/2$. Из последнего, в частности, следует, что в точке над стоком образуется касп, то есть касательная к свободной границе становится вертикальной.

Согласно (82),

$$\eta(\sigma) = (\sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{3}(H\zeta_*)(\sigma)), \quad \sigma \in [0, \pi/2].$$

Покажем, что η меньше чем $\pi/2$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$ при достаточно больших α .

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение. Для краткости введём следующую функцию:

$$\nu(\sigma) = \sin(\eta(\sigma)) \operatorname{ctg} \sigma, \quad \sigma \in (0, \pi/2].$$

Нетрудно видеть, что $\nu(\sigma) > 0$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$, $\nu(\pi/2) = 0$, и, как следует из леммы 7, $\nu \in L^2$.

Лемма 12. Пусть выполняются условия теоремы 1. Функция $(\nu(\sigma) \sin \sigma)'$ принадлежит пространству L^2 и

$$\|(\nu \sin \sigma)'\| \leq \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3} \|\zeta_*\| < \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3}.$$

Доказательство. Поскольку

$$(\nu(\sigma) \sin \sigma)' = (\sin(\eta(\sigma)) \cos \sigma)' = \cos(\eta(\sigma)) \eta'(\sigma) \cos \sigma - \sin(\eta(\sigma)) \sin \sigma$$

и

$$\eta' = 1 - \beta\mu' + (H\zeta_*)'/3,$$

получим следующую оценку:

$$|(\nu(\sigma) \sin \sigma)'| \leq \left| (1 - \beta\mu' + \frac{1}{3}(H\zeta_*)') \cos(\eta(\sigma)) \cos \sigma \right| + |\sin(\eta(\sigma)) \sin \sigma|.$$

Согласно (60),

$$|(\nu(\sigma) \sin \sigma)'| \leq 2|\cos \sigma| + \frac{1}{3} |(H\zeta_*)'(\sigma)| + |\sin \sigma|.$$

Следовательно, в силу лемм 2 и 9, мы имеем:

$$\|(\nu \sin \sigma)'\| \leq \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3} \|(H\zeta_*)'\| = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3} \|\zeta_*\| < \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3}.$$

□

Теорема 1 гарантирует разрешимость операторного уравнения (49) при выполнении условия (57) и $\alpha > 8/\pi$. Однако отсутствие опрокидывания может быть доказано и при меньшей нижней границе числа α . При этом предполагается, что справедливы все оценки, полученные для ζ_* .

Теорема 3. *Для любого*

$$\alpha \geq \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^{3/2}} \approx 1,355$$

функция $\eta(\sigma) < \pi/2$ для всех $\sigma \in (0, \pi/2)$.

Доказательство. Поскольку ζ_* является неотрицательным решением операторного уравнения (49) и H — линейный положительный оператор,

$$(83) \quad \eta(\sigma) = \sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H\left(\frac{\sin \eta \operatorname{ctg} \sigma}{\exp \int_0^\sigma \zeta_* ds}\right) \\ \leq \sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H(\sin \eta \operatorname{ctg} \sigma) = \sigma - \beta\mu(\sigma) + \frac{1}{\alpha\pi} H\nu.$$

Таким образом, если

$$(84) \quad (H\nu)(\sigma) < \alpha\pi(\pi/2 - \sigma + \beta\mu(\sigma)) \quad \text{при } \sigma \in (0, \pi/2),$$

то $\eta(\sigma) < \pi/2$ при $\sigma \in (0, \pi/2)$. Наша цель заключается в доказательстве оценки (84).

В силу леммы 3,

$$\|((H\nu)' \sin \sigma)'\| \leq \|(\nu \sin \sigma)'\|.$$

Поскольку $(H\nu)'(\sigma) \sin \sigma = 0$ при $\sigma = 0$, получим:

$$|(H\nu)'(\sigma) \sin \sigma| = \left| \int_0^\sigma ((H\nu)'(s) \sin s)' ds \right| \\ \leq \sigma^{1/2} \|((H\nu)' \sin \sigma)'\| \leq \sigma^{1/2} \|(\nu \sin \sigma)'\|$$

для всех $\sigma \in [0, \pi/2]$. Из леммы 12 следует, что

$$|(H\nu)'(\sigma)| \leq \|(\nu \sin \sigma)'\| \frac{\sigma^{1/2}}{\sin \sigma} \leq A \xi(\sigma), \quad \sigma \in (0, \pi/2],$$

где

$$A = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \xi(\sigma) = \frac{\sigma^{1/2}}{\sin \sigma}.$$

Заметим, что $\xi(\pi/2) = \xi(\pi/4) = \sqrt{\pi/2}$ и $\xi(\sigma) < \sqrt{\pi/2}$ при $\sigma \in (\pi/4, \pi/2)$. Поскольку $(H\nu)(\pi/2) = 0$,

$$|(H\nu)(\sigma)| = \left| \int_\sigma^{\pi/2} (H\nu)'(s) ds \right| \leq A \int_\sigma^{\pi/2} \xi(s) ds \leq A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)$$

при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$. Следовательно, если

$$A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) < \alpha\pi \left(\frac{\pi}{2} - \sigma + \beta\mu(\sigma)\right),$$

то при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$ выполняется оценка (84). Это условие можно переписать в виде ограничения на α :

$$\alpha > \frac{A}{\sqrt{2\pi} \left(1 + \beta \frac{\mu(\sigma)}{\pi/2 - \sigma}\right)}.$$

Таким образом, в силу неотрицательности функции μ на всём интервале, если

$$(85) \quad \alpha > \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \approx 1,194,$$

то при $\sigma \in [\pi/4, \pi/2)$ будет справедлива оценка (84).

Чтобы получить оценку (84) при $\sigma \in (0, \pi/4)$, мы применим другой подход. В силу определения функции ν и (83), мы имеем:

$$\begin{aligned} |\nu(\sigma)| &\leq |\eta(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma| \leq \left| \sigma \operatorname{ctg} \sigma - \beta \mu(\sigma) \operatorname{ctg} \sigma + \frac{1}{\alpha\pi} \cos \sigma \frac{(H\nu)(\sigma)}{\sin \sigma} \right| \\ &\leq 2|\sigma \operatorname{ctg} \sigma| + \frac{1}{\alpha\pi} \left| \frac{(H\nu)(\sigma)}{\sin \sigma} \right|. \end{aligned}$$

Как следует из леммы 6 и оценки (65),

$$\|\nu\| \leq 2 + \frac{2}{\alpha\pi} \|\nu\|.$$

Следовательно,

$$\|\nu\| \leq \frac{2\alpha\pi}{\alpha\pi - 2}.$$

Из леммы 4 вытекает, что

$$|(H\nu)(\sigma)| \leq \|\nu\| \sigma^{1/2} \leq \frac{2\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \sigma^{1/2}.$$

Таким образом, если

$$\frac{2\alpha\pi}{\alpha\pi - 2} \sigma^{1/2} \leq \alpha\pi \left(\frac{\pi}{2} - \sigma + \beta\mu(\sigma) \right),$$

то при $\sigma \in (0, \pi/4)$ будет справедлива оценка (84). В силу неотрицательности функции μ последнее неравенство выполняется, если

$$\frac{2}{\alpha\pi - 2} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

то есть для

$$(86) \quad \alpha \geq \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^{3/2}} \approx 1,355.$$

Из оценок (85) и (86) следует, что (84) справедливо для таких α , которые удовлетворяют неравенству (86). Теорема доказана. \square

Заметим, что если α удовлетворяет оценке (72), то оно удовлетворяет и оценке (86). Таким образом, из теоремы 3 следует, что при $\alpha > 8/\pi$ решение исходной задачи существует и не происходит опрокидывания свободной границы.

REFERENCES

- [1] D.V. Maklakov, *Nonlinear problems of hydrodynamics of potential flows with unknown boundaries*, Yanus-K, Moscow, 1997. Zbl 0889.76003
- [2] J.-M. Vanden-Broeck, J.B Keller, *Free surface flow due to a sink*, J. Fluid Mech., **175** (1987), 109–117. Zbl 0612.76012
- [3] G.C. Hocking, *Cusp-like free-surface flows due to a submerged source or sink in the presence of a flat or sloping bottom*, J. Aust. Math. Soc., Ser. B, **26** (1985), 470–486. Zbl 0586.76019
- [4] E.O. Tuck, J.-M. Vanden-Broeck, *A cusp-like free-surface flow due to a submerged source or sink*, J. Aust. Math. Soc., Ser. B, **25** (1984), 443–450. Zbl 0531.76018
- [5] L.K. Forbes, G.C. Hocking, *Flow caused by a point sink in a fluid having a free surface*, J. Aust. Math. Soc., Ser. B, **32**:2 (1990), 231–49. Zbl 0708.76032
- [6] G.C. Hocking, L.K. Forbes, *Subcritical free-surface flow caused by a line source in a fluid of finite depth*, J. Eng. Math., **26**:4 (1992), 455–466. Zbl 0763.76011
- [7] C.J. Lustrì, S.W. McCue, S.J. Chapman, *Exponential asymptotics of free surface flow due to a line source*, IMA J. Appl. Math., **78**:4 (2013), 697–713. Zbl 1282.76068
- [8] H. Mekias, J.-M. Vanden-Broeck, *Subcritical flow with a stagnation point due to a source beneath a free surface*, Phys. F. A: Fluid Dyn., **3**:11 (1991), 2652–2658.
- [9] C.R. Dun, G.C. Hocking, *Withdrawal of fluid through a line sink beneath a free surface above a sloping boundary*, J. Eng. Math., **29**:1 (1995), 1–10. Zbl 0822.76013
- [10] G.C. Hocking, *Infinite Froude number solutions to the problem of a submerged source or sink*, J. Aust. Math. Soc. Ser. B, **29**:4 (1988), 401–409. Zbl 0641.76006
- [11] B. Bouderah, H. Mekias, *A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom*, Kybernetes, **31**:2 (2002), 305–316. Zbl 1185.76451
- [12] A.A. Mestnikova, V.N. Starovoitov, *Free-surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink*, J. Phys. Conf. Ser., **722**:012035 (2016).
- [13] A.A. Mestnikova, V.N. Starovoitov, *Steady free surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink on the flat bottom*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **49** (2019), 111–136. Zbl 1427.76035
- [14] P.I. Plotnikov, J.F. Toland, *Convexity of Stokes waves of extreme form*, Arch. Ration. Mech. Anal., **171**:3 (2004), 349–416. Zbl 1064.76017
- [15] L.E. Fraenkel, *A constructive existence proof for the extreme Stokes wave*, Arch. Ration. Mech. Anal., **183**:2 (2007), 187–214. Zbl 1105.76014
- [16] G. Keady, J. Norbury, *On the existence theory for irrotational water waves*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., **83** (1978), 137–157. Zbl 0393.76015
- [17] M.A. Lavrent'ev, B.V. Shabat, *Methods of the theory of functions of a complex variable*, Nauka, Moscow, 1965. (1973, Zbl 0274.30001)
- [18] F.D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Nauka, Moscow, 1970. (1977, Zbl 0449.30030)
- [19] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis II*, MCCME, Moscow, 2012. (2016, Zbl 1331.00005)

ANASTASHIA AFANASYEVNA TITOVA
 LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
 15, LAVRENTYEVA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
 Email address: mestnikova@hydro.nsc.ru