S@MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 161–178 (2020) УДК 517.956.226

DOI 10.33048/semi.2020.17.012 MSC 35J75

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

А.К. УРИНОВ, К.Т. КАРИМОВ

Abstract. The investigated two nonlocal problems for an elliptic equation with two singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped. The proof of the uniqueness of the solution and its construction is carried out by the method of spectral analysis. The solution to the problem is constructed as the sum of the biorthogonal series. In substantiating the uniform convergence of the constructed series, we used asymptotic estimates of the Bessel functions of the real and imaginary argument. Based on them, estimates are obtained for each member of the series, which made it possible to prove the convergence of the resulting series and its derivatives to the second order inclusive, as well as the existence theorem in the class of regular solutions.

Keywords: equations of elliptic type, nonlocal problem, singular coefficient, spectral method, biorthogonal series, semi-infinite parallelepiped.

1. Введение. Постановка задач

Рассмотрим следующее трехмерное эллиптическое уравнение с двумя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\beta}{y}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z=0 \tag{1}$$

в полубесконечном параллелепипеде

$$\Omega=\left\{(x,y,z):\, x\in(0,1)\,,\, y\in(0,+\infty)\,,\, z\in(0,1)\right\},$$

Urinov, A.K., Karimov, K.T., Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped.

Поступила 5 ноября 2019 г., опубликована 20 февраля 2020 г.

где $\beta,\gamma\in R$, причем $\beta,\gamma< 1/2$; $u=u(x,y,z)-$ неизвестная функция, и для него исследуем следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и условиям

$$u(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^1\left(\bar{\Omega}\cap\left(\{x=0\}\cup\{x=1\}\right)\right)\cap C^2(\Omega), \tag{2}$$

$$u(0,y,z)=u(1,y,z),\;\; u_x(0,y,z)=0,\; y\in[0,+\infty),\; z\in[0,1], \tag{3}$$

$$u(x,y,0)=0,\;\; u(x,y,1)=0,\;\; x\in[0,1],\;\; y\in[\,0,+\infty), \tag{4}$$

$$\lim_{y\to\infty}u(x,y,z)=0,\;\; x\in[0,1],\;\; z\in[0,1], \tag{5}$$

$$u(x,0,z)=f(x,z),\;\; x\in[0,1],\;\; z\in[0,1], \tag{6}$$

где $\bar{\Omega}=\{(x,y,z):x\in[0,1],y\in[0,+\infty),z\in[0,1]\}$, а $f(x,z)-$ заданная функция.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и условиям (2), (4)-(6) и

$$u_x(0,y,z)=u_x(1,y,z),\;\; u(1,y,z)=0,\;\; y\in[0,+\infty),\;\; z\in[0,1]. \tag{7}$$

Нелокальные краевые задачи представляют весьма интересное обобщение классических задач и, в то же время, они естественным образом получаются при построении математических моделей реальных процессов и явлений в физике, в инженерии и т.д. С этими вопросами можно ознакомиться в работах [1]-[5]. Задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных изучались многими авторами. Ниже приведем обзор задач, близких к задачам 1 и 2, которые поставлены и исследованы в двумерных областях.

В 1956 г. Ф.И. Франкль в работе [6], рассматривая обтекание конечного симметричного профиля потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, поставил задачу для уравнения Чаплыгина в смешанной области с нелокальным условием вида $u(0,y)=u(0,-y)$. При этом дополнительно было задано локальное условие $u_x(0,y)=0$. В работе [7] Н.И. Ионкин доказал существование решения нелокальной задачи с условиями $u_x(0,y)=u_x(1,y)$, $u(0,y)=0$, $0\le y\le T$ и $u(x,0)=\tau(x)$, $0\le x\le 1$, для уравнения теплопроводности методом спектрального анализа. В [8] он обосновал единственность решения этой задачи. Такого рода условия встречаются, например, при решении задач, описывающих процесс диффузии частиц в турбулентной плазме, а также в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня. В работе Н.И. Ионкина и Е.И. Моисеева [9] доказана однозначная разрешимость задачи для уравнения теплопроводности с условиями

$$a_1u_x(0,t)+b_1u_x(1,t)+a_0u(0,t)+b_0u(1,t)=0,$$

$$c_1u_x(0,t)+d_1u_x(1,t)+c_0u(0,t)+d_0u(1,t)=0,$$

где $a_j,b_j,c_j,d_j,\; j=\overline{0,1}-$ заданные постоянные. М.Е.Лернер, О.А.Репин [10] в полуполосе $D=\{(x,y):0<x<1,y>0\}$ изучили задачу: найти функцию $u(x,y)$ со свойствами

$$u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^1\left(D\cup\{x=0\}\right)\cap C^2(D);$$

$$y^m u_{xx}+u_{yy}=0,\;\; (x,y)\in D,\;\; m>-1;$$

$$u(x,y)\to 0 \text{ при } y\to+\infty \text{ равномерно по } x\in[0,1];$$

$$u(0,y)-u(1,y)=\varphi_1(y),\;\; u_x(0,y)=\varphi_2(y),\;\; y\ge 0;\;\; u(x,0)=\tau(x),\;\; 0\le x\le 1,$$

где $\tau(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)-$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\tau(x)$ ортогональна системе функций 1, $\cos(2n+1)\pi x$, $n=0,1,2,....$ Также исследована аналогичная задача [11] в полуполосе D для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2p}{y}u_y-b^2u=0,\ \ p,b\in R,$$

при условии $\varphi_1(y)\equiv 0$ и $\varphi_2(y)\equiv 0$. Единственность решения этой задачи доказана на основании принципа экстремума. Используя методы разделения переменных и интегральных преобразований, установлена разрешимость рассматриваемой задачи. В работе [12] Е.И.Моисеев в полуполосе D для вырождающегося эллиптического уравнения изучил следующую нелокальную краевую задачу

$$y^m u_{xx}+u_{yy}=0,\ \ m>-2;$$

$$u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le 1;\ \ u(0,y)=u(1,y),\ u_x(0,y)=0,\ y\ge 0;$$

$$f(x)\in C^{2+\alpha}[0,1],\ f(0)=f(1),\ \ f'(0)=0.$$

Методом спектрального анализа доказаны единственность и существование решения этой задачи в классе функций $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^2(D)$ и стремящихся к нулю или ограниченных на бесконечности. При этом решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда. Также эти результаты перенесены на уравнения $y^m u_{xx}+u_{yy}-b^2y^mu=0$, $m,b\in R$, причем $b\ge 0,\ m>0$ в [13]. В работе Ю.К.Сабитовой [14] для уравнения $y^mu_{xx}-u_{yy}-b^2y^mu=0$ в прямоугольной области $\{(x,y):\ 0<x<1,\ 0<y<T\}$, где $m>0$, $b\ge 0$, $T>0-$ заданные действительные числа, изучены задачи с начальными условиями $u(x,0)=\tau(x), u_y(x,0)=\nu(x)$, $0\le x\le 1$ и нелокальными граничными условиями $u(0,y)=u(1,y)$, $u_x(0,y)=0$ или $u_x(0,y)=u_x(1,y)$, $u(1,y)=0$ при $0\le y\le T$. Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решения указанных задач. А.А. Абашкин [15] для уравнения

$$Lu\equiv u_{xx}+\mathrm{sgn}y\,u_{yy}+\frac{2p}{|y|}u_y+ku=0,\ \ p\ge 1/2,\ \ k\in R$$

в области $D=\{(x,y):0<x<1,y<\alpha\}$, $\alpha>0$ исследовал следующую задачу:

$$u\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^2\left(D\backslash\{y=0\}\right),Lu=0;$$

$$u(0,y)=u(1,y),\ \ u_x(0,y)=0 \text{ при } y<\alpha;\ u(x,\alpha)=\varphi(x) \text{ при } 0<x<1,$$

где $\varphi(x)-$ заданная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0)=\varphi(1)$.

Несмотря на перечисленное выше, нелокальные задачи для уравнений с сингулярными коэффициентами в трехмерных областях остаются малоизученными.

2. Построение собственных и присоединенных функций задачи 1

Для получения решения задачи 1, применим формально метод Фурье [16]. Сначала найдем нетривиальные решения задачи $\{(1)\text{-}(4)\}$. С этой целью, разделив переменные по формуле $u(x,y,z)=W(x,z)\,Q(y)$, из уравнения (1) получим

$$Q''(y)+\frac{2\beta}{y}Q'(y)-\lambda Q(y)=0,\ y\in(0,+\infty);\tag{8}$$

$$W_{xx}+W_{zz}+\frac{2\gamma}{z}W_z+\lambda W=0,\quad 0<x<1,\ \ 0<z<1,\tag{9}$$

где $\lambda-$ константа разделения.

Учитывая однородные краевые условия (3) и (4), для уравнения (9) получим задачу на собственные значения в квадрате $\Pi = \{(x,z) : x \in (0,1)\,,\ z \in (0,1)\}$ со следующими условиями:

$$W(0,z) = W(1,z)\,,\, W_x(0,z) = 0, z \in [0,1]\,;\, W(x,0) = 0,\ W(x,1) = 0,\ x \in [0,1]\,.$$

Путем разделения переменных $W(x,z) = X(x)\,Z(z)$ эта задача сводится к двум задачам на собственные значения:

$$L^0_\mu X(x) \equiv X''(x) + \mu X(x) = 0, X(0) = X(1)\,, X'(0) = 0. \tag{10}$$

$$L^\gamma_{\lambda-\mu} Z(z) \equiv Z''(z) + \frac{2\gamma}{z} Z'(z) + (\lambda - \mu)\, Z(z) = 0, Z(0) = 0, \quad Z(1) = 0, \tag{11}$$

где $\mu-$ константа разделения.

Нетрудно убедиться, что при $\mu < 0$ задача (10) не имеет нетривиальных решений. При $\mu = 0$ решением задачи (10) является функция $X(x) = d_0$ ($d_0 \neq 0-$ постоянная), а при $\mu > 0-$ функция $X(x) = d_1 \sin\sqrt{\mu}x + d_2 \cos\sqrt{\mu}x$, где d_1 и d_2- произвольные постоянные, является общим решением уравнения $L^0_\mu X(x) = 0$. Константы d_1 и d_2 определим из условий $X(0) = X(1)$ и $X'(0) = 0$. Из нелокального условия $X(0) = X(1)$ следует, что $d_1 \sin\sqrt{\mu} + d_2\left(\cos\sqrt{\mu} - 1\right) = 0$, а из условия $X'(0) = 0$ имеем $d_1\sqrt{\mu} = 0$, т.е. $d_1 = 0$. Из последнего тригонометрического уравнения, учитывая $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$, имеем $\cos\sqrt{\mu} = 1$, откуда следует, что $\mu_n = (2\pi n)^2\,,\ n \in N$.

Итак, задача (10) имеет счетное число собственных значений вида $\mu_n = (2\pi n)^2\,, n \in N \cup \{0\}\,$, причем собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид: $X_0(x) = d_0, X_n(x) = d_2 \cos(2\pi n x)\,, n \in N$.

Для удобства дальнейших вычислений положим $d_0 = 1,\ d_2 = 1$:

$$X_0(x) = 1,\ \ X_n(x) = \cos(2\pi n x)\,, n \in N. \tag{12}$$

Отметим, что система собственных функций (12) не полна и не образует базис в пространстве $L_2[0,1]\,$, что порождается несамосопряженностью задачи (10). Дополним собственные функции $X_n(x)$ до полной системы присоединенными функциями краевой задачи (10). Фундаментальные результаты относительно базисности системы собственных и присоединенных функций получены в работах [17], [18].

Присоединенную функцию $\tilde{X}_n(x)\,$, отвечающую тому же μ_n, что и собственная функция $X_n(x)\,$, определим как решение краевой задачи

$$L^0_{\mu_n} \tilde{X}_n(x) = p_n X_n(x)\,,\ \ \tilde{X}_n(0) = \tilde{X}_n(1)\,,\ \ \tilde{X}'_n(0) = 0,\ n = 0, 1, ..., \tag{13}$$

где $p_n \neq 0-$ произвольная постоянная.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, найдем общее решение уравнения $L^0_{\mu_n} \tilde{X}_n(x) = p_n X_n(x)$ в виде $\tilde{X}_n(x) = (p_n/4\pi n)\, x \sin(2\pi n x) + \tilde{d}_1 \sin(2\pi n x) + \tilde{d}_2 \cos(2\pi n x)\,$, где $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2-$ произвольные постоянные. Подставляя это решение в условия $\tilde{X}_n(0) = \tilde{X}_n(1)$ и $\tilde{X}'_n(0) = 0$, имеем $\tilde{d}_1 = 0$. Если положить в общее решение $\tilde{d}_2 = 0$ и $p_n = 4\pi n$, то получим решение задачи (13) в виде $\tilde{X}_n(x) = x \sin(2\pi n x)\,,\ n \in N.$. Нетрудно убедиться, что при $n = 0$ задача (13) не имеет решения.

Система собственных и присоединенных функций задачи (10) обозначим следующим образом:

$$X_0(x) = 1,\ \ X_{2n-1}(x) = x \sin(2\pi n x)\,,\ X_{2n}(x) = \cos(2\pi n x)\,,\ \ n \in N. \tag{14}$$

Каждому собственному значению μ_n при $n \in N$ соответствуют собственная функция $X_{2n}(x)$ и присоединенная $X_{2n-1}(x)$.

Задача (10) является несамосопряженной. Сопряженной ей будет следующая задача:

$$T''(x) + \bar{\mu} T(x) = 0,\ 0 < x < 1,\ T(1) = 0,\ T'(0) = T'(1). \tag{15}$$

В самом деле,

$$\int\limits_0^1 X''(x) T(x) dx = [X(1)(T'(0) - T'(1)) - X'(1) T(1)] + \int\limits_0^1 X(x) T''(x) dx.$$

Отсюда видно, что выражения в квадратных скобках будут равны нулю при $T'(1) = T'(0)$, $T(1) = 0$.

Решая задачу (15), найдем собственные функции

$$T_0(x) = s_0(1 - x),\ T_n(x) = s_n \sin(2\pi n x),\ n \in N, \tag{16}$$

где $s_n \neq 0-$ произвольные постоянные, и собственные значения $\bar{\mu}_n = \mu_n = (2\pi n)^2$, $n = 0, 1, ...$

Из соображений биортонормировки положим, $s_0 = 2$, $s_n = 4$, $n \in N$.

Присоединенные функции сопряженной задачи (15) определяются из задачи

$$\tilde{T}''_n(x) + \bar{\mu}_n \tilde{T}_n(x) = p_n T_n(x),\ \ \tilde{T}_n(1) = 0,\ \ \tilde{T}'_n(0) = \tilde{T}'_n(1),\ \ n = 0, 1, \dots. \tag{17}$$

Аналогичным методом, как и в задаче (13), решается задача (17). При $n = 0$ она не имеет решения, а при $n \in N$ ее решения имеют вид

$$\tilde{T}_n(x) = 4(1 - x)\cos(2\pi n x).$$

Систему собственных и присоединенных функций сопряженной задачи обозначим следующим образом:

$$T_0(x) = 2(1 - x), T_{2n-1}(x) = 4\sin(2\pi n x), T_{2n}(x) = 4(1 - x)\cos(2\pi n x),\ n \in N. \tag{18}$$

При этом каждому $\mu_n = (2\pi n)^2$ при $n \in N$ соответствует собственная функция $T_{2n-1}(x)$ и присоединенная $T_{2n}(x)$.

Лемма 1. *Последовательности функций (14) и (18) образуют биортогональную на интервале* $(0,1)$ *систему функций, такую, что для любых номеров* i *и* j *выполняется соотношение* $(X_i, T_j) = \int\limits_0^1 X_i(x) T_j(x) dx = \delta_{ij}$, *здесь* $\delta_{ij}-$ *символ Кронекера.*

Доказательство леммы 1 проводится непосредственно с помощью вычисления соответствующих интегралов.

В работе [12] доказано, что система функций (14) и (18) полна в пространстве $L_2[0,1]$ и образует базис в пространстве $L_2[0,1]$.

Теперь перейдем к исследованию задачи (11). Полагая в $L^{\gamma}_{\lambda-\mu} Z(z) = 0$ $\mu = \mu_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, нетрудно убедиться, что если $\lambda \leq \mu_n$, то задача (11) не имеет нетривиальных решений. Предполагая $\lambda > \mu = \mu_n$, в уравнении $L^{\gamma}_{\lambda-\mu} Z(z) = 0$ произведем замену $Z(z) = \left(t/\sqrt{\lambda - \mu_n}\right)^{1/2-\gamma} p(t)$, где $t = \sqrt{\lambda - \mu_n} z$. В результате получим уравнение Бесселя [19]:

$$t^2 p''(t) + t p'(t) + \left[t^2 - (1/2 - \gamma)^2\right] p(t) = 0. \tag{19}$$

Принимая во внимание вид общего решения [19] уравнения (19) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения $L_{\lambda-\mu}^{\gamma}Z(z)=0$ при $\mu=\mu_n$:

$$Z_n(z)=d_{3n}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}z\right)+$$
$$+d_{4n}z^{1/2-\gamma}Y_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}z\right), n=0,1,2,\ldots. \quad (20)$$

здесь d_{3n} и $d_{4n}-$ произвольные постоянные, $J_l(x)$ и $Y_l(x)-$ функция Бесселя порядка l первого и второго рода [19]. Из (20) следует, что решение уравнения $L_{\lambda-\mu}^{\gamma}Z(z)=0$, где $\mu=\mu_n,\ n=0,1,2,...$, удовлетворяющего условию $Z(0)=0$, существует при $\gamma<1/2$ и оно определяется равенством

$$Z_n(z)=d_{3n}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}z\right),\ n=0,1,2,\ldots. \quad (21)$$

Подставляя (21) в условие $Z(1)=0$, получим условия существования нетривиального решения задачи (11):

$$J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}\right)=0,\ n=0,1,2,\ldots. \quad (22)$$

Обозначая через $\delta_{km}-$ m-ый положительный корень уравнения (22) при $n=k$, получим те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (11): $\lambda_{nm}=\mu_n+\delta_{nm}^2,\ m\in N,\ n=0,1,2,....$

Полагая в (21) $\lambda=\lambda_{nm}$, $d_{3n}=1$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи (11) в виде

$$\tilde{Z}_{nm}(z)=z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z),\quad m\in N,\ n=0,1,2.... \quad (23)$$

Для удобства дальнейших вычислений нормируем систему функций (23):

$$Z_{nm}(z)=\tilde{Z}_{nm}(z)\Big/\left\|\tilde{Z}_{nm}\right\|_{L_{2,\rho}(0,1)}=\frac{\sqrt{2}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)}{\left|J_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})\right|}, \quad (24)$$

где $\left\|\tilde{Z}_{nm}\right\|_{L_{2,\rho}(0,1)}=\left(\int\limits_0^1\rho(z)\tilde{Z}_{nm}^2(z)\,dz\right)^{1/2}=\left|J_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})\right|\big/\sqrt{2},\ \ \rho(z)=z^{2\gamma}.$

Согласно работе [19], система собственных функций (24) ортонормальна и полна в пространстве $L_2[0,1]$ с весом $z^{2\gamma}$.

Отметим, что для собственных значений δ_{nm} при фиксированных n и достаточно больших m справедлива асимптотическая формула [20, стр.317]

$$\delta_{nm}\approx\tilde{\delta}_m=\pi m+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\pi-\frac{1}{4}\pi+O\left(m^{-1}\right)=\pi m-\frac{1}{2}\gamma\pi+O\left(m^{-1}\right).$$

В этой формуле $O\left(m^{-1}\right)$ [20, стр.15] означает такую величину, отношение которой к m^{-1} при беспредельном возрастании m остается меньше некоторой постоянной. Для вычисления членов более высокого порядка этой последовательности положим

$$\delta_{nm}\approx\pi m,\ \ \lambda_{nm}\approx(\pi m)^2. \quad (25)$$

Полагая в уравнении (8) $\lambda=\lambda_{nm}$, найдем общее решение этого уравнения:

$$Q_{nm}(y)=a_{nm}y^{1/2-\beta}I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)+$$
$$b_{nm}y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right),\ y\in[0,+\infty), \quad (26)$$

здесь a_{nm} и $b_{nm}-$ произвольные постоянные, $I_\omega(z)$ и $K_\omega(z)-$ модифицированные функции Бесселя порядка ω первого и третьего рода [19] соответственно.

3. Единственность решения задачи 1

Пусть $u(x,y,z)$ – решение задачи 1. Следуя работ [21], рассмотрим следующие функции:

$$\omega_{nm}(y) = 4\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,y,z)\sin(2\pi nx)\, z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dxdz,\ m,n\in N, \tag{27}$$

$$v_{nm}(y) = 4\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,y,z)(1-x)\cos(2\pi nx)\, z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dxdz,\ \ m,n\in N, \tag{28}$$

$$v_{0m}(y) = 2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,y,z)(1-x)\, z^{2\gamma} Z_{0m}(z)\, dxdz,\ m\in N. \tag{29}$$

На основании (27) введем функции

$$\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y) = 4\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u(x,y,z)\sin(2\pi nx)\, z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dxdz,\ \ m,n\in N, \tag{30}$$

где ε_1 и ε_2– достаточно малое положительное число.

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y) = \omega_{nm}(y)$.

Дифференцируем равенство (30) по y при $0<y<+\infty$:

$$\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]' = 4\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_y(x,y,z)\sin(2\pi nx)\, z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dxdz, n,m\in N;$$

$$\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'' = 4\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_{yy}(x,y,z)\sin(2\pi nx)\, z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dxdz, n,m\in N.$$

Учитывая уравнение (1), из последних равенств имеем

$$\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'' = -4\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\left(u_{xx}+u_{zz}+\frac{2\gamma}{z}u_z+\frac{2\beta}{y}u_y\right)\sin(2\pi nx)\times$$

$$\times z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dxdz = -4\left[\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_{xx}\sin(2\pi nx)\, dx\right) z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dz+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\left(\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_{zz} z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dz+\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\frac{2\gamma}{z}u_z z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dz\right)\sin(2\pi nx)\, dx\right]-$$

$$-\frac{2\beta}{y}\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'. \tag{31}$$

Преобразуем следующие интегралы:

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_{xx}\sin(2\pi nx)\, dx = \left\{u_x\sin(2\pi nx) - u\left[\sin(2\pi nx)\right]'\right\}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1} -$$

$$-\mu_n \int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u\left(x,y,z\right)\sin\left(2\pi nx\right)dx. \qquad (32)$$

Аналогично находим

$$\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_{zz} z^{2\gamma} Z_{nm}\left(z\right)dz + \int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} \frac{2\gamma}{z} u_z z^{2\gamma} Z_{nm}\left(z\right)dz =$$

$$= \left\{\left[u_z Z_{nm}\left(z\right) - uZ'_{nm}\left(z\right)\right]z^{2\gamma}\right\}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=1-\varepsilon_2} - \delta_{nm}^2 \int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} uz^{2\gamma} Z_{nm}\left(z\right)dz. \qquad (33)$$

Поставляя (32) и (33) в равенство (31), получим

$$\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(y\right)\right]'' = -4\left[\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\left(\left\{u_x\left(x,y,z\right)\sin\left(2\pi nx\right) - u\left(x,y,z\right)\left[\sin 2\pi nx\right]'\right\}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1} -\right.\right.$$

$$\left.-\mu_n \int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u\left(x,y,z\right)\sin\left(2\pi nx\right)dx\right) z^{2\gamma} Z_{nm}\left(z\right)dz +$$

$$+\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\left(\left[u_z\left(x,y,z\right)Z_{nm}\left(z\right) - u\left(x,y,z\right)Z'_{nm}\left(z\right)\right]z^{2\gamma}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=1-\varepsilon_2} -\right.$$

$$\left.\left.-\delta_{nm}^2 \int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u\left(x,y,z\right)z^{2\gamma} Z_{nm}\left(z\right)dz\right)\sin\left(2\pi nx\right)dx\right] - \frac{2\beta}{y}\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(y\right)\right]'. \qquad (34)$$

Из (24) легко следует, что

$$\lim_{z\to 1} Z'_{nm}\left(z\right) = \sqrt{2}\delta_{nm} J_{-1/2-\gamma}\left(\delta_{nm}\right) \Big/ \left|J_{3/2-\gamma}\left(\delta_{nm}\right)\right|,$$

$$\lim_{z\to 0} z^{2\gamma} Z'_{nm}\left(z\right) = 2^{1+\gamma}\left(\delta_{nm}\right)^{1/2-\gamma} \Big/ \left[\left|J_{3/2-\gamma}\left(\delta_{nm}\right)\right|\Gamma\left(1/2-\gamma\right)\right].$$

Предполагая, что $\left|\lim\limits_{z\to 1-0} u_z\left(x,y,z\right)\right| < +\infty$, $\left|\lim\limits_{z\to +0} z^{2\gamma} u_z\left(x,y,z\right)\right| < +\infty$, в (34) переходим к пределу при $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$. В результате, учитывая граничные условия (3), (4), $Z_{nm}\left(0\right) = Z_{nm}\left(1\right) = 0$ и последние равенства и неравенства, получим, что $\omega_{nm}\left(y\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\omega''_{nm}\left(y\right) + \frac{2\beta}{y}\omega'_{nm}\left(y\right) - \lambda_{nm}\omega_{nm}\left(y\right) = 0, \;\; y \in \left(0,+\infty\right),$$

т.е. уравнению (8). Следовательно $\omega_{nm}\left(y\right) = Q_{nm}\left(y\right).$

Теперь, учитывая условия (5) и (6), из (27) находим $\lim\limits_{y\to\infty}\omega_{nm}\left(y\right)$ и $\omega_{nm}\left(0\right):$

$$\lim_{y\to +\infty}\omega_{nm}\left(y\right) = 0, \qquad (35)$$

$$\omega_{nm}\left(0\right) = 4\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f\left(x,z\right)\sin\left(2\pi nx\right)z^{2\gamma} Z_{nm}\left(z\right)dxdz = f_{nm}. \qquad (36)$$

Из (26) на основании асимптотических поведений функций $I_v(z)$ и $K_v(z)$ при больших z [19, стр.172-173]:

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}}, \;\; K_\nu(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}, \tag{37}$$

следует, что решение уравнения (8), удовлетворяющее условию (35), определяется равенством

$$Q_{nm}(y) = b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right). \tag{38}$$

Учитывая $\omega_{nm}(y) = Q_{nm}(y)$ и подставляя (38) в условие (36), получим $Q_{nm}(0) = b_{nm} 2^{-1/2-\beta} \Gamma(1/2-\beta) \left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{\beta-1/2} = f_{nm}$. Отсюда находим

$$b_{nm} = \frac{2^{1/2+\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{1/2-\beta}}{\Gamma(1/2-\beta)} f_{nm}. \tag{39}$$

Принимая во внимание равенства (38), (39) и $\omega_{nm}(y) = Q_{nm}(y)$, окончательно находим

$$\omega_{nm}(y) = \frac{2^{1/2+\beta} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right)}{\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{\beta-1/2} \Gamma(1/2-\beta)} f_{nm} = \bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right) f_{nm}, \tag{40}$$

где $\bar{K}_\nu(z) = 2^{1-\nu} z^\nu K_\nu(z) / \Gamma(\nu)$, $\nu > 0$.

Повторяя те же действия над функцией $v_{nm}(y)$, заданной формулой (28), что и для функции $\omega_{nm}(y)$, получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$v''_{nm}(y) + \frac{2\beta}{y} v'_{nm}(y) - \lambda_{nm} v_{nm}(y) = -4\pi n \omega_{nm}(y), y \in (0, +\infty), \tag{41}$$

и соответствующие условия

$$\lim_{y\to\infty} v_{nm}(y) = 0, \tag{42}$$

$$v_{nm}(0) = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x,z)(1-x)\cos(2\pi n x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dxdz = \tilde{f}_{nm}, \tag{43}$$

где $\omega_{nm}(y)$ определяется равенством (40).

Однородное уравнение, соответствующее (41), совпадает с уравнением (8), поэтому его общее решение выражается формулой (26).

Частным решением неоднородного уравнения (41) будет функция

$$v_{nm}(y) = \frac{\pi n 2^{3/2+\beta} f_{nm}}{\Gamma(1/2-\beta)\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{1/2+\beta}} y^{3/2-\beta} K_{3/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (41) имеет вид

$$v_{nm}(y) = A_{nm} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right) + B_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right) +$$

$$+ \frac{\pi n 2^{3/2+\beta} f_{nm}}{\Gamma(1/2-\beta)\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{1/2+\beta}} y^{3/2-\beta} K_{3/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right), \tag{44}$$

где A_{nm}, B_{nm}– произвольные постоянные.

Чтобы выполнялось условие (42), в силу асимптотики функций $K_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ (см. формулу (37)), необходимо положить $A_{nm}=0$. Учитывая это и (43), из (44) имеем

$$B_{nm}=\frac{2^{1/2+\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{1/2-\beta}}{\Gamma(1/2-\beta)}\tilde{f}_{nm}-\frac{\pi n(1-2\beta)\,2^{1/2+\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{-3/2-\beta}}{\Gamma(1/2-\beta)}f_{nm}. \quad (45)$$

Следовательно, функция $v_{nm}(y)$ имеет вид

$$v_{nm}(y)=\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)\left(\tilde{f}_{nm}-\frac{\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}}f_{nm}\right)+$$
$$+\frac{2\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}}\bar{K}_{3/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)f_{nm},\, n,m\in N. \quad (46)$$

По аналогичной схеме, исходя из формулы (29), используя условия (5) и (6), найдем

$$v_{0m}(y)=\bar{K}_{1/2-\beta}(\delta_{0m}y)\,\tilde{f}_{0m},\, m\in N, \quad (47)$$

где $\tilde{f}_{0m}=2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,z)(1-x)\,z^{2\gamma}Z_{0m}(z)\,dxdz$.

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если существует решение задачи 1, то оно единственно.*

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что однородная задача, соответствующая задаче 1, имеет только тривиальное решение. Пусть $f(x,z)\equiv 0$. Тогда $f_{nm}=\tilde{f}_{nm}=0$ при всех $n,m\in N$ и $\tilde{f}_{0m}=0$ при всех $m\in N$. В силу этих равенств, из (40), (46), (47), (27), (28), (29) вытекает

$$4\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,y,z)\sin(2\pi nx)\,z^{2\gamma}Z_{nm}(z)\,dxdz=0,\ \ m,n\in N,$$

$$4\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,y,z)(1-x)\cos(2\pi nx)\,z^{2\gamma}Z_{nm}(z)\,dxdz=0,\ \ m,n\in N,$$

$$2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,y,z)(1-x)\,z^{2\gamma}Z_{0m}(z)\,dxdz=0,\ \ m\in N.$$

Отсюда, в силу полноты системы функций $\{Z_{nm}(z)\}_{m=1}^{\infty}$, при всех $n=0,1,2,...$ с весом $z^{2\gamma}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что

$$4\int\limits_0^1 u(x,y,z)\sin(2\pi nx)\,dx=0,\ \ 4\int\limits_0^1 u(x,y,z)(1-x)\cos(2\pi nx)\,dx=0,\ \ n\in N,$$

$$2\int\limits_0^1 u(x,y,z)(1-x)\,dx=0.$$

Если учесть полноту системы функций (18) в пространстве $L_2[0,1]$, из последних равенств следует, что $u(x,y,z)\equiv 0$ для всех $x\in[0,1]$ и при любом $y\in[0,b]$, $z\in[0,1]$. Теорема 1 доказана. □

4. Построение и обоснование решения задачи 1

Рассмотрим теперь вопрос о существовании решения задачи 1. Предположим, что функцию $u(x,y,z)$ по переменной z можно представить в виде ряда по бесселевым функциям, а по переменной $x-$ в виде биортогонального ряда:

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty} v_{0m}(y)\,Z_{0m}(z)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\omega_{nm}(y)\,X_{2n-1}(x)+v_{nm}(y)\,X_{2n}(x)\right]Z_{nm}(z).$$

Этот ряд при помощи формул (24), (40), (46) и (47) можно переписать в виде

$$u(x,y,z)=4\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{1/2-\beta}(\delta_{0m}y)\,\tilde{Z}_{0m}(z)\,\tilde{F}_{0m}\Big/J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{0m})+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)X_{2n-1}(x)\,\tilde{Z}_{nm}(z)\,F_{nm}\Big/J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)X_{2n}(x)\,\frac{\tilde{Z}_{nm}(z)}{J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})}\left(\tilde{F}_{nm}-\frac{\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}}F_{nm}\right)+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{3/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)X_{2n}(x)\,\frac{\tilde{Z}_{nm}(z)}{J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})}\frac{2\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}}F_{nm}, \tag{48}$$

где функции $X_{2n}(x)$, $X_{2n-1}(x)$, $\tilde{Z}_{nm}(z)$ и коэффициенты F_{nm}, $\tilde{F}_{nm}$, $\tilde{F}_{0m}$ определяются соответственно формулами (14), (14), (23) и

$$F_{nm}=\int_0^1\int_0^1 f(x,z)\sin(2\pi nx)\,z^{1/2+\gamma}J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\,dxdz, \tag{49}$$

$$\tilde{F}_{nm}=\int_0^1\int_0^1 f(x,z)(1-x)\cos(2\pi nx)\,z^{1/2+\gamma}J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\,dxdz,$$

$$\tilde{F}_{0m}=\int_0^1\int_0^1 f(x,z)(1-x)\,z^{1/2+\gamma}J_{1/2-\gamma}(\delta_{0m}z)\,dxdz.$$

Каждый член ряда (48) удовлетворяет условиям задачи 1, кроме условия (2). Отметим, что при $\beta<1/2$ знаменатель коэффициентов ряда (48) не имеет нулей. Если докажем, что ряд (48) и ряды, полученные из него дифференцированием u_{xx}, $(u_{yy}+(2\beta/y)\,u_y)$, $(u_{zz}+(2\gamma/z)\,u_z)$, сходятся равномерно в области их рассмотрения, то его сумма будет решением задачи 1. С этой целью нам надо доказать следующие леммы.

Лемма 2. *Справедливы следующие оценки:*

$$|X_{2n-1}(x)|\le 1,\ \ |X_{2n}(x)|\le 1,\ \ n\in N; \tag{50}$$

$$\left|X'_{2n-1}(x)\right|\le 1+2\pi n<4\pi n,\ \ |X'_{2n}(x)|\le 2\pi n,\ \ n\in N; \tag{51}$$

$$\left|X''_{2n-1}(x)\right|\le 4\pi n(1+\pi n)<(4\pi n)^2,\ \ |X''_{2n}(x)|\le (2\pi n)^2,\ \ n\in N. \tag{52}$$

Справедливость оценки (50)-(52) легко следует из свойства тригонометрических функций и $x\in[0,1]$.

Лемма 3. *Для всех $z \in [0,1]$ и каждого $n = 0,1,2,...$ при достаточно больших m справедливы следующие оценки:*

$$\left|\tilde{Z}_{nm}(z)\right| \leq C_1, \tag{53}$$

$$\left|z^{-2\gamma}\left[z^{2\gamma}\tilde{Z}'_{nm}(z)\right]'\right| \leq C_1\delta_{nm}^2, \tag{54}$$

где C_1- некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Очевидно, что $\tilde{Z}_{nm}(z)$ ограничена вблизи точки $z=0$ и при достаточно больших z справедлива асимптотическая формула [19]

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{55}$$

Поэтому справедлива оценка (53).

Используя формулу [19]

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\pm\nu}J_\nu(x)\right] = \pm x^{\pm\nu}J_{\nu\mp1}(x), \tag{56}$$

из (23) найдем

$$z^{2\gamma}\tilde{Z}'_{nm}(z) = \delta_{nm}z^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z). \tag{57}$$

Вычислим производную первого порядка функций (57), а затем, умножая ее на $z^{-2\gamma}$, имеем $z^{-2\gamma}\left[z^{2\gamma}Z'_{nm}(z)\right]' = -\delta_{nm}^2 z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z) = -\delta_{nm}^2\tilde{Z}_{nm}(z)$. Отсюда, в силу (53), следует справедливость оценки (54). □

Лемма 4. *Для каждой $n \in N$ и достаточно больших натуральных m справедлива следующая оценка:*

$$J_{3/2-\gamma}^2(\delta_{nm}) \geq \frac{1}{\pi\delta_{nm}}. \tag{58}$$

Доказательство. Так как δ_{nm} есть нули функции $J_{1/2-\gamma}(x)$, то справедливо равенство

$$\int_0^1 zJ_{1/2-\gamma}^2(\delta_{nm}z)\,dz = \frac{1}{2}J_{3/2-\gamma}^2(\delta_{nm}).$$

Из этого равенства следует, что

$$J_{3/2-\gamma}^2(\delta_{nm}) = 2\int_0^1 zJ_{1/2-\gamma}^2(\delta_{nm}z)\,dz = \frac{2}{\delta_{nm}^2}\int_0^{\delta_{nm}}\xi J_{1/2-\gamma}^2(\xi)\,d\xi. \tag{59}$$

В силу формулы (55), существует некоторое большое число $C_2 > 0$ такое, что при $\xi > C_2$ справедливо равенство $\xi J_{1/2-\gamma}^2(\xi) \approx (2/\pi)\sin^2(\xi + \gamma\pi/2)$.

Тогда, если предположить, что δ_{nm} достаточно большое число и $\delta_{nm} > 2(C_2+1)$, то

$$\int_0^{\delta_{nm}}\xi J_{1/2-\gamma}^2(\xi)\,d\xi > \int_{C_2}^{\delta_{nm}}\xi J_{1/2-\gamma}^2(\xi)\,d\xi \approx \frac{2}{\pi}\int_{C_2}^{\delta_{nm}}\sin^2\left(\xi + \frac{\gamma\pi}{2}\right)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\delta_{nm} - \frac{1}{\pi}\left[C_2 + \cos(\delta_{nm} + C_2 + \gamma\pi)\sin(\delta_{nm} - C_2)\right] \geq \frac{1}{2\pi}\delta_{nm}.$$

Если учесть это, то из (59) следует оценка (58). □

Лемма 5. *Для любых значений* λ_{nm}, $n = 0, 1, 2, ..., m \in N$ *и* $\forall y \in [0, +\infty)$, *справедливы оценки*

$$\left|\bar{K}_{\nu}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right)\right| \leq 1, \tag{60}$$

$$\left|G_{\nu}\left(\lambda_{nm}, y\right)\right| = \left|y^{2\nu-1} \frac{d}{dy}\left[y^{-2\nu+1} \frac{d}{dy} \bar{K}_{\nu}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} y\right)\right]\right| \leq \lambda_{nm}. \tag{61}$$

Доказательство. Для нахождения $\max\limits_{x \in [0,\infty)} \bar{K}_{\nu}(x)$, надо найти решение для уравнении $\bar{K}'_{\nu}(x) = -2^{1-\nu} x^{\nu} K_{\nu-1}(x) / \Gamma(\nu) = 0$. Известно, что функция Макдональда $K_{\nu-1}(x)$, убывающая функция и не имеет нулей. Поэтому решение последнего уравнения, будет $x = 0$. Следовательно, функция $\bar{K}_{\nu}(x)$ достигает свой максимум в точке $x = 0$ и в этой точке $\bar{K}_{\nu}(0) = 1$. Отсюда вытекает оценка (60). Аналогичным методом, как и в лемме 3, можно доказать справедливость оценки (61). Так как оценки (60) и (61) справедливы для всех $\nu > 0$, то они верны и для $\nu = 1/2 - \beta$ и $\nu = 3/2 - \beta$. □

Лемма 6. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$f(0, z) = f(1, z), f(x, 0) = f(x, 1) = 0, \tag{62}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_{xxz}(x, z)\right] \in C([0,1] \times [0,1]), \tag{63}$$

$$f_0(0, z) = f_0(1, z), f_0(x, 0) = f_0(x, 1) = 0, \tag{64}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_{0xxz}(x, z)\right] \in C([0,1] \times [0,1]), \tag{65}$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left|z^{-1/2-\gamma} \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_{0xxz}(x, z)\right]\right| dxdz < +\infty. \tag{66}$$

где $f_0(x, z) = z^{-2\gamma}(\partial/\partial z)\left[z^{2\gamma} f_{xxz}(x, z)\right]$.

Тогда для достаточно больших n *и* m *справедлива оценка*

$$|F_{nm}| \leq \frac{C_3}{n^{4+\varepsilon_4} \delta_{nm}^{4+\varepsilon_5}}, \tag{67}$$

здесь ε_4, ε_5, C_3- *некоторые положительные постоянные.*

Доказательство. На основании формулы (56) коэффициенты F_{nm}, которые задаются формулой (49), представим в виде

$$F_{nm} = \frac{1}{2\pi n \delta_{nm}} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, z) \frac{d}{dx}[\cos(2\pi n x)] \frac{d}{dz}\left[z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm} z)\right] dxdz.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям, получим

$$F_{nm} = \frac{1}{2\pi n \delta_{nm}} \left\{\left[\left(f(x, z) \cos(2\pi n x)\big|_{x=0}^{x=1}\right) z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm} z)\right]_{z=0}^{z=1} - \right.$$

$$- \int\limits_0^1 \left[z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm} z) f_x(x, z)\right]_{z=0}^{z=1} \cos(2\pi n x)\, dx -$$

$$- \int\limits_0^1 \left[\cos(2\pi n x) f_z(x, z)\right]_{x=0}^{x=1} z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm} z)\, dz +$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos(2\pi nx)\, z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, f_{xz}(x,z)\, dxdz \Bigg\}.$$

В силу условия (62), это равенство упрощается и принимает вид

$$F_{nm}=\frac{1}{2\pi n\delta_{nm}}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos(2\pi nx)\, z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, f_{xz}(x,z)\, dxdz.$$

Из последнего, интегрируя по частям, имеем

$$F_{nm}=\frac{1}{(2\pi n)^2\delta_{nm}^2}\Bigg\{\left[\left(f_{xz}(x,z)\sin(2\pi nx)|_{x=0}^{x=1}\right) z^{1/2+\gamma} J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\right]_{z=0}^{z=1}-$$

$$-\int\limits_0^1 \left[z^{1/2+\gamma} J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, f_{xxz}(x,z)\right]_{z=0}^{z=1} \sin(2\pi nx)\, dx-$$

$$-\int\limits_0^1 \left[\sin(2\pi nx)\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_{xz}(x,z)\right]\right]_{x=0}^{x=1} z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, dz+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \sin(2\pi nx)\, z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_{xxz}(x,z)\right] dxdz \Bigg\}.$$

Отсюда, учитывая условие (63) и $\gamma<1/2$, а также равенства $J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm})=0$, имеем

$$F_{nm}=\frac{1}{(2\pi n)^2\delta_{nm}^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f_0(x,z)\sin(2\pi nx)\, z^{1/2+\gamma} J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, dxdz.$$

Снова интегрируя по частям, из последнего получим

$$F_{nm}=\frac{1}{(2\pi n)^3\delta_{nm}^3}\Bigg\{\left[\left(f_0(x,z)\cos(2\pi nx)|_{x=0}^{x=1}\right) z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\right]_{z=0}^{z=1}-$$

$$-\int\limits_0^1 \left[z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, f_{0x}(x,z)\right]_{z=0}^{z=1} \cos(2\pi nx)\, dx-$$

$$-\int\limits_0^1 \left[\cos(2\pi nx)\, f_{0z}(x,z)\right]_{x=0}^{x=1} z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, dz+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos(2\pi nx)\, z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, f_{0xz}(x,z)\, dxdz \Bigg\}.$$

Учитывая условие (64), из последнего получим

$$F_{nm}=\frac{1}{(2\pi n)^3\delta_{nm}^3}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos(2\pi nx)\, z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)\, f_{0xz}(x,z)\, dxdz.$$

Отсюда, интегрируя по частям еще раз и принимая во внимание условие (65) и $\gamma < 1/2$, а также равенства $J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}) = 0$, имеем

$$F_{nm} = \frac{1}{(2\pi n)^4 \delta_{nm}^4} \int_0^1 \int_0^1 \sin(2\pi n x) z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm} z) \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_{0xxz}(x,z)\right] dxdz. \tag{68}$$

Известно [22, стр. 91], что если $f(x)$ абсолютно интегрируемая функция на $[a,b]$, то справедлива равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin nx dx = 0. \tag{69}$$

В книге [22, стр. 275], также получен аналог свойств интегралов (69), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx = 0, \tag{70}$$

здесь $f(x)-$ абсолютно интегрируемая функция на $[0,1]$, а $\lambda_n,\ n \in N-$ занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции $J_p(x), p > -1$.

Так как выполнено условие (66), то в силу (69)-(70), имеют место равенства

$$\lim_{n,\,m\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \sin(2\pi n x) z^{1/2-\gamma} \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_{0xxz}(x,z)\right] J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm} z) dxdz = 0.$$

Из (68), в силу последнего, при достаточно больших n и m следует оценка (67). Лемма 6 доказана. □

Аналогично доказываются следующие леммы.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия (62)-(66) и*

$$f_x(0,z) = 0,\ \ f_{0x}(0,z) = 0. \tag{71}$$

Тогда для достаточно больших n и m справедлива оценка

$$\left|\tilde{F}_{nm}\right| \le \frac{C_4}{n^{4+\varepsilon_4}\delta_{nm}^{4+\varepsilon_5}}. \tag{72}$$

Лемма 8. *Пусть выполнены условия*

$$f(x,0) = 0, f(x,1) = 0,\ z^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_z(x,z)\right]\Big|_{z=0} = 0,\ \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma} f_z(x,z)\right]\Big|_{z=1} = 0,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left| z^{-1/2-\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left\{z^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{2\gamma} f_z(x,z)\right)\right]\right\}\right| dxdz < +\infty.$$

Тогда для достаточно больших m справедлива оценка

$$\left|\tilde{F}_{0m}\right| \le \frac{C_5}{\delta_{0m}^{4+\varepsilon_5}}. \tag{73}$$

В (72) и (73), C_4, C_5- некоторые положительные постоянные.

Очевидно, что для достаточно больших n и m

$$1/\lambda_{nm} < 1. \tag{74}$$

Теперь переходим к исследованию сходимости рядов. Из ряда (48) почленным дифференцированием формально составим ряды:

$$u_{xx} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)X''_{2n-1}(x)\,\tilde{Z}_{nm}(z)\,F_{nm}\Big/J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)X''_{2n}(x)\,\frac{\tilde{Z}_{nm}(z)}{J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})}\left(\tilde{F}_{nm}-\frac{\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}}F_{nm}\right)+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{3/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)X''_{2n}(x)\,\tilde{Z}_{nm}(z)\,\frac{2\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})}F_{nm}, \tag{75}$$

$$u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y = 4\sum_{m=1}^{\infty}G_{1/2-\beta}(\delta_{0m},y)\,\tilde{Z}_{0m}(z)\,\tilde{F}_{0m}\Big/J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{0m})+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}G_{1/2-\beta}(\lambda_{nm},y)\,X_{2n-1}(x)\,\tilde{Z}_{nm}(z)\,F_{nm}\Big/J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}G_{1/2-\beta}(\lambda_{nm},y)\,X_{2n}(x)\,\frac{\tilde{Z}_{nm}(z)}{J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})}\left(\tilde{F}_{nm}-\frac{\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}}F_{nm}\right)+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}G_{3/2-\beta}(\lambda_{nm},y)\,X_{2n}(x)\,\tilde{Z}_{nm}(z)\,\frac{2\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})}F_{nm}, \tag{76}$$

$$u_{zz}+\frac{2\gamma}{z}u_z = 4\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{1/2-\beta}(\delta_{0m}y)\,z^{-2\gamma}\left[z^{2\gamma}\tilde{Z}'_{0m}(z)\right]'\tilde{F}_{0m}\Big/J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{0m})+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)X_{2n-1}(x)\,z^{-2\gamma}\left[z^{2\gamma}\tilde{Z}'_{nm}(z)\right]'F_{nm}\Big/J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)\frac{X_{2n}(x)\left[z^{2\gamma}\tilde{Z}'_{nm}(z)\right]'}{z^{2\gamma}J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})}\left(\tilde{F}_{nm}-\frac{\pi n(1-2\beta)}{\lambda_{nm}}F_{nm}\right)+$$

$$+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{K}_{3/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)X_{2n}(x)\,\frac{\left[z^{2\gamma}\tilde{Z}'_{nm}(z)\right]'2\pi n(1-2\beta)}{z^{2\gamma}\lambda_{nm}J^2_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})}F_{nm}, \tag{77}$$

В силу оценок (50), (53), (58), (60), (67), (72), (73), (74) и (25), ряд (48) при любом $(x,y,z)\in\bar{\Omega}$ и достаточно больших n и m мажорируется числовым рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_6}{m^{3+\varepsilon_5}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_7}{n^{4+\varepsilon_4}m^{3+\varepsilon_5}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_8}{n^{3+\varepsilon_4}m^{3+\varepsilon_5}}, \tag{78}$$

а ряды (75)-(76) на каждом компакте $K\subset\Omega$ мажорируются соответственно числовыми рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_9}{n^{2+\varepsilon_4}m^{3+\varepsilon_5}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10}}{n^{1+\varepsilon_4}m^{3+\varepsilon_5}}, \tag{79}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{11}}{m^{1+\varepsilon_5}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{12}}{n^{4+\varepsilon_4}m^{1+\varepsilon_5}}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{13}}{n^{3+\varepsilon_4}m^{1+\varepsilon_5}}, \tag{80}$$

где $C_j,\ j=\overline{6,13}-$ положительные постоянные.

Ряд (77), также мажорируется числовым рядом (80) на каждом компакте $K\subset\Omega$.

Пользуясь признаком Даламбера, нетрудно убедиться, что числовые ряды, участвующие в (78)-(80), сходятся. Тогда, согласно признаку Вейерштрасса, абсолютно и равномерно сходится ряд (48) в $\bar{\Omega}$, а ряды (75)-(77) на каждом компакте $K\subset\Omega$. Поэтому функция $u\left(x,y,z\right)$, определенная рядом (48), удовлетворяет всем условиям задачи 1.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть функция $f\left(x,z\right)$ удовлетворяет условиям (62)-(66), (71). Тогда решение задачи 1 существует, единственно и определяется формулой (48).*

Этим завершено исследование задачи 1.

5. Исследование задачи 2

В этой задаче поменяется роль сопряженных задач. Покажем это. Поставленная задача, после разделения переменных по переменной x сводится к следующей задаче

$$L_{\mu}^{0}X\left(x\right)=0,\ X'\left(0\right)=X'\left(1\right),\ X\left(1\right)=0. \tag{81}$$

Задача (81) совпадает с задачей (15). Известно, что задача (81) является несамосопряженной. Сопряженной ей будет следующая задача:

$$L_{\bar{\mu}}^{0}T\left(x\right)=0,\ T\left(0\right)=T\left(1\right),\ T'\left(0\right)=0. \tag{82}$$

В самом деле,

$$\int_0^1 X''\left(x\right)T\left(x\right)dx=\left[X\left(1\right)\left(T\left(1\right)-T\left(0\right)\right)-X\left(0\right)T'\left(0\right)\right]+\int_0^1 X\left(x\right)T''\left(x\right)dx.$$

Отсюда видно, что выражения в квадратных скобках будут равны нулю при $T\left(0\right)=T\left(1\right),\ T'\left(0\right)=0$.

Задача (82) совпадает с задачей (10).

Теперь, учитывая сказанное выше, методом, примененным в задаче 1, убеждаемся, что утверждения теорем 1 и 2 справедливы и для задачи 2.

Замечание. Можно сформулировать и исследовать нелокальную краевую задачу, аналогичную задаче 1, и в том случае, когда условие (3) заменено одним из следующих условий:

1) $u\left(0,y,z\right)=u\left(1,y,z\right),\ \ u_x\left(1,y,z\right)=0,\ y\in[0,+\infty),\ z\in[0,1]$,

2) $u_x\left(0,y,z\right)=u_x\left(1,y,z\right),\ \ u\left(0,y,z\right)=0,\ \ y\in[0,+\infty),\ \ z\in[0,1]$.

References

[1] A.M. Nahushev, *Equations of Mathematical Biology*, Visshaya shkola, Moscow, 1995. Zbl 0991.35500

[2] A.A. Guetter, *A free boundary problem in plasma containment*, SIAM J. Appl. Math., **49**:1 (1989), 99–115. Zbl 0704.35139

[3] C.V. Pao, *Reaction diffusion equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions*, J. Math. Anal. Appl., **195**:3 (1995), 702–718. Zbl 0851.35063

[4] E. Obolashvili, *Nonlocal problems for some partial differential equations*, Appl. Anal., **45**:1-4 (1992), 269–280. Zbl 0771.35012

[5] J.I. Diaz, J.M. Rakotoson, *On a nonlocal stationary free boundary problem arising in the confinement of a plasma in a Stellarator geometry*, Arch. Ration. Mech. Anal., **134**:1 (1996), 53–95. Zbl 0863.76092

[6] F.I. Frankl, *Flowing profiles by a stream of subsonic velocity with a supersonic zone ending with a direct surge of seal*, Prikl. Mat. Mekh, **20**:2 (1956), 196–202. Zbl 0074.42201

[7] N.I. Ionkin, *Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Differ. Equations, **13** (1977), 204–211. Zbl 0403.35043

[8] H.N.I. Ionkin, *On the sustainability of one problem theory of thermal conductivity with a non-classical edge condition*, Differ. Uravn., **15**:7 (1979), 1279–1283. Zbl 0418.35053

[9] N.I. Ionkin, E.I. Moiseev, *About the task for the equation of thermal conductivity with two-point edge conditions*, Differ. Uravn., **15**:7 (1979), 1284–1295. Zbl 0415.35032

[10] M.E. Lerner, O. A. Repin, *On Frankl type problems for some elliptic equations with degeneration of various kinds*, Differ. Equ., **35**:8 (1999), 1098–1104. Zbl 0976.35028

[11] M.E. Lerner, O.A. Repin, *Nonlocal boundary value problems in a vertical half-strip for a generalized axisymmetric Helmholtz Equation*, Differ. Equ., **37**:11 (2001), 1562-1564. Zbl 1016.35016

[12] E.I. Moiseev, *On the solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method*, Differ. Equ., **35**:8 (1999), 1105–1112. Zbl 0973.35085

[13] E.I. Moiseev, *Solvability of a nonlocal boundary value problem*, Differ. Equ., **37**:11 (2001), 1643–1646. Zbl 1016.35021

[14] Yu.K. Sabitova, *Nonlocal initial-boundary-value problems for a degenerate hyperbolic equation*, Russ. Math., **53**:12 (2009), 41–49. Zbl 1180.35368

[15] A.A. Abashkin, *A nonlocal problem for mixed type equation with singular coefficient in domain with half-strip as hyperbolic part*, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **36**:3 (2014), 7–20. Zbl 1413.35311

[16] A.N. Tikhonov, A.A. Samarskiy, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1972. Zbl 0265.35003

[17] V.A. Il'in, *On the unconditional basis property for systems of eigenfunctions and associated functions of a second-order differential operator on a closed interval*, Sov. Math., Dokl., **28** (1983), 743–747. Zbl 0548.34026

[18] V.A. Il'in, *On the absolute and uniform convergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of a nonselfadjoint elliptic operator*, Sov. Math., Dokl., **29** (1984), 10-13. Zbl 0597.35090

[19] N.N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Fizmatlit, Moscow, 1963. Zbl 0114.03404 (Englewood Cliffs, N.J., 1965 Zbl 0131.07002)

[20] F. Olver, *Introduction to asymptomatic and special functions*, Academic Press, New York - London, 1974. (Mir, Moscow, 1986) Zbl 0308.41023

[21] A.K. Urinov, K.T. Karimov, *The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients*, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **21**:4 (2017), 665–683. Zbl 1413.35315

[22] G.P. Tolstov, *Fourier Series*, Nauka, Moscow, 1980. Zbl 0487.42001

Akhmadjon Kushakovich Urinov
Ferghana state university,
19, Murabbiylar str.,
Ferghana, 150100, Uzbekistan
Email address: urinovak@mail.ru

Kamoliddin Tuychiboevich Karimov
Ferghana state university,
19, Murabbiylar str.,
Ferghana, 150100,Uzbekistan
Email address: karimovk80@mail.ru